ボゴリューボフ他

場の量子論の数学的方法

江沢　洋
亀井　理　他訳
関根克彦

東京図書株式会社

Николай Николаевич Боголюбов
Анатолий Алексеевич Логунов
Иван Тодорович Тодоров

ОСНОВЫ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Издательство «Наука» Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1969

まえがき

場の量子論の一般原理と，実験にかかるようなその帰結とをまとめて一冊の本を書いたらどうか．私たちがこう思いたったのは1960年の末であった．その本では，まず第一に，分散理論の分野で Bogoliubov = Medvedev = Polivanov の本 [1] からあとに起こった新しい展開を説明しなければならないと考えた．また，その序説として，公理論的方法に見られるいろいろな傾向の綜合報告も入れたい．S 行列の汎関数微分という道具立てと微視的因果性の条件とに基づく Bogoliubov = Medvedev = Polivanov (BMP) の理論だけでなく，Wightman, Haag, Lehmann, Symanzik, Zimmermann などの名とともに知られた，場の演算子を用いる理論も，それぞれ相応の位置をそのなかに占めるようにしたい．私たちは，このように考えたのであった．時の流れとともに，このような序説的な部分で扱うべき問題（同時にその分量）はどんどん増えていった[1)]．つまり結局のところ，この序説が成長して現在の本となってしまったのである．

そうこうするうちに，量子化された場の一般理論について二冊の秀れた本 [2, 3] が現われた（ロシア語訳もある）．これらは，公理論的方法のうちでも，場の演算子を用いる理論に基本的業績を残した人びとによって書かれたものである．これらにくらべると，私たちの本は，理論の基本原理を S 行列で書く定式化と，それに，いろいろな定式化の関連についての議論とを余分に含んでいる（第4章）．それだけでなく，私たちは理論の群論的側面にはるかに大きい注意を払った： Poincaré 群のユニタリ表現に関する Wigner の理論についても必要なところは述べたし，不連続変換に対する変換性も詳しく調べ，また，真空に縮退のない場の理論では，時間に依存したユニタリ演算子によって対称性の破れを記述することはできないという定理の証明もしておいた．

この巻は極めて理論的な性格をもっており，それは当然のことながら，叙述のスタイルにも現われている．私たちは，ひきつづいて続巻を書こうという望みを捨てていない．そ

1) この仕事のある中間段階は，Todorov (1964) の講義に反映されている．

こでは，分散式や散乱振幅のあいだの漸近的関係など，実験で確かめられる諸結果を場の量子論の一般原理からの帰結として扱いたいと思う（この巻には，こういう類の応用としては *TCP* 定理とスピンと統計の関係についての定理を入れたにすぎない）．

この本の読者として念頭においたのは，場の量子論の原理的諸問題に関心をもつ理論物理学者や数学者である．ほかの本を参照しないでもこの本だけで読み通せるように書くため，十分に努力したつもりであるが，それでもこれから量子力学を勉強しようという人にまで，この本をすすめるわけにはいかない．量子力学の普通のコースを修めている上に，場の量子論について一通りの知識でもあればなおよいだろう（たとえばBogoliubov=Shirkov［4］の初めの３章とか，Henley=Thirring の本［5］など）．

数学の予備知識のうち，数学・物理学科における２年生までのカリキュラムに含まれていないものは，肉づけは十分とはいえないけれども本文に説明しておいた（関数解析の知識，一般関数の理論，群の表現論）．

V. S. Vladimirov，M. B. Mensky，A. I. Oksak は数々の貴重な注意を寄せて下さり，それを私たちは原稿作成の際に利用させていただいた．また，L. Todorova は原稿を本の形に仕上げる上で助力を惜しまれなかった．これらの方がたに心からなる感謝を捧げることは，著者一同の楽しい義務である．

1968 年 12 月

著　者

目　次

第2章 相対論的量子論の一般原理

第3章　局所場と Wightman 関数

第4章 散乱理論, 漸近条件と S 行列

第5章　相対論的不変性からの二，三の結果. *TCP*, スピンと統計，Haag の定理

場の量子論の数学的方法

序　　　論

場の量子論における公理論的アプローチの位置

公理論というものは，科学の一つの分野が事実上の完成をみたあとでつける釉薬のようなものだというのが広くゆきわたっている意見である．これは純粋数学に関してさえも正しくない．自然数論や Euclid 幾何学の現代的な公理論がこれらの分野の完成を意味することは認めるとしても（なお，数理論理学あるいはメタ数学といった新しい科学に糧を提供しているが），関数解析など現代数学の発展のなかで公理論は基本的な方法となっており，この方法があってこそ発展が始まったのだといえる（もちろん，発展に伴い公理それ自身も変更を受ける）．物理のような理論においてさえ，Newton の昔から，公理論的方法は既知の諸結果を系統だてるためだけでなく新しい結果を得るためにも役立ってきた．

公理論のなかみは一般性と抽象性の側面でも徐々に変化してきた．今日では一般性のない一つの方法であるとみなされている Lagrange の方法も，物理学の最も一般的な原理の一つである最小作用の原理を基礎として前世紀につくりだされたものだ．場の量子論の公理論的アプローチも，一般化を目ざして常に行なわれる当然の努力の結果というばかりではなく，なによりもまず，相対論的量子論における Lagrange 的アプローチと摂動論の方法とが原理的な困難にぶつかったために起こったものである．この困難を本気になって解析するには，場の量子論の標準的な形式を学んでおかねばならない．これは本書の範囲外である（たとえば [4] または [6] を見よ）．ここでは，いま引用した本の術語をわきまえている読者に対して，Lagrange 形式に基づく今日の理論は相互作用している場の形式的な方程式に対してくりこまれた摂動級数をつくる処方箋を与えているにすぎないと指摘するだけにしよう．この方程式に対する別の（摂動論によらない）アプローチでは，起こってくる発散を除く一意的な処法さえできていない．展開のパラメーター——結合定数 g —— が 1 より大きい強い相互作用の場合には，この状況はどう見ても不満足である．

Lagrange 的アプローチの枠を越える最初の試みは Heisenberg (1943) までさかのぼ

る．素粒子物理において実際に測定されるのは何であるのかを分析して，Heisenbergは，基本的な観測量は散乱行列であるという結論に達し，場の概念やら（摂動論の基礎にある）相互作用の断熱的消失の仮定やらを捨てて，直接にS行列要素の言葉で理論をたてようと提案したのだった．このHeisenbergのアプローチは，しかし，ラジカルにすぎることがわかった．局所的な量を理論からすっかり追い出したのでは，力学系の時空における発展を考察する可能性も因果律を考慮に入れる可能性もなくなってしまう．

実際上も，Lorentz不変性とユニタリ性しか含まぬこれほど一般的な枠組では，S行列要素についてトリヴィアルでない動力学的な予言を与える見込みはない．そのため，50年代における公理論的アプローチの新たな展開は局所的な量の研究という道をたどることになった．はじめには少なくとも三つの異なる方向があった．Wightmanたち[1]のアプローチではHeisenberg場が基本量である．はじめHaagにより独立な仮説として定式化された漸近条件や，また散乱行列といったものは理論のずっと後の段階まで現われない．この意味でWightmanのアプローチは伝統的なものに最も近いといえよう．この方向の仕事は，普通，数学的な定式化や証明をきわめて注意ぶかく行なう点できわだっている．Heisenbergの初めのプログラムに最も近いのは，Bogoliubov＝Medvedev＝Polivanov [1] のアプローチであって，漸近（自由）場の汎関数と考えたS演算子が基本量であり，局所カレントや輻射演算子は漸近場に加えた古典的な場に関してS演算子を微分することによって求められる．このアプローチでは観測される量との結びつきがより直接的なので，分散公式を最初に確立し得たのも偶然ではなかった [1]．他方，場に基づく伝統的な解釈との対応を明らかにするには補足的な研究が必要である．Lehmann＝Symanzik＝Zimmermann (LSZ) のアプローチはちょうど中間の位置にある．はじめにHeisenberg場が出てくるという点では一見Wightmanの形式と同じにみえる．しかし，LSZの形式では常にHeisenberg場の時間順序の積（T積）[2]を用いて計算するのであり，これは正確な定義をもたないので（形式的な定義式が演算子値の一般関数と不連続なθ-関数の積を含む），むしろ，このT積を理論の基本量と見なければならない．この量はあとで見るように，BMPアプローチの輻射演算子と密接に関連している．60年代になると，こうした歴史的には互いに無関係であった諸方向の関連が，より一層明らかになってきた．相互関係の完全な理解にはいまだに達せられないのではあるが——．その後，このほかにも，

---

[1] 各章の文献案内を見よ．

[2] 場の量子論の初歩とここで用いられている術語に通じていない読者は，本書の第4章（§2）を参照せよ．そこにLSZ理論が系統的に解説されている．

局所観測量に対応する有界演算子の代数の考察に基礎を置く新しい公理論の方向（主として Haag，荒木，Kastler の名に結びついた方向）が生まれた．その結果を評価するのは時期尚早と思われるので，第5章の付録で触れるだけにしておこう．

今日の素粒子理論が進展している広大な前線のうちで，公理論的アプローチは，われわれの見るところ比較的に小さい部分を占めている（特に，論文の数から判断すれば）．公理論的アプローチからの結果で実験により証明されたものも，非常に多いというわけではない．*TCP* 定理，スピンと統計の関係，限られた数の反応過程に対する分散公式，それに散乱振幅の漸近的振舞いのいくつかといったところであろう．それでも，一連の特殊な仮定に基づいた理論からの現象論的な結果がどれも短命だという事実は，量子論の基本的諸原理のみに基づくこれら少数の結果に対する関心を増大させている．その諸原理とは相対論的不変性，正エネルギー状態の完全系の存在，微視的因果性である．

公理論的アプローチへの動機をなした基本的な課題は，相対論的・局所的な場の量子論の諸原理がトリヴィアルでない散乱行列の存在と両立するかどうかを見きわめることであるが，これは今日までのところまだ解かれていない．すべての公理をみたすトリヴィアルでない理論の一つの例もなければ存在証明さえもない．存在についていえば，実質的に唯一の現存の例は自由場の理論である（S 行列は恒等的に1）．この課題は，また，S 行列要素を近似的に計算する摂動によらない首尾一貫した方法を見いだすという実際的な問題とも関連している．

本書の目標は，公理論的アプローチのいろいろな方向とそれらの相互関係を系統的に叙述することにある．

叙述のプラン

第1章は補助的な性格をもつ．一般関数の理論と関数解析から後に必要となる知識を抜き出したものだが，この章は便覧ふうに書かれているから，そこで触れている諸問題の系統的な叙述の代わりになるようなものでないことはいうまでもない．ほとんどすべての結果は証明なしに述べられているし，さらに，すべての定義や命題がよく考えられた順序に配列してあるわけでもない．

系統的な叙述は第2章から始まる．ここでは状態ベクトルの空間を考察し，相対論的量子力学の諸原理のうち局所的な量の導入を必要としないものを定式化しよう．それらは，Poincaré 群（すなわち非斉次 Lorentz 群）に関する不変性とスペクトル条件（すなわち

正エネルギーの物理的状態の完全系の存在）とである．この章の付録には Lie 群論の基礎的な知識が引用してある．

第3章には，局所場の量子論の Wightman による定式化を述べる．この章の三分の一ほどは自由場と一般化された自由場の例にあてられている．

第4章では，Haag=Ruelle の散乱理論を概説し，LSZ 理論および BMP の S 行列的アプローチとの関係に触れよう．

以上に用意した道具の応用を第5章に述べる．不変解析関数の一般形に関する定理，*TCP* 定理，スピンと統計の関係の定理，それに場の量子論の正準形式に関して Haag の定理が代表する否定的な結果のいくつかなどである．この章は，もしお望みなら，第4章の §1 を終えた直後に読むこともできる．

どの章も短い内容紹介に始まり文献案内に終わる．参考文献は巻末にあって，二部に分かれている．第1部は教科書と単行本のリスト，この部分への参照は角括弧つきの番号で指示しよう．参考文献の第2部は雑誌の論文，プレプリント，セミナーや諸種の学校での講義録を含む．この部分への参照は著者の苗字（著者が二名以上のときは先頭の著者のもの）と年で指示しよう．たとえば Heisenberg (1943) のように*)．

たくさんの演習問題が小活字で与えてあるが，これらは本文と不可分である．演習として記した命題も後で引き合いに出すことがあるので，証明するしないはともかく，読んでおかなければいけない．一部の証明と数学的ないくつかの注意は小活字になっている．最初は，これらを省略して読んでもよい．

式や定理，補題，問題には三つ組の番号がつけてある．第一の番号は章を，第二のは§を，第三のが順番を示す．

しばしば出合う記号について注意をしておこう．四元ベクトルの成分はすべて実とし，Minkowski 空間の計量テンソルを，

$$g^{00} = -g^{kk} = 1 \ (k=1,2,3), \quad g^{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu \text{ のとき}, \ \mu, \nu = 0,1,2,3)$$

と定めておく．四元ベクトル p の三次元（空間的）部分は太字で示すから，$p = (p^0, \boldsymbol{p})$，$p^2 = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2$ のようになる．また全体を通じて $c = \hbar = 1$ となる単位系を使う．

予備知識は？

まえがきにも書いたとおり，本書で量子場の一般理論の演繹的な解説を読む前に，おおまかにでもよいから，量子電気力学と素粒子論の標準的な形式の歴史的発展と基本概念の

知識をもっていることが必要である．公理論的アプローチのそもそもの（そして今日なおまったく果たされていない）課題は，Lagrange または Hamilton 形式に結びついた形式的な道具立てのなかから信ずるに価する諸性質を選びだして，きちんと定式化することである．それゆえ，本書を批判的に読んで理論の基本的諸要請がなにから帰納されたものかを理解するためには，場の《伝統的》量子論の内容をなす原材料を知っていなければならない．

本書を読み始める前に知っていると役に立つ場の量子論の基礎知識は [4] の最初の 25 節にコンパクトかつ完全に叙述されている（わずかの例外を別として本書でも [4] と同じ記号を用いる）．場の量子論の物理的基礎への入門としては，前にあげた Henley=Thirring の本が推薦できる．この本では特に，教育的な一連のモデルが考察されている．素粒子の基本的な特徴・系統づけと相互作用の簡単な記述は Nishijima [7] にある（われわれの目的には，たとえば，Marshak=Sudarshan [8] の第 1 章に見られるような素粒子の最も一般的な記述でも十分である）．知識欲の盛んな読者は，場の量子論の基礎に関する百科辞典的な記述と原論文の数多い引用を Schweber [6] の大冊に見いだすであろう．非相対論的な量子力学にはじまり場の量子論に終わる散乱理論のさらに立ち入った解説が，網羅的な Goldberger=Watson [9] にある．

*) 原書の脚注は 1), 2) のように数字で示し，訳注は *), **) などで示した．また [山中] などとあるのは訳者の補なった参考文献で，そのリストは巻末にある．

第1章　関数解析と一般関数

——数学的準備——

要　　約

急減少かつ無限に滑らかな関数の空間 $\mathcal{S}$ の上の連続線形汎関数を一般関数という．空間 $\mathcal{S}(R_n)$ における位相は，可算個のノルム系

$$p_\sigma(u)=\max_{\substack{|\alpha|\leqslant\sigma\\|\beta|\leqslant\sigma}}\sup_{x\in R_n}|x^\alpha D^\beta u(x)|\qquad(\sigma=0,1,2,\cdots)$$

によって定められている．ただし，

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\qquad D^\beta=\frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\qquad(|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$$

という略記法を用いた．

基礎関数の空間 $\mathcal{S}$ と，その $\mathcal{S}$ に共役な一般関数の空間 $\mathcal{S}^*$ とは，それぞれ Fourier 変換により自分自身に連続的に写像されるという注目すべき性質をもっている（補題 1.3.1 と定理 1.3.1 を参照）．

空間 $\mathcal{S}$ に属し，かつある領域 G の外で恒等的に 0 なる関数の空間 $\mathcal{S}(G)$ も $\mathcal{S}$ と同様に定めることができる．

一般関数は何回でも微分可能である（空間 $\mathcal{S}^*$ は微分によって自身から外にはみ出さない）．一般関数を未知関数とする微分方程式の最も簡単な例が，この章の 3.3 節と 3.4 節とにおいて検討される．

四次元空間 R_4 における Lorentz 不変な一般関数で点 $x=0$ に集中しているものの一般形は，式 $f=P(\square)\delta(x)$ により与えられる．ここに $\square=(\partial^2/\partial x_0^2)-(\partial^2/\partial x_1^2)-(\partial^2/\partial x_2^2)-(\partial^2/\partial x_3^2)$ であり，P は任意の多項式，$\delta(x)$ は (1.2.2) で与えられる Dirac の δ-関数である．この章の 3.5 節で Lorentz 不変な一般関数の一般形を示す．

一般関数 $\tilde{f}_r(x)\ (x\in R_4)$ が遅延型関数であるとは，$x\lesssim 0$，すなわち $x^0<0$ あるいは $x^2=x^{0^2}-\boldsymbol{x}^2<0$ のとき，$\tilde{f}_r(x)=0$ となることである．遅延型関数 $\tilde{f}_r(x)$ の Fourier 変換は，複素四次元空間の管状領域 T^+ ($\mathrm{Im}\,k\in V^+$，$\mathrm{Re}\,k\in R_4$) で正則な関数 $f_r(k)$ の境界

値 $f_r(p)$ として表わせる．付録 A で関数 $\widetilde{f_r}(x)$ が遅延型関数であるための関数 $f_r(k)$ に関する必要十分条件が定式化される（定理 1.A.2)．

空間 $\mathcal{S}$ における連続双線形汎関数の一般形は，有限次元における双線形汎関数の形と似ているが（核定理），ある種の一般的に定義される空間――核型空間――において同様の定理が成り立つ．三つの空間の組 $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ が Gelfand の三つ組をなすとは，Ω が核型空間で，かつ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ においていたるところ稠密であることをいう（ただし $\mathcal{H}$ のスカラー積による収束に関して稠密という意味である．なおスカラー積は Ω の位相で連続であると仮定している)．Gelfand の三つ組を使うことによって，自己共役演算子の理論は簡明で筋の通ったものになる．この考えの量子論への応用は第2章で知ることになろう．

§1.　関数解析のいくつかの知識

1.1.　ノルム空間

普通のベクトル代数で出合う初等的な代数演算――すなわち，加法および数による乗法――の一般的性格を検討することによって，線形空間の考えに到達する．線形空間の元はどのような性質をもっていてもよい．その元に，加法および実数（あるいは複素数）による乗法が定義され，普通これらの演算がみたすような諸規則がこの場合にも成り立つとき，これらの元の集合は線形空間をなすという．線形空間の例としては，n 次元 Euclid 空間におけるベクトルの全体，有限次元空間のある点集合上で与えられた連続（あるいは可積分）関数の全体，ある種の関数の集合の上に定義された汎関数の全体などがあげられる．線形空間の抽象的理論には，その元の具体的な性質は無関係である．

線形空間の厳密な定義を与えよう．

元 $u, v, w, \cdots$ の集合 Ω は，次の条件をみたすとき線形空間とよばれる：――

I．Ω には可換かつ結合的な加法が定められている．すなわち，集合 Ω の任意の二つの元 u, v に対して一意的に第三の元 $u+v$ が定まり，これについて，

Ia.　$u+v=v+u$;

Ib.　$u+(v+w)=(u+v)+w$;

Ic.　任意の u と v に対して両者に依存する元 x が存在して $u+x=v$ となる．この x を $v-u$ と記す．

条件 Ic は次の二つの条件がともに成り立つことと同等である：

Ⅰc. 1. 元 $0 \in \Omega$ が存在して，すべての $u \in \Omega$ に対して

$$u+0=u.$$

Ⅰc. 2. 各 $u \in \Omega$ に対して〈逆〉元 $(-u)$ が存在して

$$u+(-u)=0$$

Ⅱ. 空間 Ω の元には数 $\lambda, \mu, \cdots$ との乗法が定められており，それについて：

任意の $u \in \Omega$ に対し，

Ⅱa. $1 \cdot u = u$； Ⅱb. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu) u.$

Ⅲ. 加法および数との乗法の演算は分配法則を通じて関連している：

Ⅲa. $(\lambda+\mu) u = \lambda u + \mu u$； Ⅲb. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v.$

問題 1.1.1 条件 Ic が条件 Ic. 1 と Ic. 2 を合わせたものに同等であることを証明せよ．

問題 1.1.2 上の公理から，次の 1) と 2) が導かれることを証明せよ．
1) $0 \cdot u = 0$； 2) $(-1) \cdot u = (-u).$

もし Ω において実数とだけしか乗法が定義されていないならば Ω を実空間といい，任意の複素数との乗法が定義されているならば複素空間という．以後この本でおもに扱うのは複素線形空間である．

Ω 上の実関数 $p(u)$ は，次の性質をもつときノルムとよばれる：

a) 任意の数 λ に対して $p(\lambda u) = |\lambda|\, p(u)$ (正値同次性)，

b) $p(u+v) \leqslant p(u) + p(v)$ (三角不等式，あるいはノルムの凸性)，

c) $p(u) = 0$ ならば $u = 0$ (逆は a) から導かれる)．

条件 a) と b) とからノルムの非負値性が導かれる：

$$0 = p(u-u) \leqslant p(u) + p(-u) = 2p(u).$$

条件 a) と b) をみたす［しかし，c) をみたすとは限らない］関数を《セミ・ノルム》という．

Ω にノルム p が与えられると，Ω の任意の二つの元 u と v との距離を $p(u-v)$ と定義することができる．列 $(u_1, \cdots, u_n, \cdots)$ が u に収束するとは，$n \to \infty$ のとき u_n と u との距離が 0 に近づくこと，すなわち $\lim\limits_{n\to\infty} p(u_n - u) = 0$ のこととしよう．このように定められた収束を《ノルム収束》あるいは《強収束》という．線形空間 Ω で，収束がノルム $p(u)$ で定義されているとき，《ノルム空間》という，元 u の ノルムを $\|u\|$ で表わす．

ノルム空間 Ω の元の列 $\{u_n\}$ が《基本列》であることを，任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号

$N(\varepsilon)$ が選べて，$n>N(\varepsilon)$ かつ $m>N(\varepsilon)$ なら $p(u_n-u_m)<\varepsilon$，すなわち $\lim_{\min(m,n)\to\infty} p(u_n-u_m)=0$ となることとする．基本列はときに自分自身に収束する列とも Cauchy 列ともよばれる．$u\in\Omega$ に収束する列 $\{u_n\}$ が基本列であることは容易にわかる．しかし，逆は必ずしも真ではない．ノルム空間は，どの基本列も常にその空間のどれかの元に収束するというとき《完備》であるといわれる．完備なノルム空間を《Banach 空間》とよぶが，任意のノルム空間は完備化して Banach 空間にできるという定理がある（[10]参照）.

ここで，ノルム空間のいくつかの例をあげておこう．

1) Hilbert 空間．複素線形空間 $\mathscr{H}$ にスカラー積が定められているとしよう．すなわち，空間 $\mathscr{H}$ の任意の二つの元 u と v に対して，次の条件をみたす複素数 (u,v) が定められているとする：

a) λ_1 と λ_2 を複素数とし u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 を $\mathscr{H}$ の元とするとき，

$$(u, \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) = \lambda_1(u, v_1)+\lambda_2(u, v_2),$$
$$(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2, v) = \bar{\lambda}_1(u_1, v)+\bar{\lambda}_2(u_2, v),$$

ここで棒線は複素共役を表わす；

b) $(u,v)=\overline{(v,u)}$；

c) $(u,u)\geqslant 0$，もし $(u,u)=0$ ならば $u=0$.

スカラー積の定義された空間では《ベクトル》u のノルムを

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} \tag{1.1.1}$$

によって定義することができる．これがノルムに対するすべての要求 a）～ c）をみたし確かにノルムを定義することになるのは容易にわかる．スカラー積の定義された完備な空間を《Hilbert 空間》という．

たとえば，区間 $[a,b]$ 上で二乗可積分な実一変数関数 $f(x)$ の全体は Hilbert 空間となる．この空間を $\mathscr{L}_2([a,b])$ と記す．ここでのスカラー積は，

$$(f,g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x)\,dx \tag{1.1.2}$$

によって定義される．

実 n 次元 Euclid 空間 R_n は実 Hilbert 空間の自明な例である．この空間での二つのベクトル x と y とのスカラー積は，おなじみの公式

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

で定義される．

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ が 可算個の完全正規直交系 $e_1, \cdots, e_n, \cdots$; $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ をもつならば，$\mathscr{H}$ を《可分》であるという．空間 $\mathcal{L}_2([a,b])$ は可分である．

2) 区間 $[a,b]$ 上の連続関数の空間 $C([a,b])$ は，ノルムを

$$p(u) = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|$$

とするとき，ノルム空間の別の例になる．

問題 1.1.3 a) 空間 $C([a,b])$ におけるノルム収束は一様収束と一致すること，b) 空間 $C([a,b])$ は完備であることを示せ．

3) 次の例として，実 n 変数 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ の複素数値関数で σ 階まで含めて連続な偏導関数をもち，かつ無限遠で偏導関数とともに $|x|^{-\rho}$ より速く減少する関数の空間 $C(\rho,\sigma;n)$ を考えよう．つまり，$C(\rho,\sigma;n)$ に属する関数に対して積

$$x^\alpha D^\beta u(x) \qquad (|\alpha| \leqslant \rho, |\beta| \leqslant \sigma) \tag{1.1.3}$$

がすべて有界とするのである．

この空間 $C(\rho,\sigma;n)$ におけるノルムを

$$p_{\rho\sigma}(u) = \max_{\substack{|\alpha|\leqslant\rho \\ |\beta|\leqslant\sigma}} \sup_{x\in R_n} |x^\alpha D^\beta u(x)| \tag{1.1.4}$$

によって定義する．この空間 $C(\rho,\sigma;n)$ は一般関数の理論で重要な役割を演ずるものである．

1.2. 線形汎関数と共役空間

線形空間 Ω 上で定義された数値関数を《汎関数》という．

汎関数 $F(u)$ が線形であるとは，任意の $u, v \in \Omega$ と任意の数 α, β とに対して，

$$F(\alpha u+\beta v) = \alpha F(u)+\beta F(v) \tag{1.1.5}$$

の成り立つこととする．ノルムは非線形な汎関数の例である．ある区間の可積分な関数の空間上で，定積分は線形汎関数である．

汎関数 $F(u)$ が《連続》であるとは，列 $\{u_n\} \in \Omega$ が $u \in \Omega$ に収束することから，列 $\{F(u_n)\}$ の $F(u)$ への収束が導かれることとする．この連続性の定義は明らかに空間 Ω における収束の定義に依存している．つまり，位相によって内容が変わるものである．特に Ω における収束がノルム $p(u)$ で定義されているならば，すなわち Ω がノルム空間ならば，線形汎関数 $F(u)$ は，なにか正数 C_F が存在して，不等式

$$|F(u)| \leqslant C_F p(u) \tag{1.1.6}$$

がすべての $u \in \Omega$ に対して成り立つとき，そしてそのときに限り連続である．この不等

式が成り立つことを汎関数 F は有界であるという. つまり有界な線形汎関数は連続なのである. これからは常に連続線形汎関数ばかりを扱うから, 簡単のために, それを単に線形汎関数とよぶことにしよう.

ノルム空間 Ω 上の線形汎関数の全体がまた線形空間となるので, これを Ω に共役な空間とよび, Ω^* と記す. Ω^* においても, また

$$p^*(F) = \sup_{p(u)\leq 1} |F(u)| \tag{1.1.7}$$

によりノルムが定義できる. $p^*(F)$ は不等式 (1.1.6) が成り立つような定数 C_F のうちで最小のものである.

ノルム空間 Ω の共役空間 Ω^* は, ノルム (1.1.7) によって定義された収束により完備なノルム空間となる. これは空間 Ω が完備であるか否かにはよらない.

次の 1.3 節では, いくつもの異なった収束の定義を備えた空間 Ω やその共役空間を知るであろう.

共役空間の例を二つ三つ検討しよう.

1) Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ とその共役空間 $\mathscr{H}^*$ Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の線形汎関数の例としては, まず, 勝手な固定した元 v とのスカラー積が考えられる:

$$F(u) = (v, u) \qquad (v \in \mathscr{H}). \tag{1.1.8}$$

実は $\mathscr{H}$ のすべての連続線形汎関数が (1.1.8) の形に書けてしまう (Riesz の定理) ことが証明できる. 従って空間 $\mathscr{H}^*$ は空間 $\mathscr{H}$ と同型である. その上, 汎関数 F のノルム $\|F\|^*$ は対応する v のノルム (1.1.1) に等しい, $\|F\|^* = \sqrt{(v, v)}$ (たとえば [10] の第3章§3を参照).

Hilbert 空間とは限らない一般の空間 Ω の上の線形汎関数でも, (1.1.8) のまねをしてスカラー積の形

$$F(u) = (f, u) \tag{1.1.8 a}$$

に書くこともあるが, この場合この f が Ω の元であるわけではない.

2) 1.1 節で定義された空間 $C([a, b])$ の共役空間 $C^*([a, b])$ は, Stieltjes 積分の形をした汎関数

$$F(u) = \int_a^b u(x)\, d\varphi(x) \tag{1.1.9}$$

からなる. ただし $\varphi(x)$ は有界変動関数である. (Riesz の定理, [10] の第2章§6と第4章§3を参照). 汎関数 F のノルムは関数 φ の全変動に等しい:

$$p^*(F) = V_a^b\varphi(x).$$

汎関数 F が《正》であるとは，任意の非負値関数 $u(x)\in C([a,b])$ に対して $F(u)\geqslant 0$ であることとする．$C([a,b])$ 上の任意の正の汎関数は，単調非減少関数 $\varphi(x)$ を用いて (1.1.9) の形に表わせるという定理も F. Riesz による．後に，この定理の多次元への一般化も必要になるが，そのときには μ を多次元空間の測度として $d\varphi(x) = d\mu$ とする(たとえば [11] を参照)．

共役空間の簡単な性質を次に述べよう．

[補題 1.1.1] ノルム p_1 と p_2 を持つノルム空間 Ω_1 と Ω_2 に対して，$\Omega_2\subset\Omega_1$かつ $u\in\Omega_2$ のとき $p_1(u)\leqslant p_2(u)$ ならば，共役空間とそのノルムに関して反対の包含関係と反対の不等式が成り立つ．すなわち，$\Omega_1^*\subset\Omega_2^*$，かつ $p_1^*(u)\geqslant p_2^*(u)$．

問題 1.1.4 補題1.1.1を証明せよ．

線形汎関数の拡張定理というものが，共役空間の理論で重要な役割を演ずる．その説明をしよう．

[Hahn=Banach の定理] $\mathcal{U}$ をノルム p をもつノルム空間とし，$\mathcal{U}$ の任意の部分空間 $\mathcal{U}_0$ 上で，ある連続線形汎関数 F_0 が与えられているとする．そうすると，全空間にわたる連続線形汎関数 F が存在して，もとの $u\in\mathcal{U}_0$ に対しては $F(u)=F_0(u)$，$p^*(F) = p^*(F_0)$ となる．

この定理の証明といろいろの応用については，[10] の第4章§1と§2を参照せよ．

ここでは，Hahn=Banach の定理から任意の空でないノルム空間に0でない線形汎関数の存在することが導かれるという注意をするだけにしておこう．実際，そのような汎関数 F をつくって見せるには，ある要素 $u\in\Omega$ における任意であるが0でない F の値を与えれば十分である．なぜなら，上の定理により，その F は全空間 Ω 上に線形かつ連続な汎関数として拡張されるのだから——．

1.3. 可算ノルム空間とその共役空間

[定義 1] 同一の線形空間上に定義されたノルム $p_1(u)$ と $p_2(u)$ とが《両立》しているとは，どちらのノルムに関しても基本列である任意の列 $u_1,\cdots,u_n,\cdots,(u_n\in\Omega)$ が，一方のノルムにつき0に収束するならば他方のノルムについても同じく0に収束するときにいう．

問題 1.1.5 $C^{(1)}[a,b]$ を区間 $[a,b]$ 上の連続的微分可能な関数の空間とする．この空間において

ノルム $p_1(u)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|$ と $p_2(u)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|u(x)|+|u'(x)|\}$ とは両立するが，しかしノルム $p_1(u)$ と $p_3(u)=|u'(a)|+\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|$ とは両立しないことを示せ.

[定義 2]　線形空間 Ω において，互いに両立するノルムの増大列

$$p_1(u)\leqslant p_2(u)\leqslant\cdots\leqslant p_\sigma(u)\leqslant\cdots \tag{1.1.10}$$

が与えられているとする．空間 Ω は，収束が，〈列 $\{u_\nu\}\subset\Omega$ が元 $u\in\Omega$ に収束するとは，任意の σ に対して $\lim\limits_{\nu\to\infty}p_\sigma(u_\nu-u)=0$ となること〉と定義されているとき，ノルム系 $\{p_\sigma(u)\}$ に関する《可算ノルム空間》という．

厳密にいえば，可算ノルム空間 Ω における《位相》は次の基本近傍系により定義されるのである：まず正数 ε と自然数 σ との組により任意の元 $u\in\Omega$ の一つの近傍を

$$U_{\sigma\varepsilon}(u)=\{v;\ p_\sigma(v-u)<\varepsilon\} \tag{1.1.11}$$

と定める（この式 (1.1.11) は次のように読む——元 v は $p_\sigma(v-u)<\varepsilon$ ならば $U_{\sigma\varepsilon}(u)$ に属する)．空間 Ω に近傍系が与えられると，基本列あるいは収束列がどんなものであるか直ちに定義される．つまり，〈列 $\{u_\nu\}\subset\Omega$ が基本列であるとは 0 の任意の近傍 $U_{\sigma\varepsilon}(0)$ に対して数 $N=N(\sigma,\varepsilon)$ がとれて，$\nu>N,\ \mu>N$ のとき $u_\nu-u_\mu\in U_{\sigma\varepsilon}(0)$ となること〉とすればよい（詳しくは [12] を参照．そこでは線形位相空間における位相の一般的定義が与えられている)．完備な可算ノルム空間は《Fréchet 空間》となる（[山中]，第1章§4を見よ*)).

一般関数の理論で重要な役割を演ずる可算ノルム空間の例をあげておこう．

1)　空間 $\mathcal{D}(G)$．G を実 n 次元空間 R_n における有界領域（すなわち有界連結開集合）とせよ．R_n で無限に滑らかな関数（すなわち任意階数の偏導関数をもつ関数）のうち，領域 G の外で 0 になるもの[1]の集合を $\mathcal{D}(G)$ と記す．$\mathcal{D}(G)$ における可算ノルム系 q_σ を

$$q_0(u)=p_{00}(u)=\sup_x|u(x)|,\cdots,\quad q_\sigma(n)=p_{0\sigma}(u)=\max_{|\alpha|\leqslant\sigma}\ \sup_x|D^\alpha u(x)|,\cdots \tag{1.1.12}$$

で定義する．記号 $D^\alpha u(x)$ は (1.1.3) で定めたものである．

実一変数 x の無限に滑らかな関数のなかで，区間 $-a<x<a$ の外において 0 になるものの空間 $\mathcal{D}(a)$ は，空間 $\mathcal{D}(G)$ の一例になる．

問題 1.1.6　関数

$$u_a(x)=\begin{cases}\exp\dfrac{a^2}{x^2-a^2}, & -a<x<a\quad(a>0)\\ 0, & |x|\geqslant a\end{cases} \tag{1.1.13}$$

は空間 $\mathcal{D}(a)$ に属することを示せ.

---

*) 可算ノルム空間の完備性は，ノルム空間の場合と同じように定義される．すなわち，どの基本列もその空間のどれかの元に収束する場合にその空間を完備であるという．

1) 空間のある有界領域の外で 0 になる関数を《台が有界な関数》という．連続関数 $u(x)\neq 0$ となるような x の集合の閉包をその関数の台という．

2) 空間 $\mathcal{S}$ (あるいは $\mathcal{S}(R_n)$) は，実 n 次元空間 R_n における無限に滑らかな関数で，そのすべての偏導関数とともに $x\to\infty$ で $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{-1/2}$ の任意のベキよりも速く減少するもの (この条件を，すべてのノルム (1.1.4) が有限であると言い表わしてもよい) の全体からなる．$\mathcal{S}$ における収束は可算ノルム系

$$p_\sigma(u)=p_{\sigma\sigma}(u)=\max_{\substack{|\alpha|\leqslant\sigma\\|\beta|\leqslant\sigma}}\sup_{x\in R_n}|x^\alpha D^\beta u(x)| \qquad (\sigma=0,1,2,\cdots) \qquad (1.1.14)$$

で定義しよう．Hermite=Chebyshev 関数，あるいは一般にいって，P を任意の多項式として

$$P(x_1,\cdots,x_n)\exp\left(-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\cdots-\frac{x_n^2}{a_n^2}\right)$$

の形をしたすべての関数は，$\mathcal{S}$ の関数の例である．

ノルム系 (1.1.14) で定められる $\mathcal{S}$ の位相は，より多いノルム (1.1.4) の全体により定められる位相と同値である；すなわち，これらのノルム系の一方に関して $u_\nu(x)\to u(x)$ ならば，他方に関しても同じことが成り立つ．空間 $\mathcal{S}$ は，このように定めた位相に関して完備である．

空間 $\mathcal{S}$ は後に重要な役割を果たすであろう．

3) 空間 $\mathcal{S}(G)$ は，(一般に有界ではない) 領域 G の外で 0 になる $\mathcal{S}$ の関数の全体として定義される．$\mathcal{S}(G)$ での収束は，$\mathcal{S}$ におけると同様にノルム系 (1.1.14) により定義される．

$G=R_n$ でもよいとしよう．こうすれば空間 $\mathcal{S}$ は空間 $\mathcal{S}(G)$ の特別な場合となる．空間 $\mathcal{D}(G)$ は有界領域に対する $\mathcal{S}(G)$ 型の空間の特別な場合である．

これまでに例としてあげた可算ノルム空間は，次のような注目すべき性質をもっている——ノルム $p_{\sigma+1}$ に関して有界な任意の集合から，ノルム p_σ に関する基本列がとりだせる ([12] の第1章 §6，2節を参照)．この性質のおかげで空間 $\mathcal{D}(G)$ と $\mathcal{S}$ とは《完全》(perfect) となるのである ([12] の第1章 §6を見よ)．ただし完全な空間とは，その任意の有界閉集合が《コンパクト》であるものをいう*)．従ってある意味では無限次元ノルム空間よりは完全な可算ノルム空間の方が有限次元空間に似ているといえる．というのは，すべての有界閉集合がコンパクトとなるノルム空間は有限次元となってしまうから (Riesz の定理 [10] の第2章 2.9節，定理2を見よ)．空間 $\mathcal{D}(G)$ と $\mathcal{S}$ の例から明らかなように，可算ノルム空間では Riesz の定理は成り立たない．だから，この場合には可算個のノルムの導入が本質的であり，ノルムをひとつだけうまく選んで空間 $\mathcal{D}(G)$ と $\mathcal{S}$ とに前述の位相と同値な位相を入れることは不可能である ([12] の第1章 §3を参照)．

空間 $\mathcal{S}$ が集合論の意味で 1.1 節で定義された空間 $C(\rho,\sigma;n)$ の共通部分であることは

---

*) 完全な空間というとき，その空間は完備な可算ノルム空間としておく．この用語は Gelfand によるものである．完備な可算ノルム空間という条件がないときは，普通 Montel 空間という．

容易にわかる．空間 $\mathcal{S}$ をもっと別の空間列の共通部分として表わすのも便利なことである．たとえば，$\mathcal{S}_\sigma$ を $\mathcal{S}$ から《ノルム p_σ による完備化》をして得られる空間とせよ；つまり，$\mathcal{S}_\sigma$ は，σ 階微分可能な関数 $u(x)$ で，関数列 $\{u_\nu(x)\}\subset\mathcal{S}$ が存在して $\lim_{\nu\to\infty} p_\sigma(u-u_\nu)=0$ となるものの全体である．このとき，ノルム系(1.1.14)に対して不等式(1.1.10)が成り立つことから，

$$\mathcal{S}_0\supset\mathcal{S}_1\supset\cdots\supset\mathcal{S}_\sigma\supset\cdots \tag{1.1.15}$$

であり，$\mathcal{S}$ はこれらの空間の共通部分である：

$$\mathcal{S}=\bigcap_{\sigma=0}^{\infty}\mathcal{S}_\sigma. \tag{1.1.16}$$

空間 $\mathcal{S}_\sigma$ は空間 $C(\sigma,\sigma;n)$ と同じでないことに特に注意しよう．早い話，関数 $u(x)\equiv 1$ は $C(0,0;n)$ に属するが $\mathcal{S}_0$ には属さない．$\mathcal{S}_0$ のすべての関数は無限遠で0になるからである．容易にわかるとおり，包含関係 $\mathcal{S}_\sigma\subset C(\sigma,\sigma;n)$ が常に成り立つ．

上と同様，ノルム q_σ に関する空間 $\mathcal{D}(G)$ の完備化として空間 $\mathcal{D}_\sigma(G)$ が定義できる．一般に任意の完備な可算ノルム空間 Ω は，空間 Ω をノルム p_σ に関して完備化した完備なノルム空間 Ω_σ の共通部分として表わすことができる．

さて，可算ノルム空間における線形汎関数の研究に移ろう．

線形汎関数 $F(u)$ が Ω で連続であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して0の近傍 $U_{\sigma\delta}(0)$（この近傍では元 u に対して $p_\sigma(u)<\delta$）がとれて $U_{\sigma\delta}(0)$ で $|F(u)|<\varepsilon$ となることである．

ノルム空間の共役空間が，それ自身，完備なノルム空間となることは前に知った（1.2節）．しかし，可算ノルム空間 Ω の共役空間 Ω^* は，空間 Ω とは異なった構造をもつのである．空間 Ω^* の構造は，この場合，次のように記述できる：——

もし汎関数 $F(u)$ が0の近傍 $p_\sigma(u)<\delta$ で有界ならば，この関数はノルム $p_\sigma(u)$ に関して連続な汎関数である．すなわち不等式 (1.1.6) が成り立つ：

$$|F(u)|\leqslant Cp_\sigma(u). \tag{1.1.17}$$

この不等式が成り立つ最小の σ を汎関数 F の《階数》という．Ω^* の任意の汎関数は有限の階数をもつことがわかる．階数が σ を越えない連続線形汎関数の全体，すなわち，ノルム空間 Ω_σ 上で連続な線形汎関数の全体は，Ω^* のなかで Ω_σ の共役空間 Ω_σ^* を形成し，従ってそれ自身すでに完備なノルム空間となる．補題 1.1.1 により階数 σ の線形汎関数は，また，空間 $\Omega_{\sigma+1}^*, \Omega_{\sigma+2}^*, \cdots$ に属する．よって包含列

$$\Omega_1^*\subset\Omega_2^*\subset\cdots\subset\Omega^* \tag{1.1.18}$$

を得るが，実は，空間 Ω^* は完備なノルム空間 Ω^*_σ の合併である：

$$\Omega^* = \bigcup_{\sigma=1}^{\infty} \Omega^*_\sigma. \tag{1.1.19}$$

(1.1.7) によって Ω^*_σ で定義されたノルムにより，階数が σ の任意の汎関数 $F \in \Omega^*$ に対して，再び補題 1.1.1 を使い，不等式の列

$$p^*_\sigma(F) \geqslant p^*_{\sigma+1}(F) \geqslant \cdots \tag{1.1.20}$$

を得る．可算ノルム空間 Ω が，無限個のノルム空間の共通部分であるので，或る意味でノルム空間よりも狭いのに対して，空間 Ω^* は無限個のノルム空間の和であってノルム空間よりは広く，より多くの元をもつ．

二，三の例をあげておこう．

1) 可算ノルム空間 $\mathscr{D}(a)$ (14 頁参照) の共役空間 $\mathscr{D}^*(a)$ は

$$F(u) = \int_{-a}^{a} u^{(\sigma)}(x)\, d\mu(x) \tag{1.1.21}$$

の形の汎関数からなる．ここに $\sigma = 0, 1, 2, \cdots$ で，$\mu(x)$ は有界変動関数である ([12] の第 1 章 § 4，3 節を参照)．

2) 空間 $\mathcal{S}^*$ は

$$F(u) = \int_{R_n} f(x) D^\alpha u(x)\, d^n(x) \tag{1.1.22}$$

の形のすべての汎関数からなる．ここで D^α は (1.1.3) により定義され，$f(x)$ は緩増加連続関数である ([12] の第 2 章 § 4，2 節と 3 節を参照)．

可算ノルム空間の合併のつくる空間は可算ノルム空間によく似た性質をもっている．

位相が互いに両立している可算ノルム空間の増大列 $\Omega^{(1)} \subset \Omega^{(2)} \subset \cdots \Omega^{(i)} \subset \cdots$ を考えよう．すなわち，$\{u_n\} \subset \Omega^{(i)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と $i < k$ なる k につき，列 $\{u_n\}$ の $\Omega^{(i)}$ における元 u への収束は空間 $\Omega^{(k)}$ における同一の極限 u への収束と同値とするのである．

[定義 3] 空間 $\Omega = \cup \Omega^{(i)}$ が可算ノルム空間 $\Omega^{(i)}$ の帰納的極限であるとは，Ω における収束が次のように定義されていることである：Ω の元の列 $\{u_n\}$ が収束するとは，ある i_0 が存在して，すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して $\{u_n\} \subset \Omega^{(i_0)}$ となり，列 $\{u_n\}$ が空間 $\Omega^{(i_0)}$ で収束するとき，かつそのときに限っていう*)．

---

*) ここでは空間 Ω での点列収束を考えたのである．少し注意を述べると，Ω の位相という観点に立てば，これだけでは Ω の位相を定めたことにはならない．点の近づき方を見るのに可算個の点列を考えただけでは不十分な場合がある　近傍系の言葉でいうと，近傍系が可算個以上ある場合である．次に出てくる $\mathscr{D}$ も非可算近傍系をもつ．ただし，この本では点列収束しか問題にしていないから上の定義で十分であろう．

一例として，$\mathcal{D}$ を n 変数 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の関数で無限回可微分かつ台が有界なものの集合として定義しよう．関数列 $u_1,\cdots,u_k,\cdots$ が $\mathcal{D}$ で収束するとは，あるひとつの有界領域 G があり，その外ですべての関数 u_k が 0 になり，かつ列 $\{u_k\}$ が可算個のノルムの系 (1.1.12) に関して $\mathcal{D}(G)$ で収束することとする．そこで：——

問題 1.1.7 空間 $\mathcal{D}$ は可算ノルム空間 $\mathcal{D}(G_i)$ の系の合併であることを示せ．ここに G_i は球：$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}<i$ である[1]

可算ノルム空間の合併となる空間の他の重要な例を第2章で紹介する．

可算ノルム空間 Ω の共役空間 Ω^* において，二つの異なる方法により位相を，従ってまた収束を導入することができる．

まず，Ω^* での《強位相》は次の近傍系により定義される：不等式，

$$p_1(u)\leqslant A_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ p_\sigma(u)\leqslant A_\sigma,\ \cdot\cdot\cdot \tag{1.1.23}$$

をみたすような元 u の有界集合を一般に A と書き表わす（$A_1,\cdots$ は任意に変えてよい）．Ω^* の《0の強基本近傍》は，有界集合 $A\subset\Omega$ と正数 ε とをきめたとき，

$$\sup_{u\in A}|(f,u)|<\varepsilon \tag{1.1.24}$$

となる $f\in\Omega^*$ の全体として定義される．

Ω^* での《弱位相》は0の弱近傍により定義されるが，《0の弱基本近傍》は空間 Ω の任意の有限集合 $u_1,\cdots,u_m$ と正数 ε とをきめたとき，

$$|(f,u_1)|<\varepsilon,\ \cdot\cdot\cdot,\ |(f,u_m)|<\varepsilon$$

となる $f\in\Omega^*$ の全体として定義される．

ノルム空間の理論では対応するもののない次の定理が完全空間の理論において重要な役割を果たす．

［**定理**］完全空間 Ω の共役空間 Ω^* において，強位相と弱位相とは一致し，Ω^* はこの同一の位相に関し完備である[*]．

この定理の証明はしない．（[12] の第1章 §5，6節を参照）．

以後われわれがおもに取り扱う $\mathcal{S}^*(G)$ 型の空間においては，上の定理により，点列収束が次の互いに同値な二つの仕方で定義できる：

1)　もし任意の $u\in\mathcal{S}$ に対し，$(f_n,u)\to(f,u)$ ならば，$f_n\to f\in\mathcal{S}^*$．または，

2)　負でない整数 σ が存在して，すべての $f_n\in\mathcal{S}_\sigma^*$，$f\in\mathcal{S}_\sigma^*$ で，$p_\sigma^*(f_n-f)\to 0$ ならば，$f_n\to f$.

最後に，完全な可算ノルム空間の合併は完全空間であり，この合併に対しても上の定理が成り立つことを注意しておく[**]．

---

[1] 空間 $\mathcal{D}$ は可算ノルム空間ではない．

[*] すでに前の訳注（p. 17 を参照）で述べたように，この本では点列収束だけに念頭においている．従ってこの定理も次のように読む：
［**定理**］ 完全空間 Ω の共役空間 Ω^* において，強位相と弱位相とは点列収束に関して一致し，Ω^* は点列的にはこの二つの位相に関し完備である．

[**] 以後 $\mathcal{S}^*$ における位相は弱位相を考えることにする．なお完全な可算ノルム空間の合併というとき，この合併の意味は定かでない．帰納的極限の意味にとると，合併空間は完備な Montel 空間となり，上記の定理が成り立つ．$\mathcal{D}$ がその一例である．

1.4. 核定理．核型演算子と核型空間

これから空間 $\mathcal{S}$ のある特性を簡明に述べるが，それは $\mathcal{S}$ を Hilbert 空間，または一般にノルム空間から本質的に区別し，同時にある程度まで空間 $\mathcal{S}(G)$ が《良い性質をもつ》こと，つまり応用上便利であるという長所を生み出すものである．この特性には二つの同等な方法により達することができる：ひとつは $\mathcal{S}$ 上の連続双線形汎関数の一般形を研究することであり，もうひとつは空間 $\mathcal{S}$ を共役空間 $\mathcal{S}^*$ に写す線形演算子*)を考察することである．

汎関数 $B(\varphi, \psi)$ が《双線形》であるとは，それが変数 φ と ψ に関し一方を固定したとき線形であることとする．もし φ と ψ とが有限次元空間におけるそれぞれ k 階，m 階のテンソルならば，つまり $\varphi = (\varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k})$，$\psi = (\psi_{j_1 j_2 \cdots j_m})$ ならば，任意の双線形汎関数 $B(\varphi, \psi)$ は，

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_m} b_{i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_m} \varphi_{i_1 \cdots i_k} \psi_{j_1 \cdots j_m} \tag{1.1.25}$$

の形に表わされる．ただし，肝心なのは $b_{i_1 \cdots j_m}$ が同じ有限次元空間における $k+m$ 階のテンソルであるという点である．Hilbert 空間の理論では，この簡単で重要な定理に対応するものはない．このことを k 変数二乗可積分関数の空間 $\mathcal{L}_2(R_k)$ の例で説明しよう．この場合，$k = m$ として (1.1.25) に対応する式を書くなら

$$\begin{aligned} B(\varphi, \psi) = \int_{R_{2k}} \cdots \int dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_k \varphi(x_1, \cdots, x_k) \\ \times \psi(y_1, \cdots, y_k) K(x_1, \cdots, x_k ; y_1, \cdots, y_k) \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

であるが，ここで核関数 $K(x_1, \cdots, x_k ; y_1, \cdots, y_k)$ は，有限次元の場合との対応からいえば，空間 R_{2k} で二乗可積分でなければならない．しかし，実際には $\mathcal{L}_2(R_k) \times \mathcal{L}_2(R_k)$ 上の任意の双線形汎関数が (1.1.26) で表わされることは望むべくもない．たとえば，最も簡単な連続双線形汎関数

$$L(\varphi, \psi) = \int_{R_k} \cdots \int dx_1 \cdots dx_k \varphi(x_1, \cdots, x_k) \psi(x_1, \cdots, x_k)$$

は，核関数が二乗可積分でないから，(1.1.26) の形にはならないのである．

ところが，空間 $\mathcal{S}(G_n)$ においては (1.1.25) に対応する式が双線形汎関数の一般形を与えるのである．厳密にいえば，次の定理が成り立つ．

［核定理］ $\varphi(x) = \varphi(x_1, \cdots, x_k)$ が空間 $\mathcal{S}(G_k)$ に属し，$\psi(y) = \psi(y_1, \cdots, y_m)$ が

*) operator に対して，今日，数学では作用素，物理では演算子というふうに違った訳を用いている．ここでは，本書の性質を考慮して演算子に統一した．

空間 $\mathcal{S}(G'_m)$ に属するとせよ．ここに G_k と G'_m とはそれぞれ k 次元，m 次元の領域である．そのとき，各変数について連続な任意の双線形汎関数 $B(\varphi,\phi)$ は，

$$B(\varphi,\phi) = (F, \varphi(x)\phi(y)) \tag{1.1.27}$$

の形に表現される．ここに F は $\mathcal{S}^*(G_k \times G'_m)$ の元，すなわち積領域 $G_k \times G'_m$ ($x \in G_k$, $y \in G'_m$ のとき $(x, y) \in G_k \times G'_m$ と定義する) で与えられた $k+m$ 変数関数の空間上の線形汎関数である．汎関数 F は B により一意的に定まる．

読者には文献 ([13] とか Schwartz (1952) とか) をお勧めすることにして，ここでは，この定理の証明はしない．

(1.1.27) は，また，$\mathcal{S}(G_k)$ を $\mathcal{S}^*(G'_m)$ に写す連続線形演算子の一般形を与えていると解釈することもできる．そうした演算子 A の行列要素は

$$(A\varphi, \phi) = (F, \varphi(x)\phi(y)) \tag{1.1.28}$$

の形になるからである．

核定理が成り立つ線形位相空間の類は，解析で重要な役割を演ずる．このような空間は《核型》といわれる．

ここで核型可算ノルム空間の厳密な定義を与えよう．

完備なノルム空間 Ω_n の減少列の共通部分として可算ノルム空間 $\Omega = \cap \Omega_n$ を考えよう．$n > m$ につき Ω_n を Ω_m に埋め込む演算子を T^n_m とする (これは Ω_n の各元 φ に同じ φ を対応させるが，それを別のノルムをもつ空間 Ω_m の元とみなすわけである)．

[定義 4]　可算ノルム空間 Ω が核型であるとは，任意の m に対して適当な $n > m$ が見つけられて，Ω_n を Ω_m に埋め込む演算子 T^n_m が，

$$T^n_m \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (F_k, \varphi)\phi_k \tag{1.1.29}$$

の形になることとする．ここに $\varphi \in \Omega_n$, $F_k \in \Omega^*_n$, $\phi_k \in \Omega_m$ であり，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^*_n(F_k)\, p_m(\phi_k) \tag{1.1.30}$$

は，収束する (このように (1.1.29)，(1.1.30) の性質をもつ演算子を一般に核型演算子という)．

すべての有限次元空間は，定義により核型とみなされる (すでに述べたように，有限次元空間における任意の双線形汎関数は (1.1.25) の形に表わされるから)．

核型空間の帰納的極限（定義3を参照）もまた核型空間である．

核型空間の性質について詳しくは [13]，Grothendieck (1955) および [14] を参照せよ．核型空間*)は完全（1.3節を参照）であり，従って，核型空間でもその共役空間でも強収束と弱収束とは一致する．さらに核型空間は可分，すなわち，いたるところ稠密な可算個の元の集合を含んでいる．

［定義 5］ 《数》列 $\{a_n\}$ が《急減少》であるとは，任意の $m>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} n^m a_n = 0$$

となることとする．すべての急減少数列がつくる空間に可算個のノルム系

$$p_m(a) = \sup|n^m a_n| \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{1.1.31}$$

による位相を入れたものを $\mathfrak{S}$ と記す．

問題 1.1.8 空間 $\mathfrak{S}$ が核型であることを示せ（ヒント：展開 (1.1.29) での汎関数 F_k として汎関数 $(F_k, a) = a_k$ を選び，$\phi_k = e_k = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$（$k$ 番目が 1）と定めよ．$p_m(e_k) = k^m$，$p_n^*(F_k) = 1/k^n$ を証明し，これから演算子 T_m^{m+2} が核型であることを導け）．

問題 1.1.9 $\mathcal{S}(R_n)$，$\mathcal{D}(G_i)$，$\mathcal{D}$（1.3節を参照）は核型であることを示せ（[13] を参照）．**)

1.5. Gelfand の三つ組

可算ノルム空間に比べれば，Hilbert 空間ははるかに日常化し，また伝統の力により，神聖化されているが，これまでの議論から明らかなように，その性質からいうなら $\mathcal{S}(G)$ のような可算ノルム空間のほうが有限次元空間に近く，従って，本質的にはより簡単である．この節では，空間 $\mathcal{S}$ とその共役空間 $\mathcal{S}^*$ とを同時に考察することが解析学や量子力学の問題によく適しており，実際に有利であることを説明しよう．量子力学でも解析学でも，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は普通〈性質の十分によい〉関数（たとえば，無限遠で減少している滑らかな関数）のある空間 Ω をスカラー積で定義されたノルムに関して完備化した結果として生ずるのであった．この経験的事実を，ここでは抽象的に定式化しよう．元が具体的に何であるのかには無関係に，空間 Ω と $\mathcal{H}$ の一般的性質だけを使って定式化を行なうのである．〈よい〉空間 Ω として何をとるべきかという問題の答は，一般に，与えられた課題に応じてちがってくる．相対論的量子力学の公理論的構成のためには（第2章～第4章を参照），非有界な場の演算子の任意個の積を考察することになるが，その目的には空間 Ω は核型とするのが好都合である．

さて，核型空間 Ω においてスカラー積，すなわち正定値エルミート形式（1.1節を参

*) 以後核型空間というとき，完備な核型空間としておく．
**) $\mathcal{D}$は可算ノルム空間ではない．核型空間の一般的な定義はたとえば [13] に見られる．

照) (u, v) が定義されていて，これは Ω での位相に関して連続であるとせよ．一般的にいうと空間 Ω はノルム

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{1.1.32}$$

による収束に関して完備とは限らない．つまり，列 $\{u_n\} \subset \Omega$ が存在して，

$$\lim_{n, m \to \infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

となる場合でも，その列 $\{u_n\}$ が空間 Ω のどの元にも収束しないことがある．しかし，空間 Ω はノルム (1.1.32) で定義された新しい位相に関して常に完備化できるのである．そのうえ，完備化によってえられる Hilbert 空間 $\mathscr{H} \supset \Omega$ は，同形なものは同じと見れば一意的にきまる．ところで，$\mathscr{H}$ 上の線形汎関数全体の空間 $\mathscr{H}^*$ が空間 $\mathscr{H}$ 自身に同形 ($\mathscr{H}^* = \mathscr{H}$) であることは前に見た (1.2節，例1)．一方，スカラー積が Ω の位相に関して連続なことにより，$\mathscr{H}^*$ の元なる汎関数は核型空間 $\Omega \subset \mathscr{H}$ 上の連続線形汎関数でもある．従って Ω 上の線形汎関数の全体の空間 Ω^* は，Hilbert 空間 $\mathscr{H}^* = \mathscr{H}$ より大きく，それを自身のなかに含む，$\Omega^* \supset \mathscr{H}$．こうした特質を備え，互いに包含関係にある空間の三つ組

$$\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^* \tag{1.1.33}$$

を全体として《Gelfand の三つ組》とよぶ*)．

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ を扱っていると，ついそれを完備化として得る基になった空間 Ω を忘れ，従ってまた，空間 $\mathscr{H}$ の自然な拡大でもある Ω^* を忘れてしまう．ところが，三つの空間の組 (1.1.33) を同時に考察することにすると線形演算子の一般論の建設や場の量子論のある種の問題の適切な定式化のための自然な基礎が得られるのである．

1.6. Gelfand の三つ組における線形演算子

ここでは，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ のある線形多様体 D_A の上で定義され，値域もこの空間からはみ出さない線形演算子 A を考察しよう：

$$u \in D_A \subset \mathscr{H} \Longrightarrow Au \in \mathscr{H}. \tag{1.1.34}$$

演算子 A が D_A で《有界》であるとは，$u \in D_A$, $\|u\| < 1$ のとき，ノルムの二乗

$$\|Au\|^2 = (Au, Au)$$

が u に対し一様に有界であることとする．u が D_A と単位球の共通部分を動くときの

*) оснащенное гильбертово пространство の訳．これには，まだ定訳がないようである．英訳は rigged Hilbert space, Gelfand triplet, Dirac space など，仏訳は triade hilbertienne となっている．すでに，[山中] は供付き Hilbert 空間と訳されており，他に三つ組 Hilbert 空間なども考えられるが，適訳が見つからず，とりあえず上のように訳した．

$\|Au\|$ の上限を《演算子 A のノルム》といい，$\|A\|$ で表わす：

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in D_A}} \|Au\|. \tag{1.1.35}$$

もし (1.1.35) の右辺の上限が無限大になるならば，演算子 A は《非有界》であるという．

定義域を $D_A \subset \mathcal{H}$ とする任意の有界演算子は，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 全体に拡大され，しかも，この拡大に際し，全空間 $\mathcal{H}$ 上で線形かつ有界で，前と同じノルム $\|A\|$ をもつようにできる（[10] の第4章 1.1 節を参照）．従って，有界演算子は $\mathcal{H}$ のいたるところで定義されているとしても一般性を失わないから，以後その定義域については特にいわないことにしよう．しかし，量子論において常に出会う非有界演算子についてはちがう．非有界演算子に対しては定義域の指定は極めて重要である．

この状況を明らかにするために演算子のグラフという概念を導入しよう．

演算子 A のグラフ $\Gamma(A)$ とは，$u \in D_A$ とその像 $Au \in \mathcal{H}$ との対 $\{u, Au\}$ 全体の集合である．演算子 A が《閉演算子》であるとは，そのグラフが $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 内の閉集合であることとする．全空間 $\mathcal{H}$ 上で定義された閉演算子は必然的に有界である（閉グラフ定理）．以後たいていは，閉じた非有界演算子か少なくとも閉演算子に拡大*)できるものを問題にするが，閉グラフ定理からして，そのような演算子は $\mathcal{H}$ 全体では定義され得ない．期待できるのは，せいぜい非有界閉演算子 A の定義域 D_A が $\mathcal{H}$ で稠密なことである．演算子 B が《演算子 A の拡大》である（$A \subset B$ と書く）とは，グラフ $\Gamma(A)$ がグラフ $\Gamma(B)$ に含まれる，つまり $D_A \subset D_B$ で，領域 D_A で $Au = Bu$ が成り立つこととする．

量子論にとって Hilbert 空間が重要である理由の一つは，スカラー積の存在によって，物理系の対称性を記述するユニタリ演算子という概念や観測量に対するエルミート演算子という概念の導入が可能となるところにある．

エルミート双一次形式 (v, Au) $(u \in D_A,\ v \in \mathcal{H})$ を考察しよう．もし，$\mathcal{H}$ のある元 v について

$$\text{すべての } u \in D(A) \text{ に対し，} |(v, Au)| \leqslant C(v, A)\|u\| \tag{1.1.36}$$

ならば（ただし $C(v, A)$ は u に依存しない正数とする），$\mathcal{H}$ での連続線形汎関数の一般形に関する Riesz の定理により，次のような元 $v_1 \in \mathcal{H}$ が存在する：

$$(v, Au) = (v_1, u). \tag{1.1.37}$$

---

*) 演算子の拡大についてはすぐ後に述べる．

もし領域 D_A が $\mathscr{H}$ で稠密ならば，ベクトル v_1 はベクトル v によって一意的に定まる．このときこの v に対し式 $A^*v=v_1$ によって――演算子 A の《エルミート共役》といわれる――線形演算子 A^* を定義しよう．演算子 A^* の定義域は (1.1.36) が成り立つすべてのベクトル $v\in\mathscr{H}$ からなる．

物理の本などでは，$v_1=A^*v$ を (1.1.37) に代入した式

$$(v, Au) = (A^*v, u) \tag{1.1.38}$$

をもって共役演算子の定義とすることが多いが，これでは A と A^* の定義域の指定がぬけてしまう．もっとも，こういう不正確ないい方も A が有界の場合は許される．なぜならこの場合にはすでに注意したとおり $D_A=\mathscr{H}$ と考えてよく，その上すべての $v\in\mathscr{H}$ に対して，条件 (1.1.36) が $C(v,A)=\|v\|\,\|A\|$ として成り立つことも容易にわかるから，実際に共役演算子 A^* が存在し，全空間 $\mathscr{H}$ 上で定義されるからである．非有界演算子の一般の場合，共役演算子*)は必ずしも存在しない．演算子 A に対して共役演算子が存在するための必要十分条件は，A が $\mathscr{H}$ で閉演算子に拡大可能なことである（[15] の第4章，4.6節を参照）．その意味するところは，$\{u_n\}$ が D_A の収束するベクトル列なら列 $\{Au_n\}$ は収束するか，さもなければ $\mathscr{H}$ に集積点をもたないということである（いいかえると，列 $\{Au_n\}$ の二つの部分列が $\mathscr{H}$ の相異なった極限に収束することはない）．この場合，演算子 A の閉拡大，より正確にいって最小閉拡大は A^{**} に等しい．

演算子 A が《対称》(物理学者の用語では《エルミート》) であるとは $A\subset A^*$，すなわち

$$u, v\in D_A \text{ に対し，} (Au, v) = (u, Av) \tag{1.1.39}$$

なることとする．$A=A^*$ のとき，すなわち条件 (1.1.39) の上に定義域 D_A と D_{A^*} の等しいことが加わるとき，演算子 A は《自己共役》(von Neumann の術語では超極大エルミート) であるといわれる．

問題 1.1.10 $\mathscr{H}=\mathscr{L}_2([0,1])$ を区間 $[0,1]$ で二乗可積分な関数の集合とする．いま，D をこの区間で絶対連続[1]（[10] の第2章，6.3節を参照）な関数 f で，その導関数が $\mathscr{H}$ に属し，周期的境界条件 $f(0)=f(1)$ を満足するものの全体とし，D_0 を領域 D の部分集合で，区間の境界で0になる，$f(0)=f(1)=0$，関数の全体とせよ．このとき，定義域を D とする演算子

---

*) 稠密な定義域をもつ共役演算子．

1) 絶対連続関数の定義とその最も簡単な性質に関しては，たとえば [10] の第2章6.3節と6.4節を参照せよ．おおざっぱにいって，関数 $f(x)$ が絶対連続であることは，$f(x)$ が局所可積分な関数の不定積分の形に表わされることである．

$$P = -\mathrm{i}\frac{d}{dx}$$

は，自己共役演算子であるが，しかし，その定義域を D_0 に限った演算子 P_0 は，対称であるにとどまり，自己共役ではないことを示せ．共役演算子 P_0^* の定義域 D_0^* を求めよ．演算子 P が非有界であることを直接に確かめよ．

全空間 $\mathscr{H}$ で定義され，値域も $\mathscr{H}$ に一致する演算子 U は，もしスカラー積を保存する

$$(Uf, Ug) = (f, g) \tag{1.1.40}$$

ならば《ユニタリ》であるといわれる．演算子 U の値域が $\mathscr{H}$ に等しいという要求は本質的である．もし，この要求を課さないならば，演算子 U を《等距離演算子》とよぶ．

問題 1.1.11 任意の等距離演算子のノルムは1に等しいことを示せ．

等距離演算子 U は，等式 $U^*U = 1$ により特徴づけられる．この等式から，一般には，$UU^* = 1$ は出てこない．もし両方の等式が成り立つならば U はユニタリである．

ユニタリ演算子と自己共役演算子についてはスペクトル分解定理が成り立つが，対称演算子については成り立たない(たとえば [15] の第6章を参照)．演算子のスペクトル理論は，ほとんどの数学の教科書において物理学者には不慣れな言葉で述べられている．その原因は，自己共役演算子がたとえ有界であったとしても，固有値として一般に離散スペクトルばかりか連続スペクトルをももち，一方，離散スペクトルの固有ベクトルだけが Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ に属するというところにある．Gelfand の三つ組が役に立つのは，〈連続スペクトルの固有ベクトル〉を Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の拡大 Ω^* に入れることにより物理学者たちにより親しい言葉で理論が語れるようになるからにほかならない．

上に述べたことを最も簡単な例によって説明してみよう．

Gelfand の三つ組

$$\mathcal{S}(R) \subset \mathcal{L}_2(R) \subset \mathcal{S}^*(R) \tag{1.1.41}$$

を考察しよう．ここに R は実軸 $-\infty < x < \infty$，空間 $\mathcal{L}_2$ と $\mathcal{S}$ とは1.1節と1.3節で定義されたものである．$\mathcal{L}_2$ に属する絶対連続関数で導関数が二乗可積分であるもの全体を定義域とする最も簡単な自己共役微分演算子 $P = -\mathrm{i}d/dx$ (量子力学の運動量演算子)は，$\mathcal{L}_2$ に属する固有関数をひとつももたない．たいていの量子力学の教科書では e^{ipx} が実の固有値 p に対応する固有ベクトルとよばれているけれども，$|e^{ipx}|^2 = 1$ は実軸の全体では積分できないから実は $\mathcal{L}_2(R)$ に属さない．自己共役演算子の固有ベクトル系の存在と完全性に関する定理は，微分演算子 P のような簡単で重要な演算子に対してさえ

も，その最も自然な形では適用されないのである（この定理が最も自然な形のまま適用されるのは離散スペクトルだけをもつ演算子に対してだけである）．ところが，問題の関数 e^{ipx} は明らかに線形汎関数の空間 $\mathcal{S}^*$ に属し，この空間において汎関数の完全系を形成する．実際§3に述べるように，$\mathcal{S}^*$ の任意の汎関数は，ましてや $\mathcal{L}_2$ の任意の関数は，演算子 P の〈固有関数〉e^{ipx} によって Fourier 積分に展開される．さらにこの展開は $\mathcal{L}_2$ のノルムに関して収束する．つまり，微分演算子 P は Gelfand の三つ組 (1.1.41) において固有関数の完全系をもつのである．それだけではない．演算子 P は $\mathcal{L}_2$ のスカラー積に関しては不連続であるが，$\mathcal{S}$ の位相に関しては連続であり，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ 自身に変換する．三つ組空間 (1.1.41) における微分演算子や積分など広範囲な演算子に対して，こうした〈良い〉性質はすべてそのまま成り立つ．

空間 (1.1.41) の例で示された状況は任意の Gelfand の三つ組に対して生ずるものである．しかし，一般定理を述べる前に次の定義をしておこう．

[定義 6] A は核型空間 Ω を Ω 自身に写す演算子であるとせよ．Ω^* に属する線形汎関数 F は，もし数 λ が存在して，Ω の元 φ のすべてに対して等式

$$F(A\varphi) = \lambda F(\varphi) \tag{1.1.42}$$

が成り立つなら，演算子 A の《一般化された固有ベクトル》とよばれる*)．

この定義6は，Ω を任意の線形位相空間としたときにもそのまま使えることは明らかである．

[定義 7] Ω を Ω に写し，Ω の位相に関して連続な演算子 U が Gelfand の三つ組 $\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*$ におけるユニタリ演算子であるとは，任意の元 $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$(U\varphi, U\psi) = (U^{-1}\varphi, U^{-1}\psi) = (\varphi, \psi) \tag{1.1.43}$$

が成り立つこととする．

実は，等式 (1.1.43) が Ω で成立することを要求すれば十分である．そうすれば $\mathcal{H}$ での成立は，結果として得られる．

空間 Ω を Ω に連続的に写す $\mathcal{H}$ の線形演算子 A が，Gelfand の三つ組 (1.1.33) における《自己共役演算子》であるとは，演算子 A の定義域 D_A の任意の二つの元 φ, ψ に対して

$$(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi) \tag{1.1.44}$$

---

*) λ を一般化された固有値という．

が成り立ち，さらに固定した φ と φ_1 に関しすべての $\psi \in D_A$ に対して $(\varphi, A\psi) = (\varphi_1, \psi)$ となるならば，$\varphi \in D_A$ が導かれ，従って $A\varphi = \varphi_1$ が成り立つこととする．

Gelfand の三つ組 (1.1.33) における任意の自己共役演算子 A は，式

$$(Af, \varphi) \equiv (f, A\varphi) \qquad (\varphi \in \Omega, \quad f \in \Omega^*) \tag{1.1.45}$$

により，全空間 Ω^* 上に拡大される．

Gelfand の三つ組におけるユニタリ演算子と自己共役演算子の一般化された固有ベクトル系の完全性について次の定理が成り立つ．

[定理 1.1.1] Gelfand の三つ組におけるユニタリ演算子は，絶対値が 1 の固有値 λ に対応する一般化された固有ベクトルの完全系*)をもつ．

Gelfand の三つ組における自己共役演算子は，実の固有値に対応する一般化された固有ベクトルの完全系をもつ．

この定理の証明は，[13] の第 1 章，§4. にある．

考えている演算子が空間 Ω を Ω 自身に写すという仮定は，一般化された固有ベクトルの定義 (1.1.42) が意味をもつために本質的である．しかし，次のより一般的な定義も可能である．

[定義 8] 汎関数 $F \in \Omega^*$ が，演算子 A の固有値 λ に対応する一般化された固有ベクトルであるとは，$\Phi(A)\varphi \in \Omega$ となる限りにおいて任意の $\varphi \in \Omega$ と任意の関数 Φ とに対して，等式

$$F(\Phi(A)\varphi) = \Phi(\lambda)F(\varphi) \tag{1.1.46}$$

の成り立つこととする．

この定義を用いて Kats (1960) は任意の自己共役演算子に対して一般化された固有ベクトルの完全系が存在することを証明した．

定理 1.1.1 の証明でもそうであるが，自己共役（あるいは，ユニタリ）演算子の関数の定義には，Hilbert 空間における自己共役演算子のスペクトル分解に関する次の古典的な定理が使われる．

[定理] それぞれの自己共役演算子 A に次の性質をもつスペクトル分解演算子(《単位の分解》) $E(\Delta)$ が対応する，ただし，Δ は実軸 λ 上の半開区間である：

1) $E(\Delta)$ は自己共役射影演算子(《スペクトル射影》)であり，$E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$；

2) $\lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) = 0$，ここに $E(\lambda) = E(-\infty, \lambda]$；

3) もし $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, $\Delta_i \cap \Delta_k = \varnothing \ (i \neq k)$ ならば，$E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$；

4) $f \in D_A$ ならば，

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda) f. \tag{1.1.47}$$

自己共役演算子 A の関数 $\Phi(A)$ は公式

$$\Phi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) dE(\lambda) \tag{1.1.48}$$

により定義される．ユニタリ演算子の場合には (1.1.47) の代わりに

---

*) Ω^* のベクトルの集まり Σ が完全系をなすとは，$\varphi \in \Omega$ に関して任意の $f \in \Sigma$ に対し $(f, \varphi) = 0$ ならば $\varphi = 0$ となることである．

$$Uf=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda}dE(\lambda)f \tag{1.1.49}$$

が成り立つ．

ここで一つの問題が起こる：Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が与えられたとき，その $\mathcal{H}$ は Gelfand の三つ組に常に挿入され得るであろうか，すなわち，$\mathcal{H}$ に稠密に分布する核型空間 Ω を見つけて，$\mathcal{H}$ でのスカラー積が Ω の位相に関して連続となるようにできるだろうか？ ということは，つまり空間 Ω を見つけて三つ組空間 $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ が Gelfand の三つ組となるようにできるかという問題である．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が可分のとき，この問題に対する答えは肯定的であることを示そう．この際，空間 Ω はいく通りもの仕方で選ぶことができるが，いまその一例を示す：$e_1,\cdots,e_n,\cdots$ を $\mathcal{H}$ における完備な正規直交系とせよ．このとき任意の $f\in\mathcal{H}$ は，

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n \tag{1.1.50}$$

の形に書けて，級数 $\sum_n|a_n|^2$ は収束し (f,f) に等しい．逆に級数 $\sum_n|a_n|^2$ が収束すると，$f\in\mathcal{H}$ である．ところが，$\mathfrak{S}$ を急減少数列の空間（定義5を参照）とすると，等式（1.1.50）は核型空間 $\mathfrak{S}$ と $\mathcal{H}$ における稠密なベクトルの集合 Ω との同形を与えていると読むことができる．そして，Ω でのスカラー積が可算ノルム系（1.1.31）により定義された位相に関して，連続であることは容易に証明できるのである*)．

§ 2.　一般関数とその演算

2.1.　線形汎関数による一般関数の定義

古典的な関数概念では，変数のとりうるすべての値にわたって関数なるものの値を定め，これによって関数が与えられたとする．しかし，こういう考えの限界は，数学自身のなかでも，また物理の世界において早くから気づかれていたのである．

古典物理学の重要な諸概念，たとえば，密度分布にしても質点や点電荷の場合はこういう既成の関数概念の枠には収めきれなかった．さらに量子力学や場の量子論ともなれば，

---

*) 本書では核型空間 Ω というとき，Ω は可算ノルム空間とした．実は完備な核型可算ノルム空間 Ω は可分となり，従って，そのような Ω に対する Gelfand の三つ組 $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ を考えると，$\mathcal{H}$ は必然的に可分となる．だから，$\mathcal{H}$ が可分でないときには，Ω は広い意味での核型空間とでもいって区別したほうがよい．なお，この問題に関連していえば，定理1.1.1の今日までに知られている証明は $\mathcal{H}$ が可分の場合である．

Dirac の δ-関数とか $D(x)$ などの〈特異な〉いわば〈変格な〉関数が系統的に使われはじめた．

いわゆる交換関係は量子論で基礎的な役割を演ずるが，まさにこれと結びついて登場するのが $D(x)$ などの《関数》にほかならない．

また，数学自身においても，古典的な関数概念の狭さはいろいろな場面において感じられていた——たとえば双曲型の方程式（特に波動方程式）に対して Green 関数を定義しようとするときに，あるいは，演算子の連続スペクトルに対応する固有関数を規格化しようとするときに，等々である．

δ-関数のように，古典的な関数概念から見れば矛盾のかたまりのようなものの使用を，物理学者が正当化する方法は二つあった．第一に彼らはいう——特異関数は常に〈良い性質をもつ〉関数との積で考え，必ずその積の積分の規則を与えなさい，そうすれば得られた結果には意味がある，と．第二には，普通の滑らかな関数の列のある意味における極限として特異関数を表現する方法であった．この二つは特異関数の使用の根拠としては直観的なものであるが，最近二十年のあいだに数学的に厳密な裏付けを得た．従って今日でも一般関数の厳密な理論の出発点として役に立つのである[1]．

厳密な定式化の第一として，まず一般関数を汎関数として定義することから始めよう．この定義については，すでに§1で触れておいた．第二の方法による厳密な定義を 2.2 節で与える．

[定義 9] 1.3 節で定義された可算ノルム空間 $\mathcal{S}$ 上の任意の連続線形汎関数，つまり空間 $\mathcal{S}^*$ の任意の元を《一般関数》という．空間 $\mathcal{S}$ に属する関数を《基礎関数》とよぶ．

《一般関数》という呼び名を正当化するために，普通の可積分関数は一般関数の特別な場合であることを証明しておこう．実際，無限遠で何かある多項式よりは速く増加せず空間 R_n の任意の有界領域で絶対値が可積分な関数 f なら，どれでも公式

$$F(u)=\int_{R_n}\bar{f}(x)\,u(x)\,dx\equiv(f,u) \qquad (1.2.1)$$

---

[1] Schwartz の本 [17] が出版された後，なお，物理学の教科書が〈δ-関数は，原点以外ではいたるところ 0 で，$\delta(0)=\infty$ となり，$\int\delta(x)dx=1$ である〉といった定義をしているのは，時代錯誤である．そうした定義は単に習慣の力によるものとしかいいようがない．そんな素朴な観点からではだいたい δ-関数の導関数さえ理解できないということに注意しよう．

により確かに空間 $\mathcal{S}$ 上の連続線形汎関数 F を与える．ただし f の上の棒線は複素共役を表わす[1]．

いま述べた性質をもつ関数 f は緩増加局所可積分関数といわれる．二つの局所可積分関数はもしそれらが Lebesgue 測度 0 の集合でしか違わないなら，つまり〈ほとんどいたるところで一致する〉（[10] の第2章を参照）ならば同一視することにしよう．こう約束すると対応 $f \to F$ は一対一になる．つまり汎関数 $F(u)$ の $\mathcal{S}$ における値を知って逆に関数 $f(x)$ をほとんどいたる所で再生することができるわけである．以後このような〈関数型の〉汎関数 $F(u)$ とそれを生ぜしめる関数 $f(x)$ とを同一視しよう．

しかし，$\mathcal{S}^*$ のどの汎関数も普通の局所可積分関数 $f(x)$ により (1.2.1) のような積分の形に書き表わされるわけでは決してない．δ-関数

$$(\delta, u) = u(0) \tag{1.2.2}$$

は (1.2.1) の形に表わされない汎関数の最も簡単な例である．ただし（　，　）は汎関数の (1.1.8 a) で定めた記号で，(1.2.2) が積分の形に書けないことを見るため，なにかを局所可積分関数 $f(x)$ があって，任意の基礎関数 $u(x)$ に対して等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\, u(x)\, dx = u(0)$$

が常に成り立つと仮定してみよう．特に，$u(x)$ を (1.1.13) の $u_a(x)$ に選ぶと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\, u_a(x)\, dx = e^{-1}$$

を得るが，$a \to 0$ で左辺の積分は 0 に収束し，右辺に矛盾する．

われわれは，しかし，局所可積分な普通の関数ではない一般関数に対しても (1.2.1) を記号的な表記として利用することにしたい．

一般関数の概念は，明らかに，基礎関数のための最初の線形位相空間の選び方による．たとえば，$\mathcal{S}$ の代わりに $\mathcal{D}(G)$ を基礎空間とすることもできたわけだし，また Schwartz [17] の一般関数は台が有界で無限回微分可能な関数全体の空間 $\mathcal{D}$ 上の連続線形汎関数として定義されたのだった（$\mathcal{D}$ は領域 G を動かしたときの空間 $\mathcal{D}(G)$ の合併である．1.3 節の例を参照）．この本では，$\mathcal{S}^*$ に属する汎関数を《一般関数》とよぶことにし，もし必要が生じたら $\mathcal{D}^*$ に属する汎関数を超関数[2]とよぶことにしておこう．容易にわかるとお

---

1) もちろん，汎関数の定義として，$\bar{f}(x)$ の代わりに関数 $f(x)$ 自身をおいた積分をとってもよかったのである．われわれの選んだ定義は，f と u が同一の空間に属するとき，(1.2.1) の積分がちょうどスカラー積になる点で具合がよい．

2) распределение＝分布（超関数）はフランス語 distribution（Schwartz の術語）との類似によるものである．Schwartz は $\mathcal{S}^*$ に属する一般関数を緩増加超関数——distribution tempérée とよび，Gelfand と Shilov [12, 18] はそれらを緩増加な一般関数とよんでいる．

り，任意の一般関数は超関数であるが，逆は正しくない．つまり $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{D}^*$ である．一変数でいうと，普通の関数 e^x は一般関数ではない超関数の例になる．

一般関数が特定の可算ノルム空間（あるいはそうした空間の合併）の上の連続線形汎関数と定義されることから，一般関数の微分を連続演算子として定義することが可能になる (2.2 節を参照)．この本で基礎関数の空間として $\mathcal{S}$ を選ぶのは，何よりも空間 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^*$ とが Fourier 変換によりそれぞれ自分自身にうつる (3.1 節を参照) ことによっているのである．これは量子力学における x 空間と p 空間の対称性の自然な反映になる．

なにかある集合の各点で定義されている普通の関数とちがい，一般関数は基礎関数の空間上の汎関数として全局面で与えられるのであって，一般には，個々の点で定まった値をもっているのではない．それでも，一般関数の局所的性質がぜんぜん語れないわけでもない．

二つの一般関数 f と g とがなにかある領域，つまり開集合 G の上で一致するとは，G に台をもつ基礎関数 $u(x)$ ならどれに対しても等式 $(f, u) = (g, u)$ が成り立つことであると定義しよう．特に，点 x_0 の近傍で $f=0$ とは，その近傍の外で 0 になるすべての基礎関数 $u(x)$ に対して $(f, u) = 0$ となることである*)．この定義によれば，一般関数 f が 0 となる点の集合は開集合となる．この集合の全空間 R_n に関する補集合 M を《一般関数 f の台》という．そして，〈集合 M は一般関数 f の台である〉と〈f は集合 M に集中している〉とを同等な言い表わし方として使うことにしたい．またその記号としては $M = \operatorname{supp} f$ と記そう．

一般関数の局所的性質を調べるときには，単位の分解という概念が重要な役割を演ずるので説明しておこう．この概念は他の問題でも利用されるが，有界集合 $U_1, U_2, \cdots, U_\nu \cdots$ による空間の一つの被覆に関して定義される．ここでは，空間の各点は集合族 $\{U_\nu\}$ のうち有限個の集合だけある近傍で交わることを要求しておく．このような被覆を《局所有限》という．無限回微分可能な関数の列，$e_1(x), \cdots, e_\nu(x), \cdots$ が被覆 $\{U_\nu\}$ に関する単位の分解であるというのは，次の条件が満足されることとする．

$$1)\ \ 0 \leqslant e_\nu(x) \leqslant 1, \qquad 2)\ \ \operatorname{supp} e_\nu \subset U_\nu, \qquad 3)\ \ \sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu(x) = 1.$$

空間 R_n の任意の局所有限な開被覆に対して単位の分解が存在する．ここではその構成方法の輪郭を描くに止めよう（この問題の詳細な研究は [18] の第 1 章 付録 1 にある）．

$\overline{V}_\nu \subset U_\nu$ をみたす R_n の開被覆 $\{V_\nu\}$ を見い出すことは常に可能であり，条件 1) と 2) とをみたし，$\overline{V}_\nu$ 上で 1 に等しい無限回微分可能な関数 $h_\nu(x)$ が存在する．そうすると，和 $h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(x)$ は，x が一つのコンパクトな近傍を動くとき有限和である．よって $h(x)$ は無限回微分可能であり，さら

*) このような近傍が存在するとき，f は点 x_0 で 0 であるという．

に $h(x) \geqslant 1$. そこで，求める分解は，関数

$$e_\nu(x) = \frac{h_\nu(x)}{h(x)}$$

によって与えられる.

第3章，2.3節の定理3.2.3の証明に単位の分解が応用される.

2.2. 基本列の同値類としての一般関数の定義

さて，一般関数のもうひとつの定義に移ろう．それは一般関数を連続関数列のある種の極限と見る直観を数学的に定式化したもので関数解析の道具を使っていないという意味において2.1節の定義よりも初等的である.

実数の集合を有理数の集合の拡大としてとらえる Cantor の定義にならって，われわれは一般関数の空間を連続関数の集合の拡大と見ることにしよう.

n 次元実空間 R_n での連続関数列 $\{f_\nu(x)\}$ が《基本列》であるとは，連続関数列 $\{F_\nu(x)\}$ と負でない整数の組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ があって，関数 F_ν は α 階の連続偏導関数をもち，次の条件が成り立つこととする.

1) $\nu = 1, 2, \cdots$ に対して $D^\alpha F_\nu(x) = f_\nu(x)$. ただし D^α は公式 (1.1.3) で定義されたもの；

2) 列 $\{F_\nu(x)\}$ は連続関数 $F(x)$ に収束する．この際，収束は任意の有界集合上で一様収束とする；

3) 関数 $F_\nu(x)$ は同一の多項式により抑えられる．すなわち ν に依存しない定数 $A > 0$, $k \geqslant 0$ が存在し，すべての $\nu = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$|F_\nu(x)| \leqslant A[1+(x_1^2+\cdots+x_n^2)^k] \qquad (1.2.3)$$

となる.

基本列 $\{f_\nu(x)\}$ と $\{g_\nu(x)\}$ とが同値である ($\{f_\nu\} \sim \{g_\nu\}$ と記す) とは，混合列

$$f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x), \cdots$$

が基本列であることとしよう*)．このように定義された同値関係により基本列の集合は《同値類》に分割される．すなわち，列 $\{f_\nu(x)\}$ と $\{g_\nu(x)\}$ とは $\{f_\nu(x)\} \sim \{g_\nu(x)\}$ のとき，かつそのときだけ同一の同値類に属するものとするのである．同値類を指定するには，その類のどれか一つの基本列を与えれば十分である．基本列の同値類を R_n における

---

*) このように定めた $\sim$ が，同値関係をなすこと，すなわち，

(1) $\{f_\nu\} \sim \{f_\nu\}$,　(2) $\{f_\nu\} \sim \{g_\nu\} \longrightarrow \{g_\nu\} \sim \{f_\nu\}$,

(3) $\{f_\nu\} \sim \{g_\nu\}$,　$\{g_\nu\} \sim \{h_\nu\} \longrightarrow \{f_\nu\} \sim \{h_\nu\}$.

が成り立つことは直ちに示される.

一般関数とよぼう．緩増加な連続関数$f(x)$は基本列

$$f(x), f(x), \cdots, f(x), \cdots$$

の同値類と同一視すれば，一般関数と見ることができる．一般関数の集合には自然に加法と数との乗法の線形演算が導入される：——

基本列$\{f_\nu\}$が一般関数fを定めλが数のとき，明らかに列$\{\lambda f_\nu\}$もまた基本列である．この列により定められる同値類を数λと一般関数fとの積とよび，λfと書き表わそう．

問題 1.2.1 もし$\{f_\nu\}$と$\{g_\nu\}$とが基本列ならば，$\{f_\nu+g_\nu\}$もまた基本列であることを示せ．

列$\{f_\nu+g_\nu\}$の属する同値類は，類$f\ni\{f_\nu\}$と$g\ni\{g_\nu\}$によって定まり，代表の取り方によらない．この類を一般関数fとgとの和とよび，記号$f+g$により表わすことにする．

一変数関数の同値な基本列の例をあげておこう：

問題 1.2.2 列

$$f_\nu(x)=\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}e^{-\frac{\nu x^2}{2}}, \qquad g_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{\nu^2x^2+1}, \qquad h_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x} \qquad (1.2.4)$$

は基本列で，互いに同値であることを示せ．

一見すると，この節と2.1節とにおいてまったく性質の相異なる対象にわれわれは同一の名前《一般関数》を付与した．実際には二つの定義が同等であること，すなわち，厳密にいって，ここで考察した同値類の集合と線形汎関数の空間$\mathcal{S}^*$とが同形であることを証明しよう．

$\{f_\nu(x)\}$を基本列とし，それに基本列の定義の条件2)によって対応する連続関数を$F(x)$とせよ．こうしておいて，基本列$\{f_\nu(x)\}$が属する同値類には

$$(f,u)=(-1)^{|\alpha|}\int_{R_n}\overline{F}(x)\,D^\alpha u(x)\,d^nx \qquad (|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n) \qquad (1.2.5)$$

により定義される汎関数(f,u) $(u\in\mathcal{S})$を対応させよう*)．

問題 1.2.3 (1.2.5)により定義された汎関数(f,u)は列$\{f_\nu\}$の属する同値類にのみに依存し，列$\{f_\nu\}$の選び方や整数の組α，そしてまた原始関数列$\{F_\nu\}$によらないことを示せ．

問題 1.2.4 列(1.2.4)はR_1における一般関数$\delta(x)$を定義することを示せ．

問題 1.2.5 上に定めた対応に際して代数的演算は保存される（たとえば，同値類の和には対応する汎関数の和が対応する）ことを示せ．

---

*) 定理1.3.Bにより$f\in\mathcal{S}^*$である．

次に上と逆向きの対応を示せば，空間 $\mathcal{S}^*$ が基本列の同値類として定義された一般関数の空間と同形であることの証明が完結する．そのため，$\mathcal{S}^*$ に属する任意の汎関数が (1.1.22) の形に，あるいは同じことだが，緩増加な連続関数 $F(x)$ を用いて (1.2.5) の形に表わせたことを思いだそう．この定理によると，もし任意の緩増加な連続関数が滑らかな緩増加関数の列の極限とみなせて，かつ，その際に基本列の定義の条件 2) と 3) が満足されることの証明ができれば，$\mathcal{S}^*$ の元から基本列への対応が得られる．その証明のために関数列 [(1.2.4) を参照]

$$\varphi_\nu(x) = \prod_{j=1}^{n} f_\nu(x_j) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \tag{1.2.6}$$

が利用できる．実際，与えられた緩増加な連続関数 $F(x)$ に対し

$$F_\nu(x) = \int_{R_n} F(\xi)\,\varphi_\nu(x-\xi)\,d^n\xi \tag{1.2.7}$$

をつくれば，$F(x)$ は列 $\{F_\nu(x)\}$ の極限になる．次の命題の証明は読者にまかせよう：

1)　各 ν に対し $F_\nu(x) \in \mathcal{S}$，すなわち関数 $F_\nu(x)$ は無限回可微分である；

2)　$\nu \to \infty$ のとき $F_\nu(x) \to F(x)$．ただし R_n における任意の有界集合の上で，x に関して一様に収束するものとする；

3)　$F(x)$ には依存しても ν にはよらない定数 $A>0$，$k \geqslant 0$ が存在して，不等式 (1.2.3) が成り立つ．

こうして望みの証明が完結した．今後は2.1節に与えた汎関数としての一般関数の定義をおもに用いることとしよう．ときには，しかし，任意の一般関数を基礎関数——すなわち $\mathcal{S}$ の関数の——列から $\mathcal{S}^*$ での収束の意味における極限として構成する (1.2.7) も利用することであろう．

2.3.　一般関数の変数変換と微分

§1に述べたように，汎関数は加え合わせが可能であり数との積がつくれるから，一般関数の全体は線形空間をなす．さらに一般関数の変数変換や微分も定義でき，しかも微分は何回でも可能であることをこれから示そう．

まず変数変換，いま，$y=\varphi(x)$，あるいは詳しく書いて，

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\cdots,\ y_n=\varphi_n(x),\ x=(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.2.8}$$

を空間 R_n からそれ自身の上への一対一対応とせよ．さらに関数 $\varphi(x)$ は任意の階数の連続偏導関数をもち，

$$J(\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.2.9}$$

であるとせよ.

$x=\varphi^{-1}(y)$ を (1.2.8) の逆変換としよう.

仮に, $f(x)$ が局所可積分な普通の関数で $u(x)\in\mathcal{D}$ だとしたら,

$$\begin{aligned}(f(\varphi^{-1}(y)),u(y))&=\int_{R_n}\bar{f}(x)\,u(\varphi(x))\,|J(\varphi)|d^nx\\&=(f(x),|J(\varphi)|u(\varphi(x)))\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

が成り立つ. $f(x)$ が超関数の場合に, この右辺を超関数 $f(\varphi^{-1}(y))$ の定義とするのは自然な拡張である. 今後は部分空間 $\mathcal{S}^*$ を不変に保つような, つまり一般関数 $f(x)$ を一般関数 $f(\varphi^{-1}(y))$ に対応させるような超関数の変数変換だけを扱うことにする.

特に変換 φ として一つの変数だけずらすもの, たとえば,

$$y_1=x_1-\varDelta x_1,\qquad y_2=x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\quad y_n=x_n$$

を選ぶと, (1.2.10) により $\varDelta x_1\neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{f(x_1+\varDelta x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_n)}{\varDelta x_1},\ u(x)\right)\\&\qquad=-\left(f(x),\ \frac{u(x_1-\varDelta x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(x_1,\cdots,x_n)}{-\varDelta x_1}\right)\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

を得る. 汎関数 f の連続性により (1.2.11) の右辺が $\varDelta x_1\to 0$ のとき極限 $-\left(f,\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)$ に収束することに注目し, この極限を一般関数 $f(x)$ の変数 x_1 に関する偏導関数と定義しよう*). 一般に,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k},u\right)\equiv-\left(f,\ \frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{1.2.12}$$

もし関数 $f(x)$ が連続な緩増加偏導関数をもつならば, (1.2.12) は部分積分によって得られる. これが定義 (1.2.12) の直観的な基礎づけとして普通に採用されるものである. この定義が関数の微分の普通の定義と一致することは, 上に述べたように (1.2.11) をもとにした議論によって初めて明らかとなる.

一般関数の導関数はまた $\mathcal{S}^*$ に属する一般関数であるから, 明らかに一般関数は無限回微分可能, すなわち任意階数の偏導関数をもつ. 微分演算が $\mathcal{S}^*$ で連続であることに注意

---

*) $\mathcal{S}^*$ は弱位相に関し点列的に完備だから偏導関数も $\mathcal{S}^*$ に属する (p. 18 参照).

しよう．つまり，任意の $u\in\mathcal{S}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,u)=(f,u)$$

ならば，任意の $u\in\mathcal{S}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x},u\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},u\right) \tag{1.2.13}$$

が成り立つ．

$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^*$ とにおける微分演算のこうした簡単な性質はノルム空間では成立しない．このことも一般関数の理論が可算ノルム空間を基礎においている理由のひとつである．

さらに，一般関数については微分の順序が変えられることも注意しておこう：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}. \tag{1.2.14}$$

これは，対応する等式が基礎関数に対して成り立つことによる．

普通の関数の微分に対しては，導関数が不連続であると，(1.2.14) は一般には成り立たないのであった．

局所可積分な関数の導関数として現われてくる一変数一般関数の例をいくつか考察してみよう：

1) 局所可積分な不連続関数

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & (x>0\text{ のとき}),\\ 0 & (x<0\text{ のとき})\end{cases} \tag{1.2.15}$$

の微分は $\delta(x)$ に等しい．実際，定義 (1.2.12) と式 (1.2.2) により，

$$\left(\frac{d\theta}{dx},u\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\frac{du}{dx}dx=-\int_0^{\infty}\frac{du}{dx}dx=u(0)=(\delta,u). \tag{1.2.16}$$

2) 汎関数 $d\ln|x|/dx$ は $1/x$ の Cauchy の意味の主値に一致する．すなわち，

$$\left(\frac{d\ln|x|}{dx},u(x)\right)=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)}{x}dx. \tag{1.2.17}$$

ここで $\mathcal{P}$ は積分の主値を表わす記号である．実際，定義 (1.2.12) により，

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\ln|x|}{dx},u(x)\right)&=-\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\,u'(x)\,dx\\ &=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{u(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{u(x)}{x}dx\right\}\\ &=\int_0^{\infty}\frac{u(x)-u(-x)}{x}dx=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)}{x}dx\left(u'(x)\equiv\frac{du}{dx}\right).\end{aligned}$$

このように定義された一般関数 $d\ln|x|/dx$ を $1/x$（ときには $\mathcal{P}(1/x)$）と記す．普通

の意味の関数 $1/x$ は，点 $x=0$ で局所可積分でないから，従って一般関数 $1/x$ に等しくない．もちろん $x\neq 0$ では相等しいのであるが——．

同様に，一般関数 $1/x^2$ を一般関数 $-1/x$ の導関数として定義しよう：

$$\left(\frac{1}{x^2}, u(x)\right)=\left(\frac{1}{x}, u'(x)\right)=\int_0^\infty \frac{u'(x)-u'(-x)}{x}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{u(x)+u(-x)-2u(0)}{x^2}dx. \qquad (1.2.18)$$

一般に，定義として

$$\frac{1}{x^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln|x| \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (1.2.19)$$

と定める．ただし，導関数は $\mathcal{S}^*$ における微分の定義の意味で理解するのである．

3) 局所可積分関数 $\ln(x+\mathrm{i}0)$ は等式

$$\ln(x+\mathrm{i}0)=\lim_{y\to+0}\ln(x+\mathrm{i}y)$$
$$=\ln|x|+\mathrm{i}\lim_{y\to+0}\arg(x+\mathrm{i}y)=\ln|x|+\mathrm{i}\pi\theta(-x) \qquad (1.2.20)$$

で定義される．ただし，$\theta(x)$ は (1.2.15) で定義されたものである．(1.2.20) を一般関数と見たときの導関数を $1/(x+\mathrm{i}0)$ と記す．(1.2.16)，(1.2.19)，(1.2.20) により，

$$\frac{1}{x+\mathrm{i}0}\equiv\frac{d}{dx}\ln(x+\mathrm{i}0)=\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x). \qquad (1.2.21)$$

この (1.2.21) を逐次微分すれば，

$$\frac{1}{(x+\mathrm{i}0)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln(x+\mathrm{i}0)=\frac{1}{x^n}+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\mathrm{i}\pi\delta^{(n-1)}(x) \qquad (1.2.22)$$

を得る．同様に，$\ln(x+\mathrm{i}0)$ の複素共役である関数 $\ln(x-\mathrm{i}0)$ の微分から

$$\frac{1}{(x-\mathrm{i}0)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\ln(x-\mathrm{i}0)=\frac{1}{x^n}+\mathrm{i}\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x) \qquad (1.2.23)$$

が得られる．いうまでもなく，等式 (1.2.22) と (1.2.23) の右辺におけるδ-関数の導関数は，(1.2.12) に従って

$$(\delta^{(n)}, u)=(-1)^n u^{(n)}(0) \qquad (1.2.24)$$

で定義されている．

2.4. 一般関数と滑らかな関数との積・除法問題

一般関数は，その全体が線形空間をなし，そのために線形問題の考察に対しては道具として極めて適しているのであった．前節では，一般関数は無限回微分可能であって，その偏導関数は微分の順序によらないことを確認した（これは普通の関数に対しては一般には

成り立たないことである)．一般関数に対して Fourier 変換が自由に施せることは次節に示す．しかし，関数の積のような非線形演算では事情がちがう．

一般関数の任意の対に対しては，積は自然な形で定義できない．実際，結合的になるような積の定義ができないことは，

$$\frac{1}{x}(x\delta(x)) = \frac{1}{x}0 = 0 \neq \left(\frac{1}{x}x\right)\delta(x) = \delta(x) \tag{1.2.25}$$

の例が示すとおりである．それでも，$\mathcal{S}^*$ に属する一般関数との積が自然な形で定義できるような関数の広いクラスが存在する．このクラスは次の様に定義される．

関数 $\varphi(x)$ が基礎関数の空間 $\mathcal{S}$ における《積因子》であるとは，$u(x)\in\mathcal{S}$ ならば $\varphi(x)u(x)\in\mathcal{S}$ が成り立つこととする——．

積因子の全体がつくる空間を記号 Θ_M で表わそう．容易にわかるとおり，関数 $\varphi(x)$ が積因子であるためには，$\varphi(x)$ が (i) 無限回微分可能で (ii) そのすべての導関数とともに無限遠で多項式より速く増加しないことが必要かつ十分である．

$\varphi(x)$ が積因子のとき，$\varphi(x)$ と一般関数 $f(x)\in\mathcal{S}^*$ との積を，

$$(\varphi(x)f, u(x)) = (f, \bar{\varphi}(x)u(x)) \tag{1.2.26}$$

によって定義する．積因子は右からかけてもよいと定義して積の可換性 $\varphi f = f\varphi$ を保証しておくのが便利である．

問題 1.2.6 (1.2.26) によって定義された積は結合的かつ双線形である (すなわち $\mathcal{S}^*$ は単位環 Θ_M 上の加群である) ことを確かめよ．

ある場合には二つの一般関数の積も定義できる．このような《特異な》積の理論は上に定義した一般関数と積因子との乗法に比べてあまり自然でないしより複雑でもある．場の量子論にでてくる特異な積のいくつかを，この章の付録Bで考察する．

さて，逆の問題——除法——の考察に移り，方程式

$$\varphi(x)f = g \tag{1.2.27}$$

を研究しよう．ここで $g\in\mathcal{S}^*$ と $\varphi(x)\in\Theta_M$ は与えられた関数，f は未知の一般関数である．関数 $\varphi(x)$ がすべての x に対しゼロでなく $x\to\infty$ であまり速くゼロに収束しないならば，関数 $1/\varphi(x)$ が積因子となり，方程式 (1.2.27) は初等的に解かれる．もし $\varphi(x)$ がどこかでゼロになるならば，問題は本質的に錯綜してくる．ここでは一独立変数の場合に考察を限り，さらに (1.2.27) の $\varphi(x)$ の零点はどれも位数が有限で，かつ離散集合しかなさないことを仮定しておく．この仮定の下では，空間 $\mathcal{S}^*(R_1)$ での除法の問題

は，本質的には，(1.2.27) の形の最も簡単な方程式，すなわち

$$xf = g \tag{1.2.28}$$

の解法に帰着する．

定義 (1.2.26) により，方程式 (1.2.28) は，

$$(g, u(x)) = (xf, u(x)) = (f, xu(x))$$

の形に書ける．ここで $u(x)$ は任意の基礎関数である．従って，もし方程式 (1.2.28) をみたす一般関数 f が存在すれば

$$v(x) = xu_1(x), \qquad u_1(x) \in \mathcal{S} \tag{1.2.29}$$

の形をしたすべての $v(x)$ に対して，

$$(f, v) = (g, u_1). \tag{1.2.30}$$

これで，汎関数 f は $v(0) = 0$ となる関数 $v(x)$ からなる $\mathcal{S}$ の部分空間上では一意的に決定される．汎関数 f を $\mathcal{S}$ の全体で完全に決定するためには，$u_0(0) = 1$ となる $\mathcal{S}$ の一つの関数 $u_0(x)$ ($u_0(x)$ として，たとえば関数 e^{-x^2} が選べる) に対する f の値を定めれば十分である．実際，任意の関数 $u(x) \in \mathcal{S}$ は

$$u(x) = u(0)\,u_0(x) + v(x) \tag{1.2.31}$$

の形に書き表わされ，こうすれば $v(0) = 0$ となり関数 $v(x)$ は (1.2.29) の形に書ける．等式 (1.2.31) の両辺に汎関数 f を作用させると，(1.2.30) を考慮して，

$$(f, u(x)) = u(0)\,(f, u_0(x)) + (g, u_1(x)) \tag{1.2.32}$$

を得る．こうして (f, u) の値は (f, u_0) を定めれば決定されることがわかった．

これまでの議論は，すべて，方程式 (1.2.28) の解が存在するという仮定のもとに行われてきた．容易に直接に確かめられるとおり，定数 C は任意のままで，線形汎関数

$$(f, u) = Cu(0) + (g, u_1(x)) \tag{1.2.33}$$

は $\mathcal{S}$ で連続であり，そして実際に方程式 (1.2.28) を満足する．(1.2.32) までの議論により汎関数 (1.2.33) は方程式 (1.2.28) の一般解である．この方程式の任意の二つの特殊解は定数 C の値しか違わないわけで，同次方程式

$$xf_0 = 0 \tag{1.2.34}$$

の一般解は

$$(f_0, u) = Cu(0), \quad \text{すなわち,} \quad f_0 = C\delta(x) \tag{1.2.35}$$

の形をもつことがわかる．

方程式 (1.2.28) が解をもつことを確認した今では，さらに一般的な方程式

$$x^l f = g, \qquad (1.2.36)$$

$$(g \in \mathcal{S}^*, \qquad l: \text{任意の自然数})$$

が常に $\mathcal{S}^*$ 上の解 f をもつことも容易に証明される．この解のもつ任意性は，同次方程式

$$x^l f_0 = 0 \qquad (1.2.37)$$

の一般解を加えることに限られるわけである．

問題　1.2.7　方程式 (1.2.37) の一般解が

$$f_0 = \sum_{\nu=0}^{l-1} \frac{C_\nu}{\nu!} \delta^{(\nu)}(x) \qquad (1.2.38)$$

の形をしていることを証明せよ．C_ν は任意定数である（ヒント：公式

$$x^k \frac{1}{\nu!} \delta^{(\nu)}(x) = \begin{cases} 0 & (k > \nu \text{ のとき}) \\ \dfrac{(-1)^k}{(\nu-k)!} \delta^{(\nu-k)}(x) & (k \leqq \nu \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (1.2.39)$$

を利用し，l に関する帰納法によれ）．

公式 (1.2.39) は二つの関数の導関数の微分に対する Leibniz の公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[\varphi(x) f] = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi^{(n-\nu)}(x) f^{(\nu)}(x), \qquad \varphi(x) \in \Theta_M, \qquad f \in \mathcal{S}^*$$

から得られる．公式 (1.2.39) は，もっと一般的な公式

$$u(x)\delta^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} u^{(\nu)}(0)\, \delta^{(n-\nu)}(x) \qquad (1.2.40)$$

の特別な場合である．

問題 1.2.7 の結果は次の重要な命題に一般化できる．

［定理 1.2.1］　一般関数 $f(x)$ は座標原点に集中している——すなわち $x \neq 0$ のとき $f(x) = 0$ ——とせよ．このとき $f(x)$ は，δ- 関数とその導関数 $\delta^{(\nu)}(x)$ の有限な線形結合である．この命題は，多変数の一般関数に対しても，また $\mathcal{D}^*(R_n)$ の超関数に対しても同様に成立する．

この定理は問題 1.2.7 と任意の一般関数は有限位数をもつこと（[12] の第2章 4.5 節参照のこと）とに基づいて証明される．

同様にして，$\mathcal{S}^*$ における関数 $(x-a)^l$ —— a は実数——による除法，一般に任意多項式による除法が可能である．

問題　1.2.8　$a_1, \cdots, a_r$ を多項式 $P(x)$ の実根（$P(x)$ には，実根以外に一般に複素数の根があってよい）とし，l_i を根 a_i の位数とすれば，同次方程式

$$P(x) f_0 = 0$$

の一般解は

$$f_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\nu_i=0}^{l_i-1} C_i^{\nu_i} \delta^{(\nu_i)}(x-a_i) \tag{1.2.41}$$

の形になることを示せ.

こうして得られた結果は，実軸上には有限位数の零点だけをもつ無限に滑らかな関数のつくる一層広いクラスに一般化される．たとえば，方程式

$$\sin x \cdot f = 0$$

の一般解は

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(x-n\pi)$$

の形をしている．ここで係数 C_n は $|n| \to \infty$ につれて増大してもよいが，$|n|$ のあるベキより速く増大してはいけない．すなわち，n によらない正の定数 A と λ とが存在して，不等式

$$|C_n| \leqslant A \cdot (1+|n|)^{\lambda}$$

の成り立つ必要がある；この点を除けば定数 C_n は任意である.

注意しておくが，(1.2.27) 型の方程式は，たとえ積因子 $\varphi(x)$ が一点でしか 0 にならないとしても，常に $\mathcal{S}^*$ で解をもつとは限らないのである．たとえば，方程式

$$e^{-1/x^2} f = 1$$

は，関数 $\exp(-1/x^2)$ が点 $x=0$ (この関数の真性特異点) において位数が無限大の零点をもつため $\mathcal{S}^*$ に属する一般関数の解をもたない.

$\mathcal{S}^*(R_1)$ における除法問題について得られた上述の結果は，多変数の一般関数の除法に対しても特殊な問題には適用できることがある．しかし，一般に $\mathcal{S}^*(R_n)$ の汎関数の n 変数多項式による除法の問題は，はるかに複雑である.

たとえば，ベクトル $p=(p^0, p_1, p_2, p_3)$ のつくる実空間 R_4 におけるスカラー積を

$$pq = p^0q^0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 = p^0q^0 - \boldsymbol{pq}$$

により定義したとしよう．方程式

$$(p^2-m^2)f = 1 \tag{1.2.42}$$

の一般解は

$$f = \frac{1}{p^2-m^2} + [\theta(p^0)f_1(\boldsymbol{p}) + \theta(-p^0)f_2(\boldsymbol{p})]\delta(p^2-m^2) \tag{1.2.43}$$

の形をしている．ここに f_1 と f_2 は $\mathcal{S}^*(R_3)$ の勝手な一般関数で，一般関数 $\theta(\pm p^0)f_{1,2}$

$\delta(p^2-m^2)$ と $1/(p^2-m^2)$ は次のように定義されたものである：

$$(\theta(p^0)f_1(p)\delta(p^2-m^2),u(p))$$
$$=\int f_1(p)\frac{u(\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2},\boldsymbol{p})}{2\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}}d^3\boldsymbol{p}=\left(f_1(\boldsymbol{p}),\frac{u(\omega,\boldsymbol{p})}{2\omega}\right), \tag{1.2.44 a}$$

$$(\theta(-p^0)f_2(p)\delta(p^2-m^2),u(p))=\left(f_2(\boldsymbol{p}),\frac{u(-\omega,\boldsymbol{p})}{2\omega}\right), \tag{1.2.44 b}$$

$$\left(\frac{1}{p^2-m^2},u(p)\right)=\int_{R_3}d^3\boldsymbol{p}\,\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(p)}{p^{02}-\omega^2(\boldsymbol{p})}dp^0. \tag{1.2.45}$$

ただし，$\omega=\omega(\boldsymbol{p})=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ で $\mathcal{P}$ は積分の Cauchy の主値を示す．

一般関数 (1.2.44) と (1.2.45) には今後しばしば出会うことになるはずである．

§ 3. 一般関数の Fourier 変換と微分方程式

3.1. 基礎関数と一般関数の Fourier 変換

一般に空間 R_n において

$$xy=x_1y_1+\cdots+x_ly_l-x_{l+1}y_{l+1}-\cdots-x_ny_n \tag{1.3.1}$$

により不定計量スカラー積が与えられているとする．この双線形形式を基にして，Fourier 変換を構成しよう[1]．

[補題 1.3.1] 基礎関数 $\tilde{u}(x)\in\mathcal{S}$ の Fourier 変換

$$u(p)=F\tilde{u}(x)\equiv\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R_n}\tilde{u}(x)\,e^{ipx}d^nx \tag{1.3.2}$$

は，また基礎関数になる ($u(p)\in\mathcal{S}$)．ここで px は (1.3.1) で与えられたものとする．厳密にいえば，変換 (1.3.2) は空間 $\mathcal{S}$ からそれ自身の上への互いに一対一で連続な写像を与えるのである．

実際，積分の絶対収束性から関数 $u(p)$ は無限回微分可能であり，

$$D^\alpha u(p)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R_n}(ix')^\alpha\tilde{u}(x)\,e^{ipx}d^nx \tag{1.3.3}$$

となる．ただし，D^α と $(ix')^\alpha$ とは (1.1.3) で定義されたものであり，また，

$$x'=(x_1,\cdots,x_l,-x_{l+1},\cdots,-x_n). \tag{1.3.4}$$

---

[1] R_n のスカラー積を (1.3.1) で与えるとき，念頭においているのは，擬 Euclid ベクトルとか擬 Euclid ベクトルの組への応用である たとえば，二粒子系を考えて R_n を Minkowski 空間のベクトルの対：$\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$\eta=(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ からなる 8 次元空間にすると，$x_1=\xi_0$，$x_2=\eta_0$，$x_3=\xi_1,\cdots,x_8=\eta_3$ ということにして，この空間 R_8 には (1.3.1) で $l=2$ としたスカラー積を導入するのが目的にあっている．

被積分関数の $(\mathrm{i}x')^{\alpha}\tilde{u}(x)$ は $\mathcal{S}$ に属し，従って，無限回微分可能で，その導関数は絶対可積分かつ無限遠でゼロになる．それ故 (1.3.3) で何回でも部分積分を行なうことができ，その結果として関数 $D^{\alpha}u(p)$ が $p\to\infty$ で p の任意の負のベキより速く減少するのがわかる．故に $u(p)\in\mathcal{S}$，すなわち Fourier 変換により $\mathcal{S}$ はそれ自身に写像される．

もし $\nu\to\infty$ のとき空間 $\mathcal{S}$ の位相で $\tilde{u}_{\nu}(x)\to 0$ ならば，同じことがそれらの Fourier 変換 $u_{\nu}(p)$ に対しても成り立つ．つまり，Fourier 変換 F は $\mathcal{S}$ における連続演算なのである．

(1.3.2) の逆変換は次の公式により与えられる．

$$\tilde{u}(x)=\tilde{F}u(p)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R_n}u(p)\,e^{-\mathrm{i}px}\,d^np. \qquad (1.3.5)$$

$\tilde{F}$ は F と同じ性質をもつ．こうして Fourier 変換は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への同形写像を与える．

一般関数 $\tilde{f}(x)$ の Fourier 変換は

$$(f(p),u(p))=(\tilde{f}(x),\tilde{u}(x)) \qquad (1.3.6)$$

により，基礎関数 $\tilde{u}(x)$ の Fourier 変換のつくる空間の上の線形汎関数 $f(p)$ として定義しよう．ここで $u(p)$ は，(1.3.2) により $\tilde{u}(x)$ と結ばれている．(1.3.6) は，また Fourier 変換の逆変換の定義とみなすことができる．つまり，一般関数 $f(p)$ が与えられたのならば，その Fourier 逆変換 $\tilde{f}(x)$ が等式 (1.3.6) により定義されるのである．

補題 1.3.1 により，一般関数 $\tilde{f}(x)$ $(\tilde{f}(x)\in\mathcal{S}^*)$ の Fourier 変換 $f(p)$ は，また同じ空間 $\mathcal{S}^*$ に属する一般関数である．逆に，一般関数 $f(p)\in\mathcal{S}^*$ はいずれも Fourier 逆変換 $\tilde{f}(x)\in\mathcal{S}^*$ をもつ．こうして補題 1.3.1 に呼応する次の定理が得られた：

[定理 1.3.1] (1.3.6) により定義された一般関数の Fourier 変換は空間 $\mathcal{S}^*$ からそれ自身の上への同形写像である．

次のことを思い出しておこう．線形位相空間 Ω_1 から線形位相空間 Ω_2 の上への同形写像とは，Ω_1 から Ω_2 上への線形演算を保つ一対一連続写像でかつその逆写像もまた Ω_2 から Ω_1 上への連続写像となるような写像のことであった．

補題 1.3.1 と定理 1.3.1 は有界な台をもつ滑らかな関数の空間 $\mathcal{D}$ とそれに共役な超関数の空間 $\mathcal{D}^*$ に対しては成り立たないことに注意しよう．われわれの目的のために一般関数を空間 $\mathcal{S}$ 上の汎関数とする定義を選んだのは，以上の補題と定理が示す x 空間と p 空間の対称性を確保するためだったのである．この選択は，座標表示と運動量表示との対称性という量子論で重要な役割を演ずる要求を反映している．後に，第4章3.5節において，この選択と微視的因果律との結びつきを示す．

一般関数 $\tilde{f}(x)$ が普通の関数に一致してしまい，そのうえ古典的な意味での Fourier 変換 $f(p)$ （(1.3.2)）をもつ場合，(1.3.6) により定義される一般関数 $f(p)$ はこの Fourier 変換に一致する．この場合，(1.3.6) は周知の Parseval の等式にほかならない：

$$\int_{R_n} \overline{\tilde{f}(x)}\,\tilde{u}(x)\,d^n x = \int_{R_n} \overline{f(p)}\,u(p)\,d^n p. \tag{1.3.7}$$

一般関数の Fourier 変換のいくつかの例を考察しよう[1]：

$$F\theta(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \theta(t)\,e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\omega+i0}; \tag{1.3.8}$$

$$\begin{aligned} F\delta(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R_n}\delta(x)\,e^{ipx}\,d^n x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}},\\ \tilde{F}\left(\frac{e^{ipa}}{(2\pi)^{n/2}}\right) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R_n} e^{i(a-x)p}\,d^n p = \delta(x-a). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

(1.3.9) の最初の式は定義 (1.3.6) から容易に得られる：

$$(F\delta, u(p)) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R_n} u(p)\,d^n p.$$

(1.3.9) の二番目の式は，もし $a=0$ ならば，第一式から Fourier 逆変換として得られる；任意の a に対しては平行移動により $a=0$ の場合に帰着させればよい．別の例として，p と x とが四元ベクトルのとき[2]，

$$D^c(x) = \tilde{F}\left(\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{m^2-p^2-i0}\right) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2-i0}d^4p = \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda)$$

$$+\frac{im}{4\pi^2}\frac{\theta(-\lambda)}{\sqrt{-\lambda}}K_1(m\sqrt{-\lambda}) - \frac{m}{8\pi}\frac{\theta(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}[J_1(m\sqrt{\lambda}) - iN_1(m\sqrt{\lambda})] \tag{1.3.10}$$

ただし，

$$\lambda = x^{02} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

$$K_1(z) = -\frac{\pi}{2}H_1^{(1)}(iz) = -\frac{\pi}{2}(J_1(iz) + iN_1(iz)) \tag{1.3.11}$$

であり，$J_1, N_1, H_1^{(1)}, K_1$ はそれぞれ Bessel 関数，Neumann 関数，Hankel 関数，変形 Bessel 関数である．

(1.3.10) の導き方のあらすじを示そう．恒等式

$$\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} = \frac{i}{4}\int_0^\infty e^{-i\frac{m^2-p^2-i\varepsilon}{4\alpha}}\frac{d\alpha}{\alpha^2} \tag{1.3.12}$$

---

1) しばしば出てくる一般関数の Fourier 変換の表が，文献 [18] の第2章，§2, 5 節に載っている．

2) 関数 $D^c(x)$ は，場の量子論において質量 m の自由なスカラー場の《因果性 Green 関数》あるいは《伝播関数》とよばれ，重要な役割をつとめる（[4] の第3章を見よ）．

と Gauss 積分に関するよく知られた式とから，一般関数 $D^c(x)$ を $\mathcal{S}^*$ での収束に関する極限

$$D^c(x) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\eta\to+0} f\eta(\lambda)$$

の形に表わすことができる．ここで λ は (1.3.11) で与えられたもので

$$f\eta(\lambda) = \int_0^\infty \exp\left\{-\left[\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{m}^2}{4\alpha}+(\eta+\mathrm{i}\lambda)\alpha\right]\right\}d\alpha. \tag{1.3.13}$$

汎関数 $f(\lambda) = \lim_{\eta\to+0} f\eta(\lambda)$ は区間 $\lambda<0$, $\lambda>0$ と原点 $\lambda=0$ の近傍とで別々の式で与えられる．最初の二つの場合には積分 (1.3.13) を直接行なうと式 (1.3.10) が得られる ([19] の 3.324 と 8.421.2 を参照)．次に原点 ($\lambda=0$) の近傍に関して (1.3.10) の第1項の δ- 関数を得るために，積分

$$\lim_{\eta\to+0}\int_{-a}^{a} f\eta(\lambda)d\lambda = 2\int_0^\infty e^{-\frac{\mathrm{i}m^2}{4\alpha}}\frac{\sin a\alpha}{\alpha}d\alpha$$

を考えてみよう．変数変換 $\beta=a\alpha$ を行なった後，$a\to0$ の極限をとると，結局

$$\lim_{a\to+0}\ \lim_{\eta\to+0}\int_{-a}^{a} f\eta(\lambda)d\lambda = 2\int_0^\infty \frac{\sin\beta}{\beta}d\beta = \pi$$

が得られる．他方，λ^ν をかけてから行なった積分 $\lim_{\eta\to+0}\int_{-a}^{a}\lambda^\nu f\eta(\lambda)d\lambda$ は $\nu=1,2,\cdots$ のどれに対しても 0 になる．この結論を要約すれば，$\lambda=0$ の近傍で $f(\lambda)$ は $\pi\delta(\lambda)$ として振舞うということである．こうして (1.3.10) が証明された．

ここで，基礎関数の Fourier 変換に対する式 (1.3.3) が，一般関数の Fourier 変換に対してもそのまま成り立つことに注意しておこう：

$$D^\alpha F\tilde{u} = F[(\mathrm{i}x')^\alpha\tilde{u}], \tag{1.3.14}$$

$$F[D^\alpha\tilde{u}] = (-\mathrm{i}p')^\alpha F\tilde{u}. \tag{1.3.15}$$

ただし，x' と p' とは (1.3.4) により定義される．この公式は有用である．たとえば，一般関数に対する定数係数の微分方程式が 2.4 節で考察した除法を用いて解けることになるのである．

3.2. 一般関数のたたみこみ

古典解析学では，等式

$$f(p) * g(p) = \int_{R_n} f(p-q)g(q)\,d^nq = \int_{R_n} f(q)g(p-q)\,d^nq \tag{1.3.16}$$

によって定義される二つの関数 $f(p)$ と $g(p)$ のたたみこみの演算がしばしば利用される．一般関数の解析において，この演算は，なお一層重要な役割を果たすのである．

積の演算と同様に，たたみこみも一般関数の任意の組に対しては定義されない．けれども，一般関数 f と基礎関数 $u(p)$ とのたたみこみならば (1.3.16) の第二式を利用して簡単に定義できる：

$$f * u(p) = (\bar{f}(q), u(p-q)) = \int_{R_n} f(q)\, u(p-q)\, d^n q. \tag{1.3.17}$$

ここで最初の等式は，p を固定して q の関数と見た基礎関数 $u(p-q)$ における汎関数 $f(q)$ の値を使ってたたみこみを定義している*)．容易にわかるとおり，たたみこみ (1.3.17) は p の関数として無限回微分可能で，その導関数とともに緩増加である．いいかえると，$f \in \mathcal{S}^*$, $u \in \mathcal{S}$ ならば，$f * u(p) \in \Theta_M$，つまり，たたみこみ (1.3.17) は積因子である．しかし，関数 $f * u$ は，一般的には基礎関数の空間 $\mathcal{S}$ に属さない．たとえば，$f(q)$ を多項式とするなら，たたみこみ (1.3.17) も多項式になり，従って $p \to \infty$ でその絶対値は，増大するばかりで，減少しない．

一般関数 $f(p)$ が $\mathcal{S}$ で《たたみこみ可能》とは，任意の $u(p) \in \mathcal{S}$ に対してたたみこみ $f * u$ がまた $\mathcal{S}$ に属することとする．《たたみこみ可能な一般関数の空間》を記号 Θ_c' で表わそう．

もし f が上の意味において $\mathcal{S}$ でたたみこみ可能ならば，f と任意の一般関数 $g \in \mathcal{S}^*$ とのたたみこみ $f * g$ が，

$$\begin{aligned}(f * g, u) &= (f(p) g(q), u(p+q)) \\ &= (g(q), (f(p), u(p+q))) = (g(q), \bar{f}(-q) * u(q))\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

により定義できて $\mathcal{S}^*$ に属するのである**)．

たたみこみ可能な一般関数の例をあげておこう．任意の $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して $D^\alpha \delta(x)$ はたたみこみ可能である．もっと一般に，一般関数 f が有界な台をもつならば，f はたたみこみ可能である．

$\mathcal{S}$ に属する基礎関数はたたみこみ可能である．一般関数については次の定理が成り立つ (Gårding=Lions (1959)，定理 7.2.3，あるいは [12] の第3章 §3，7節を参照)：

[定理 1.3.2]　一般関数 $\varphi(p)$ がたたみこみ可能であるためには，その Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(x)$ が積因子であることが必要かつ十分である．このとき，任意の $g \in \mathcal{S}^*$ に対して

$$\varphi * g(p) = (2\pi)^{n/2} F(\tilde{\varphi}(x)\, \tilde{g}(x)) \tag{1.3.19}$$

---

*) (1.3.17) における $\bar{f}(q)$ は，次のように解釈する：一般関数 f に対し，$(\bar{f}, u) = \overline{(f, \bar{u})}$ とすると一般関数 $\bar{f}$ が定まる．

**) f を $\mathcal{S}$ でたたみこみ可能としよう．そうすると f は $\mathcal{S}^*$ の任意の元ともたたみこみ可能となるので，そのような f を今後は単にたたみこみ可能な一般関数ということにしよう．

が成り立つ.

たたみこみ可能な一般関数の空間 $\mathcal{O}'_c$ は急減少な一般関数からなる. すなわち,

[補題 1.3.2] 一般関数 f がたたみこみ可能であるためには, 任意の自然数 N に対して, f が連続関数 $F_{kN}(p)$ の導関数の有限和に表わせて各 $F_{kN}(p)$ が不等式

$$|F_{kN}(p)| \leqslant \frac{C_{kN}}{[1+|p|^2]^N} \qquad (|p|^2 \equiv p_1^2 + \cdots + p_n^2)$$

をみたすことが必要かつ十分である.

この補題は, ここでは証明しないが, 第4章で必要になる ([17] の第2巻, 第7章§5, 定理9を参照).

一般関数の組 f と g に対してたたみこみが定義されるための別の十分条件が存在する[1]. この種類の判定条件は応用上に役に立つから, さらにもう一つ定式化しておこう. この判定条件は一変数関数の場合に特に簡単な形になる:

もし一般関数 $f(p)$ と $g(p)$ $(\in \mathcal{S}^*(R_1))$ の台が実軸の同じ側で限られているならば——たとえば $p<p_1$ のとき $f(p)=0$, $p<p_2$ のとき $g(p)=0$ ならば——汎関数 (1.3.18) は存在して, たたみこみ $f*g(p)$ を定義する.

多変数関数に対しては後にでてくる一つの特殊な場合にのみ用いられる判定条件を定式化するだけにしよう:

R_4 を Minkowski 空間とする. 一般関数 $f_r(x) \in \mathcal{S}^*(R_4)$ が《遅延型一般関数》であるとは, その台が前方光円錐 $\overline{V}^+$ に含まれている——すなわち, $x \lesssim 0$ のとき $f_r(x)=0$ である——こととし, 《先発型一般関数》であるとは, その台が後方光円錐 $\overline{V}^-$ に含まれていることとする.

[定理 1.3.3] もし一般関数 $f_r(x)$ と $g_r(x)$ がともに遅延型一般関数であるならば, (1.3.18) によって定義されたたたみこみ $f_r * g_r(x)$ が存在し, 再び遅延型一般関数となる. 先発型一般関数に対しても同様な命題が成立する.

この定理は, この章の付録 A で証明される遅延型関数の Fourier 変換に関係した定理 1.A.1 から得られる.

読者は, ここで, この定理の直接の検証を試みられるとよい.

最後に, 定義 (1.3.18) から直ちに出るたたみこみの微分についての公式

$$D(f*g) = Df*g = f*Dg, \tag{1.3.20}$$

[1] たたみこみについて, 今までに知られているすべての場合を含むような一般的定義が, V.S. Vladimirov 《数理物理の方程式》, ナウカ出版所 (1967), 116 頁に述べられている.

に注意しておこう．

3.3. 一般関数に対する微分方程式．たたみこみ型の方程式

この章では定数係数の線形微分方程式，すなわち

$$P(-\mathrm{i}D)f=\sum_{\alpha}a_{\alpha}(-\mathrm{i})^{|\alpha|}D^{\alpha}f(p)=g(p) \tag{1.3.21}$$

の形をした方程式のいくつかの例を考察する．ここで，P は任意の多項式，演算子 D^{α} は (1.1.3) で定義されたもの，a_{α} は複素数，$g(p)$ は与えられた一般関数，$f(p)$ は未知の一般関数である．$-\mathrm{i}$ がかけてあるのは便宜上のことである．

方程式 (1.3.21) はたたみこみ型の方程式

$$\varphi(p)*f(p)=g(p) \tag{1.3.22}$$

の特別な場合と見ることができる．ここで $\varphi(p)$ は与えられたたたみこみ可能な関数とする．実際，

$$\varphi(p)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}(-\mathrm{i})^{|\alpha|}D^{\alpha}\delta(p) \tag{1.3.23}$$

とおけば，方程式 (1.3.22) は (1.3.21) になるわけである．

定理 1.3.2 によれば，方程式 (1.3.22) は Fourier 変換をした方程式

$$\tilde{\varphi}(x)\tilde{f}(x)=\tilde{g}(x) \tag{1.3.24}$$

と同等である．

だから，方程式 (1.3.22) の，従ってまた微分方程式 (1.3.21) の一般解 $f(p)$ を求めるためには，対応する未知関数 $\tilde{f}(x)$ に関する除法の問題 (1.3.24) を解くことが必要かつ十分である．

一独立変数の場合を考察しよう．この場合には，2.4 節に述べた多項式による除法の問題の解を用いて方程式 (1.3.21) の一般解が容易に得られる．実際，(1.3.24) と (1.3.23) とから出発して，あるいは直接 (1.3.14) を利用して，方程式 (1.3.21) が Fourier 変換の後

$$P(x)\tilde{f}(x)=\tilde{g}(x) \tag{1.3.25}$$

の形をとることがわかる．ただし P は (1.3.21) の左辺にある多項式である．2.4 節で確かめておいたように，方程式(1.3.25)は常に解をもち，一般解は一つの特殊解と(1.2.41)の形をした関数の和になる．

問題 1.3.1　導関数が 0 に等しい一般関数 $f(p)$ は定数 $f=C$ であることを示せ．（ヒント：方程式 (1.2.34) の一般解は (1.2.35) の形を取ることを利用せよ）．

一般関数の空間 $\mathcal{S}^*$ における同次方程式

$$P\left(-\mathrm{i}\frac{d}{dp}\right)f(p) = 0 \tag{1.3.26}$$

の独立な解の数は，滑らかな関数の空間におけるこの同じ方程式の独立な解の数に比べて多くないばかりか，一般的には少ない．実際，もし多項式 $P(x)$ が実根をもたないとしたら，方程式 (1.3.26) の $\mathcal{S}^*$ における解はただ一つ $f=0$ しかない．ところが，無限回微分可能な関数の空間においては，方程式 (1.3.26) は N 個の一次独立な解をもつ．N は多項式 $P(x)$ の次数である．この事実は指数関数的に増大する普通の関数は $\mathcal{S}^*$ の一般関数でないことによる．もし，任意に与えられた定数係数線形微分方程式のすべての解を問題にしたいならば，それらの解はどうしても超関数の空間で探さなければならないのである．

偏微分方程式のひとつの例を次節で考察する．

3.4. 波動方程式の基本解

この節では $n+1$ 次元空間 R_{n+1} における波動方程式

$$\Box f(p) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial p_0^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial p_i^2}\right)f(p) = 0 \tag{1.3.27}$$

の一般解を研究しよう．

次の記号を導入する：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n), \quad |\boldsymbol{p}| = \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2} = \rho, \quad p^2 = p_0^2 - \rho^2; \\ &\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = r, \quad x^2 = x_0^2 - r^2; \\ &\qquad xp = x_0p_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{p} = x_0p_0 - x_1p_1 - \cdots - x_np_n. \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ をそれぞれベクトル p と x の空間成分とよぶ．

任意の初期条件で方程式 (1.3.27) を解くためには，この方程式の基本解が得られれば十分である．基本解というのは，条件

$$\Box\, D(p) = 0, \qquad D(0, \boldsymbol{p}) = 0, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p_0}\right|_{p_0=0} = \delta(\boldsymbol{p}) \tag{1.3.29}$$

をみたす一般関数 $D(p)$ として定義される．この条件が意味をもつためには，次の補題が成り立つことを確かめておく必要がある：

[補題 1.3.3] もし一般関数 $D(p) \in \mathcal{S}^*(R_{n+1})$ が波動方程式 (1.3.27) をみたすならば，$D(p)$ はパラメータとしての p_0 に依存し変数 $\boldsymbol{p}$ については $\mathcal{S}^*(R_n)$ に属する一般関数と見ることができる．

問題　1.3.2　補題1.3.3を証明せよ（ヒント：次のことを示せばよい．$\varphi_\nu(\boldsymbol{p})$，$\nu=1,2,\cdots$ を (1.2.6) の関数とする．もし $D(p)$ が (1.3.27) をみたすならば，関数

$$D_\nu(p)=\int_{R_n}D(p_0,\boldsymbol{q})\varphi_\nu(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})d^n\boldsymbol{q} \tag{1.3.30}$$

は無限に滑らかで，$\mathcal{S}^*(R_{n+1})$ における収束に関して $\lim_{\nu\to\infty}D_\nu(p)=D(p)$ であり，同時に p_0 を固定したとき $\mathcal{S}^*(R_n)$ の収束に関して $\lim_{\nu\to\infty}D_\nu(p)=D(p)$ である）．

問題　1.3.3　一般関数 $f(p)$ が方程式 (1.3.27) と初期条件

$$f(0,\boldsymbol{p})=f_0(\boldsymbol{p}),\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial p_0}\right|_{p_0=0}=f_1(\boldsymbol{p}) \tag{1.3.31}$$

とをみたすものとせよ．ただし，$f_0(\boldsymbol{p})$，$f_1(\boldsymbol{p})\in\mathcal{S}^*(R_n)$．このとき，$f(p)$ は

$$\begin{aligned}f(p)&=D(p_0,\boldsymbol{p})*f_1(\boldsymbol{p})+\frac{\partial D}{\partial p_0}*f_0(\boldsymbol{p})\\&=\int D(p_0,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})f_1(\boldsymbol{q})d^n\boldsymbol{q}+\frac{\partial}{\partial p_0}\int D(p_0,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})f_0(\boldsymbol{q})d^n\boldsymbol{q}\end{aligned} \tag{1.3.32}$$

の形に書けることを示せ．

さて，基本解 $D(p)$ を見つけよう（条件 (1.3.29) が一つの，そしてただ一つの一般関数を定めることは問題1.2.3により確認ずみである）．

常微分方程式の解の発見のために3.3節で利用された方法に従って，関数 $D(p)$ の Fourier 変換に移ろう．そうすると，(1.3.29)は，

$$x^2\widetilde{D}(x)=(x_0+r)(x_0-r)\widetilde{D}(x_0,\boldsymbol{x})=0 \tag{1.3.33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{D}(x_0,\boldsymbol{x})dx_0=0 \tag{1.3.34 a}$$

$$\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}x_0\widetilde{D}(x_0,\boldsymbol{x})dx_0=\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \tag{1.3.34 b}$$

となる．2.4節の結果（特に $m=0$ のときの式 (1.2.43)）により，方程式 (1.3.33) の一般解は，

$$\widetilde{D}(x)=D_1(\boldsymbol{x})\delta(x_0-r)+D_2(\boldsymbol{x})\delta(x_0+r),\qquad D_{1,2}(\boldsymbol{x})\in\mathcal{S}^*(R_n)$$

と書ける．ところが条件 (1.3.34 a) により

$$D_1(\boldsymbol{x})+D_2(\boldsymbol{x})=0.$$

また第二の条件 (1.3.34 b) から

$$\mathrm{i}r(D_1(\boldsymbol{x})-D_2(\boldsymbol{x}))=\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}$$

が得られる．ゆえに

$$\widetilde{D}(x)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\frac{\delta(x_0-r)-\delta(x_0+r)}{2r}=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{(n-1)/2}}\varepsilon(x_0)\delta(x^2). \tag{1.3.35}$$

ここで $\varepsilon(x_0)$ は符号関数である．こうして，求める $D(p)$ が

$$D(p) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^n}\int \varepsilon(x_0)\delta(x^2)\, e^{\mathrm{i}px} d^{n+1}x$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{\sin p_0 r}{r} e^{-\mathrm{i}px} d^n x \tag{1.3.36}$$

と得られた．関数 $D(p)$ の具体的な形は空間の n 次元によって異なる．

問題 1.3.4

$$D(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon(p_0)\theta(p^2) & (n=1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon(p_0)\theta(p^2)}{\sqrt{p^2}} & (n=2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.3.37}$$

となることを示せ.

$n \geqslant 3$ のとき，積分 (1.3.36) の計算には球座標を導入すると便利である (x_1 軸をベクトル $\boldsymbol{p}$ 方向に選ぶ)：

$$x_1 = r\cos\varphi_1$$

$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}$$

$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.$$

球座標による体積要素は，

$$dx_1\cdots dx_n = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,dr\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{n-1}$$

の形をしており，角 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ の範囲は，

$$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\ \cdot\cdot\cdot,\ 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi$$

である．ν 次元空間の単位球の表面積 σ_ν が

$$\sigma_\nu = 2\frac{\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \tag{1.3.38}$$

と計算されるから，

$$D(p) = \frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \frac{\sin p_0 r}{r} r^{n-1} dr \int_0^\pi e^{-\mathrm{i}\rho r\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1$$

を得る．他方 (たとえば [32] の第2巻，第5章113節，公式 (198) を参照)

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \sin^{2\nu}\theta\, e^{-\mathrm{i}z\cos\theta} d\theta.$$

従って，

$$D(p)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\left(\frac{r}{\rho}\right)^{(n-2)/2}\sin p_0 r\, J_{(n-2)/2}(\rho r)\,dr. \tag{1.3.39}$$

積分 (1.3.39) の結果は n が偶数か奇数かによって異なった形になる．

問題　1.3.5　n が奇数 ($n=2\nu+3,\ \nu=0,1,2\cdots$) のとき

$$D(p)=\frac{1}{2\pi^{\nu+1}}\varepsilon(p_0)\delta^{(\nu)}(p^2) \tag{1.3.40}$$

となることを示せ．

問題　1.3.6　n が偶数 ($n=2\nu+2,\ \nu=0,1,2,\cdots$) のときには

$$D(p)=\frac{\varepsilon(p_0)}{2\pi^{\nu+1}}\left(\frac{d}{dp^2}\right)^{\nu}\frac{\theta(p^2)}{\sqrt{p^2}} \tag{1.3.41}$$

となることを示せ(ヒント：任意の負でない整数 ν に対して成立する公式

$$J_{\nu+1/2}(z)=(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\nu+1/2}\left(\frac{d}{zdz}\right)^{\nu}\frac{\sin z}{z}$$

$$J_\nu(z)=(-1)^{\nu}z^{\nu}\left(\frac{d}{zdz}\right)^{\nu}J_0(z)$$

を利用せよ)．

注意しておくが，(1.3.40) と (1.3.41) の型の一般関数は次のようにして定義されるものである：$f_1(\lambda)$ を半直線 $\lambda\geqslant 0$ に集中している——すなわち，$\lambda<0$ のとき $f(\lambda)=0$ となる——$\mathcal{S}^*(R_1)$ の一般関数とせよ．このとき $f(p)=\varepsilon(p_0)f_1(p^2)$ は，

$$(f(p),u(p))=(f_1(\lambda),a(\lambda)\,u_1(\lambda)) \tag{1.3.42}$$

によって定義される空間 $\mathcal{S}(R_4)$ 上の汎関数である．ただし，

$$u_1(\lambda)=\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[u(\sqrt{\lambda}\cosh\xi,\ e\sqrt{\lambda}\sinh\xi) -u(-\sqrt{\lambda}\cosh\xi,\ e\sqrt{\lambda}\sinh\xi)]\sinh^2\xi\sin\theta\, d\xi\, d\theta\, d\varphi \tag{1.3.43}$$

$$e=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$$

であり，$a(\lambda)$ は $\lambda\geqslant 0$ のとき $a(\lambda)=1$，$\lambda\leqslant -1$ のとき $a(\lambda)=0$ となる無限に滑らかな関数なら何でもよい．$a(\lambda)$ としては，たとえば，

$$a(\lambda)=\begin{cases}0 & (\lambda\leqslant -1\ のとき)\\ \exp\left\{\dfrac{\exp(1/\lambda)}{-(1+\lambda)}\right\} & (-1<\lambda<0\ のとき)\\ 1 & (\lambda\geqslant 0\ のとき)\end{cases}$$

を選ぶことができる．

問題　1.3.7　関数 $a(\lambda)u_1(\lambda)$ は $\mathcal{S}(R_1)$ に属し，汎関数 (1.3.42) は関数 $a(\lambda)$ の選び方によらないことを示せ．後半の証明には，$\lambda<0$ で $f_1(\lambda)=0$ となることを利用せよ．

3.5. Lorentz 不変な一般関数

Lorentz 不変な一般関数は相対論的量子論において重要な役割を果たしている．この節では一つの四元ベクトル $p=(p^0,p^1,p^2,p^3)$ を変数とする不変な関数を考察しよう．Lorentz 不変性のほかに場の量子論の公理を反映するいくつかの補足的な仮定までこめて n 個の四元ベクトルの関数を一般的に考察することは第5章で行なう．

Λ を任意の固有（順時的本義）Lorentz 変換とする，すなわち $\Lambda\in L_+^\uparrow$．一般関数 $f(p)$ が Lorentz 不変であるとは，

$$f(\Lambda p)=f(p) \tag{1.3.44}$$

のこととしよう．$f(\Lambda p)$ の定義は (1.2.10) で与えられているが，いまの場合，行列 Λ の行列式は1に等しいので，それは

$$(f(\Lambda p),u(p))=(f(p),u(\Lambda^{-1}p)) \tag{1.3.45}$$

の形になる．

px を四次元 Minkowski 空間におけるスカラー積とせよ．次の命題の正しさは容易に確かめられる：

［補題 1.3.4］ 一般関数

$$f(p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{f}(x)\,e^{ipx}\,d^4x$$

が $R_4(p)$ における固有 Lorentz 変換で不変なのは，その Fourier 変換 $\tilde{f}(x)$ が $R_4(x)$ における同種の変換で不変であるとき，かつそのときに限る．

問題 1.3.8 補題1.3.4を証明せよ．

補題1.3.4によれば原点 $p=0$ に集中している不変な一般関数の一般形が容易に求められる．もちろん，定理1.2.1の多次元への一般化を利用しなければならないが，それによると，点 $p=0$ に集中した任意の一般関数は，δ- 関数とその導関数の線形結合，すなわち，

$$f(p)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant n_f}C_\alpha D^\alpha\delta(p) \tag{1.3.46}$$

の形に書くことができる．n_f は f に依存する負でない整数である．

問題 1.3.9 公式 (1.3.46) と補題1.3.4を使って点 $p=0$ に集中した Lorentz 不変な一般関数は，常に

$$P(\Box)\delta(p) \tag{1.3.47}$$

という形に書き表わせることを示せ．ここに，P は任意の多項式，$\square$ は (1.3.27) で定義された演算子の $n=3$ の場合である．

次にもう少し広い変換群——順時 Lorentz 群に属する変換によって不変な一般関数の一般形を考えよう．$f(p)$ をこの群で不変な一般関数として（以下で不変な関数というのはこの意味である），

$$f_1(p) = \frac{1}{2}[f(p^0, \boldsymbol{p})+f(-p^0, \boldsymbol{p})]$$
$$f_2(p) = \frac{1}{2}[f(p^0, \boldsymbol{p})-f(-p^0, \boldsymbol{p})] \tag{1.3.48}$$

とおく．そうすると時間反転まで含めた任意の Lorentz 変換 Λ に対して，

$$f_1(\Lambda p) = f_1(p), \qquad f_2(\Lambda p) = \varepsilon(\Lambda) f_2(p) \tag{1.3.49}$$

が成り立つ．ここに $\varepsilon(\Lambda)$ は Λ が時間の向き（つまり p^0 の正負）を逆にしないなら $+1$，するならば -1 という値をとる．

時間の反転に対して f_1 のように変換する不変な関数を《偶》関数とよび，それらの全体を $\mathcal{L}^+$ と記そう．一方，f_2 のように変換するものは，《奇》関数とよび，それらの全体を $\mathcal{L}^-$ と記す．こうして，不変な関数の集合が次のような二つのクラスに分かれることがわかった：1) 各クラスは時間反転演算子の固有関数からなる；2) Lorentz 不変な任意の関数は，各クラスにそれぞれ属する二つの関数の和に一意的に分解される——(1.3.48) の記号によれば $f=f_1+f_2$.

これからは，クラス $\mathcal{L}^+$ と $\mathcal{L}^-$ とを別々に考察することにしよう．

直観的には明らかに，$\mathcal{L}^+$ 関数はベクトル p の二乗なるスカラーにしか依存しないと思われるだろう．つまり，

$$f(p) = f_1(p^2). \tag{1.3.50}$$

ところが，原点 $p=0$ に集中した Lorentz 不変な一般関数は，以前にも見たとおり，この形には書けない．

それでも，汎関数 (δ, u) でさえ (1.3.50) 型の汎関数の $\mathcal{S}^*$ における極限の形にならば表わせるということに注意しておこう；実際

$$u(0) = (\delta, u) = -\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2}{\pi^2}\int_{R_4} \sin \nu p^2 \cdot u(p)\, d^4p. \tag{1.3.51}$$

大雑把にいえば，$\mathcal{L}^+$ の任意の一般関数は (1.3.47) の形と (1.3.50) の形の関数の重ね合わせで表わすことができるものである．

この命題を厳密に述べることは，それほど初等的にはできない．その難かしさは，光円錐 $p^2=0$ の近傍での汎関数 $f(p)$ の振舞いに関係している．ここでは結論を述べるだけにして，証明は Gårding と Lions の講義 (1959)[1]および Methée の論文 (1954, 1955) を見ていただくことにしたい．

いま，実一変数 τ の複素数値関数で

$$h(\tau)=h_1(\tau)+h_2(\tau)\ln\frac{1}{|\tau|} \tag{1.3.52}$$

の形をしたもの全体を $\mathscr{H}$ とおく．ただし $h_1(\tau)\in\mathcal{S}$, $h_2(\tau)\in\mathcal{S}$ そして $h_2(0)=0$. さらに演算子 L_σ を

$$L_\sigma h\equiv\sum_{\nu=1}^{\sigma}(l_\nu,h)\frac{\tau^\nu}{\nu!}=\sum_{\nu=1}^{\sigma}h_2^{(\nu)}(0)\frac{\tau^\nu}{\nu!}\qquad(\sigma=1,2,\cdots) \tag{1.3.53}$$

により定義して，$\mathscr{H}$ に可算個のノルム系

$$|p_\sigma(h)|=p_\sigma\left(h(\tau)-\varphi_0(\tau)L_\sigma h\ln\frac{1}{|\tau|}\right)+\sum_{\nu=0}^{\sigma}\left|h_2^{(\nu)}(0)\right| \tag{1.3.54}$$

を導入しよう．ここに $p_\sigma(u)$ は (1.1.14) で与えられ，$\varphi_0(\tau)$ は点 $\tau=0$ のある近傍で1に等しく区間 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ の外では0に等しい $\mathcal{D}$ の固定した関数とする．これで $\mathscr{H}$ は可算ノルム空間となった．ノルム系 (1.3.54) によって $\mathscr{H}$ に入る位相は関数 $\varphi_0(\tau)$ の特定な形には無関係である．

$\mathscr{H}$ 上の任意の連続形汎関数は，

$$(F,h)=\left(f,h-\varphi_0L_nh\ln\frac{1}{|\tau|}\right)+\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu h_2^{(\nu)}(0) \tag{1.3.55}$$

の形をしている．ただし f は $\mathcal{S}_n$ 上の連続線形汎関数である．

さて，$\mathcal{S}(R_4)$ の任意の基礎関数 $u(p)$ は公式

$$h(\tau)\equiv(Mu)(\tau)=\int_{R_4}u(p)\delta(\tau-p^2)d^4p \tag{1.3.56}$$

により $\mathscr{H}$ の一つの関数に写像することができる．ここでは，十分に厳密とはいえないけれども，関数 (1.3.56) が (1.3.52) の形に表わせることを示す一つの議論を引用しておこう．積分 (1.3.56) は，球座標 $\boldsymbol{p}=\rho\boldsymbol{e}$ で書いて，p^0 と角（すなわち単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の方向）の分を実行したとすれば，

$$h(\tau)=(Mu)(\tau)=\iint\frac{u(\sqrt{\tau+\rho^2},\ \rho\boldsymbol{e})+u(-\sqrt{\tau+\rho^2},\rho\boldsymbol{e})}{2\sqrt{\tau+\rho^2}}\rho^2d\rho d\Omega_{\boldsymbol{e}}$$

$$=\int_{\theta(-\tau)\sqrt{-\tau}}^{\infty}\frac{\varphi(\tau+\rho^2,\rho^2)}{\sqrt{\tau+\rho^2}}\rho^2d\rho \tag{1.3.56 a}$$

となる．ここに，θ は階段関数 (1.2.15) であり，また

$$\varphi(\omega^2,\rho^2)=\frac{1}{2}\int(u(\omega,\rho\boldsymbol{e})+u(-\omega,\rho\boldsymbol{e}))d\Omega_{\boldsymbol{e}}$$

は，その変数について無限に滑らかな急減少関数になっている．$h(\tau)$ が τ について微分可能でないとしたら，それは，ρ についての積分の下限における特異性による以外にない，大きい ρ に対しては関数 φ が急減少するからである．変数変換

$$x=\sqrt{\tau+\rho^2}-\rho,\qquad \text{すなわち}\qquad \rho=\frac{\tau-x^2}{2x}$$

により，$\tau>0$ のとき積分 (1.3.56 a) への下限の近傍の寄与は

---

[1] Gårding と Lions に述べられているのは $\mathcal{D}^*(R_4)$ の不変超関数の一般形であるが，すべての議論は難なく $\mathcal{S}^*(R_4)$ の一般関数の場合に移される．

$$\int_A^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\left(\frac{\tau+x^2}{2x}\right)^2, \left(\frac{\tau-x^2}{2x}\right)^2\right)\frac{(\tau-x^2)^2}{4x^3}dx \qquad (0 < A < \sqrt{\tau})$$

の形に直せる．A が $\sqrt{\tau}$ に十分に近いなら関数 φ を上限で値 $\varphi(\tau, 0)$ におきかえてよい．残る初等積分から $\tau \ln \tau$ という τ に関して微分不可能なただ一つの項がでるのである．読者はこれを確かめよ．関数 φ を $x=\sqrt{\tau}$ のまわりで Taylor 展開して考えれば，積分 (1.3.56 a) から出る．$\tau=0$ で特異な項は一般に $C\tau^n \ln|\tau|$ の形をしていることがわかる．n は自然数 ($n \geqslant 1$) である．

以上を準備とし，不変な偶の一般関数のクラス $\mathcal{L}^+$ は次のように規定される：一般関数 $f\in\mathcal{L}^+$ に

$$(f(p), u(p)) = (F, Mu) \tag{1.3.57}$$

によって (1.3.55) の形をした $\mathcal{H}$ 上の汎関数 F に対応させると，この対応は1対1になる．ただし，M は (1.3.56) で定義された $\mathcal{S}(R_4) \to \mathcal{H}$ の演算子である．

それゆえに Lorentz 不変な偶の一般関数は，$f(p) = M^*(F(\tau))$ の形をしていることになる．ここに M^* は M の共役演算子である：

$$(F(\tau), (Mu)(\tau)) = ((M^*F)(p), u(p)).$$

問題　1.3.10　(Gorgé (1966) を参照)

$$M^*l_k = \frac{\pi}{4^{k-1}k!\,(k-1)!}\square^{k-1}\delta(x)$$

となることを示せ．ここで l_k は (1.3.53) で定義された $\mathcal{H}$ 上の汎関数である．

$\mathcal{L}^-$ の関数，つまり Lorentz 不変で奇な任意の関数は，大雑把にいうと，

$$f(p) = \varepsilon(p^0) f_1(p^2) \tag{1.3.58}$$

の形に表わせる．$\tau < 0$ のとき $f_1(\tau) = 0$ で，$\varepsilon(p^0)$ は符号関数である．

この命題のもっと厳密な定式化は，クラス $\mathcal{L}^+$ に対して上に行なったのと同様な仕方で行なえる．ただし，(1.3.56) の代わりに，空間 $\mathcal{S}(V)$ を $\mathcal{S}(R^+)$ 上に写す演算

$$M_1u(\tau) = \int u(p)\,\varepsilon(p^0)\,\delta(\tau-p^2)\,d^4p \tag{1.3.59}$$

を利用することになる．ここに，V は光円錐の内部 $p^2>0$ であり，R^+ は実軸の正の部分，そして $\mathcal{S}(G)$ は1.3節に定義されている (Gårding=Lions (1959) を参照)．

不変な一般関数が負でない場合には，結果はもっと簡単になる．あとで必要なのは，Källén=Lehmann の定理の証明（第3章 4.5節）などのようにまさにこの場合だから，説明を加えておこう．

まず一般関数 f が負でないとは，任意に選んだ非負値の基礎関数 u に対して，常に

$$(f, u) \geqslant 0 \tag{1.3.60}$$

が成り立つこととする．Riesz の定理（1.2節の例2を参照）によれば，任意の負でない一般関数 $f\in\mathcal{S}^*$ は，ある緩増加な負でない測度 $\mu(p)$ を用いて多重 Stieltjes 積分

$$(f, u) = \int u(p)\,d\mu(p) \tag{1.3.61}$$

の形に表現されるのであった．

測度は一般関数の極めて特殊な場合である．もし $d\mu(p)=f(p)\,d^4p$ ならば，$f(p)$ は δ- 関数型の特異性はもってよいが，δ- 関数の導関数ではありえない．D を階数が 0 でない定数係数の微分演算子とするとき $D\delta(p)$ 型の特異性はもてないのである．このために負でない不変測度の表現は一般の場合よりも直観的にわかり易くなる：——

$\mathcal{S}^*$ に属する偶かつ負でない不変測度の一般形は，

$$d\mu(p)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(p^2-\tau)\,d\rho(\tau)+c\delta(p)\right\}d^4p \qquad (1.3.62)$$

と書ける．ここに $\rho(\tau)$ は実数軸上の緩増加で単調な非減少関数で，$c\geqslant 0$．$\mathcal{S}^*$ に属する奇の不変測度の一般形は，

$$d\mu(p)=\left\{\varepsilon(p^0)\int_0^{\infty}\delta(p^2-\tau)\;d\sigma(\tau)\right\}d^4p \qquad (1.3.63)$$

である．ここに，$\sigma(\tau)$ は任意の有限区間 $[0, A]$ 上で有界変動で全変動 $\mathrm{V}_0^A\sigma(\tau)$ が A に関して緩増加な関数である．

問題　1.3.11　(1.3.56)～(1.3.59) の一般的な表現を用いて表現 (1.3.62)，(1.3.63) を証明せよ．

物理学への応用でしばしば遭遇する一連の不変な一般関数を第 3 章の付録に例示する．

付録 A.　遅延型関数の Fourier 変換

3.2 節で遅延型と先発型の一般関数の概念を定義した．後で必要になるので，これらの関数とその Fourier 変換の若干の性質を調べておこう．話をはっきりさせるために遅延型の関数について述べる．先発型の関数に関する結果は変換 $x\to -x$ により得られる．

$\breve{f}(x)$ を遅延型一般関数とすれば，

$$\breve{f}(x)=0 \qquad (x\lesssim 0 \text{ のとき}) \qquad (1.\mathrm{A}.1)$$

であって，指数関数は $\mathcal{S}$ の積因子でないにもかかわらず $q\in V^+$ なら——すなわち $q^0>0$，$q^2>0$ なら——$\breve{f}(x)$ と関数 e^{-qx} との積が定義できる．実際，$\varphi_a(x)$ を $x^0+a<|x|$ で 0，$x^0+\frac{a}{2}>|x|$ $(a>0)$ で 1，他の x に対して 1 を越さない無限に滑らかな関数（例をつくることは読者にまかせる）とすれば，関数 $\varphi_a(x)\,e^{-qx}$ は積因子となり，積 $e^{-qx}\breve{f}(x)$ を

$$(e^{-qx}\tilde{f}(x), \tilde{u}(x)) = (\tilde{f}, e^{-qx}\varphi_a(x)\tilde{u}(x)) \qquad (1.\mathrm{A}.2)^{1)}$$

によって定義することができる.

問題　1.A.1　この定義が関数 $\varphi_a(x)$ の選び方によらないことを (1.A.1) を用いて示せ.

次の定理は $\mathcal{S}^*_{V+}$ に属する関数の特徴づけを与え，それが一般関数 $\tilde{f}(x)$ が遅延型関数であるための必要条件になる.

[定理 1.A.1]　一般関数 $\tilde{f}(x)$ が $\mathcal{S}^*_{V+}$ に属するためには，関数 $e^{-qx}\tilde{f}(x)$ の Fourier 変換 $f(p,q)$ が次の性質をもつことが必要かつ十分である：

1)　$f(p,q) = f(p+\mathrm{i}q) \equiv f(k)$ は管状領域 $T^+ = R_4 + \mathrm{i}V^+$ において k の解析関数[2]である ($k = p+\mathrm{i}q \in T^+$ は p が任意の実数で $q \in V^+$ という意味)；

2)　$q \in V^+$ のとき $f(p+\mathrm{i}q)$ は p の関数として積因子の集合 Θ_M に属し，q が V^+ の任意のコンパクト集合を動くとき $f(p+\mathrm{i}q)$ の軌跡は Θ_M の有界集合をなす.

証明.　a)　《必要条件》：$\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}^*_{V+}$ なら

$$f(p,q) = F(e^{-qx}\tilde{f}(x)) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{\mathrm{i}(p+\mathrm{i}q)x}\tilde{f}(x)\,d^4x \qquad (1.\mathrm{A}.3)$$

は定理で列挙された性質をもつことを証明しよう.

いま，V^+ における相対コンパクト集合 $V^+(\delta, A)$ $(0<\delta<A)$ の族を

$$|\boldsymbol{q}|+\delta < q^0 < A \text{ ならば,} \quad q \in V^+(\delta, A) \qquad (1.\mathrm{A}.4)$$

によって定める．ただし，$|\boldsymbol{q}| = \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$.　定理の《必要条件》の部分の証明は次の二つの補題から直ちに得られる：

[補題 1.A.1]　(1.A.3) の関数 $f(p,q)$ は $q \in V^+$ なら p と q に関し無限回微分可能な普通の関数である．任意の δ と A $(0<\delta<A)$ に対し $q \in V^+(\delta, A)$ ならば，$f(p,q)$ は p の関数として導関数とともに q に関して一様に有界である.

[補題 1.A.2]　(1.A.3) の関数 $f(p,q)$ はすべての $k = p+\mathrm{i}q \in T^+$ に対し k に関する解析関数である.

補題 1.A.1 の証明

---

1)　積 $e^{-qx}\tilde{f}$ は遅延型関数に対してのみ定義できるのではなく，一般に，上の性質をもつ関数 $\varphi_a(x)$ を任意に選んで $a \to \infty$ としたとき (1.A.2) の右辺の極限が存在するようなすべての一般関数に対して定義できる．たとえば，一般関数として見た関数 $\exp(-x^{0 2}-\boldsymbol{x}^2)$ は明らかに e^{-qx} との積が作れるのである．$q \in V^+$ のとき $e^{-qx}\tilde{f} \in \mathcal{S}^*$ となる一般関数の全体を記号 $\mathcal{S}^*_{V+}$ で表わそう.

2)　解析関数 $f(k)$ を一般関数 $\tilde{f}(x)$ の Laplace 変換という.

1) δ に依存する自然数 n と錐 V^+ に属する（しかし，一般には V^+ の部分集合 $V^+(\delta, A)$ には属さない）ベクトル $q_1, \cdots, q_n$ とを見つけて，任意の $q\in V^+(\delta, A)$ を

$$q=\alpha_1 q_1+\cdots+\alpha_n q_n \qquad \left(\alpha_\nu>0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu=1\right) \tag{1.A.5}$$

の形に表わすことが常に可能である．

実際，$\delta>0$ だから，二次元球面 $q^0=A+\delta$，$|\boldsymbol{q}|=A-\delta$ のまわりを，同じ超平面 $q^0=A+\delta$ 上にあって球 $|\boldsymbol{q}|=A$ に含まれる多面体で囲むことができる．この多面体の頂点の位置ベクトルとベクトル $(\delta, 0, 0, 0)$ とが求める基底 $q_1, \cdots, q_n$ を形成する．

2) 条件 1) に従って選ばれたベクトルを $q_1, q_2, \cdots, q_n$ とすれば，$q\in V^+(\delta, A)$ のとき

$$\varphi_0(x)=\frac{e^{-qx}}{e^{-q_1x}+\cdots+e^{-q_nx}} \tag{1.A.6}$$

は基礎関数の空間 $\mathcal{S}$ に属する．

まず関数 $\varphi_0(x)$ は無限に滑らかである．次に $\|x\|\to\infty$ のとき，φ_0 が指数関数的に減少することを示そう．ここに，

$$\|x\|=\sqrt{x_0^2+\boldsymbol{x}^2}. \tag{1.A.7}$$

いま，x を任意のベクトルとし $m=m(x)$ を

$$q_m x=\min_{\nu=1,2,\cdots,n}\{q_\nu x\} \tag{1.A.8}$$

の条件で選ばれた番号とすれば，(1.A.5) により

$$0<\varphi_0(x)<e^{-qx+q_mx}=\prod_{\nu=1}^{n}e^{\alpha_\nu(q_m-q_\nu)x}.$$

他方，(1.A.8) から，α_ν が正であることを考慮して

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(q_\nu-q_m)x\geqslant\eta\|x\|. \tag{1.A.9}$$

ここで $\eta>0$ は x および m によらない．もしそうでないとするとベクトル $q_\nu-q_m$ のすべてに直交する 0 でないベクトル x が存在することになるが，四次元空間の任意のベクトルがベクトル $q_\nu-q_m$ の線形結合の形に表わされるのであるから，そのようなことは起こり得ないのである．こうして，

$$0<\varphi_0(x)<e^{-\eta\|x\|}. \tag{1.A.10}$$

同様な評価が関数 $\varphi_0(x)$ の導関数に対しても成り立つ．これで $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}$ が証明された．

3) $\tilde{f}(x)$ が遅延型関数で $q_\nu\in V^+$ だから，(1.A.2) に従って積 $e^{-q_\nu x}\tilde{f}\in\mathcal{S}^*$ が定義される．一方において

$$e^{-qx}\tilde{f}(x)=\varphi_0(x)\sum_{\nu=1}^{n}e^{-q_\nu x}\tilde{f}(x)$$

で，この関数の Fourier 変換は二つの因子それぞれの Fourier 変換

$$F\left(\sum_{\nu=1}^{n}e^{-q_\nu x}\tilde{f}(x)\right)\in\mathcal{S}^*, \qquad \psi_0(p)\equiv F(\psi_0(x)\in\mathcal{S}$$

のたたみこみに等しい：

$$f(p,q)=f(k)\equiv F(e^{-qx}\tilde{f}(x))=F\left(\sum_{\nu=1}^{n}e^{-q_\nu x}\tilde{f}(x)\right)*\psi_0(p) \tag{1.A.11}$$

ゆえに，任意の固定した $q\in V^+$ に対し $f(p,q)$ は p の関数として無限回微分可能であり，すべての導関数とともに有界なことが導かれる．q が $V^+(\delta, A)$ を動くと関数 $\varphi_0(x,q)$ は $\mathcal{S}$ の有界集合を動

くから，$f(p,q)$ は p の関数として導関数とともに変数 p の各コンパクト集合上で一様有界である．これで補題 (1. A. 1) が証明された．

補題 1. A. 2 の証明は読者にまかせる（ヒント：関数 $f(p,q)$ が p だけでなく q についても微分可能であることを証明し，それらの導関数が Cauchy=Riemann の関係式をみたすことを示せ）．以上で定理 1. A. 1 の必要な部分の証明が完了する．

証明. b)　〈十分条件〉：もし q が V^+ の任意のコンパクト集合を動くとき，関数 $f(k) = f(p+\mathrm{i}q)$ が解析関数であり p の関数として導関数とともに q に関し一様に有界ならば，$\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}^*_{V+}$ となることを証明する．

いま，

$$\tilde{f}_{(q)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-\mathrm{i}px} f(p+\mathrm{i}q)\, d^4p \qquad (1.\mathrm{A}.12)$$

とし，$g_{(q)}(x) = e^{qx}\tilde{f}_{(q)}(x)$ とおく．容易にわかるとおり，$g_{(q)}(x)$ は q によらない，つまり $\partial g_{(q)}(x)/\partial q_\alpha = 0$ で $g_{(q)}(x) = \tilde{f}(x)$ である．従って，

$$\tilde{f}_{(q)}(x) = e^{-qx}\tilde{f}(x)$$

だから，$\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}^*_{V+}$．これでついに定理 1. A. 1 が証明された．

問題　1. A. 2　$\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ とが空間 $\mathcal{S}^*_{V+}$ に属するならば，たたみこみ $\tilde{f}(x) * \tilde{g}(x)$ も $\mathcal{S}^*_{V+}$ に属し，等式

$$F\{e^{-qx}(\tilde{f} * \tilde{g})\} = F(e^{-qx}\tilde{f}(x))F(e^{-qx}\tilde{g}(x)) \qquad (1.\mathrm{A}.13)$$

が成り立つことを示せ（ヒント：容易に確かめられる等式

$$e^{-qx}\tilde{f}(x) * e^{-qx}\tilde{g}(x) = e^{-qx}(\tilde{f}(x) * \tilde{g}(x)) \qquad (1.\mathrm{A}.14)^{1)}$$

を利用せよ）．

遅延型一般関数を関数空間 $\mathcal{S}^*_{V+}$ 全体のなかから選び出すことを可能にする特徴を知っておくことが後で必要になる．次の定理はそうした判定条件を与える．

[定理 1. A. 2]　$\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}^*_{V+}$ とし $f(k)$ をその Laplace 変換とする．$\mathrm{supp}\,\tilde{f}(x) \subset \bar{V}^+$ であるためには，定数 A, n, r が存在して，

$$|f(p+\mathrm{i}q)| \leqslant A\frac{(1+\|p+\mathrm{i}q\|)^n}{(q^2)^r} \qquad (p+\mathrm{i}q \in R_4+\mathrm{i}V^+) \qquad (1.\mathrm{A}.15)$$

となることが必要かつ十分である．

証明. a)　〈必要条件〉：$\mathrm{supp}\,\tilde{f} \subset V^+$ とせよ．このとき $\tilde{f}(x)$ と $\tilde{h}_N(x) = \theta(x^0)$

---

1) 問題 1. A. 2 の命題は，次のようにもいい表わせる．空間 $\mathcal{S}^*_{V+}$ はたたみこみに関し《代数》をなす．線形空間は線形結合に加えて《積》あるいは《たたみこみ》が定義されているとき，代数とよばれるのである．

$\theta(x^2)(x^2)^{N-2}$ $(N=3,4,\cdots)$ は遅延型関数の作るたたみこみ代数に属する (3.2 節を参照). 従って $\tilde{f}_N(x) = \tilde{f}(x) * \tilde{h}_N(x)$ が存在し，その台は $\overline{V}^+$ に含まれる.

十分大きな N では $\tilde{f}_N(x)$ が緩増加連続関数になることを示そう. 実際，1.3 節の結果から $\tilde{f}(x)$ は緩増加な測度 μ_α を用いて $\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha \mu_\alpha$ の形に表わされる. 実数直線上の無限回微分可能な関数 $\lambda(t)$ で $t<-1$ のとき $\lambda(t)=0$, $t>-1/2$ では $\lambda(t)=1$ なるものを考えよう. そうすると $\lambda(x^0)\lambda(x^2)$ は $\mathcal{S}^*$ の積因子であって $\overline{V}^+$ を含む近傍で 1 に等しいので, $\tilde{f}(x) = \lambda(x^0)\lambda(x^2)\sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\mu_\alpha$ としてもよい. これは緩増加な測度 μ_α の台が $\overline{V}^+_{(3)} = \{x\,;|\boldsymbol{x}|\leqslant x^0+3\}$ に含まれる[1]としてよいことを意味する：

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\mu'_\alpha, \qquad \operatorname{supp}\mu'_\alpha \subset \overline{V}^+_{(3)}.$$

$\tilde{h}_N$ と μ'_α の台の性質により，たたみこみ $\tilde{h}_N * \mu'_\alpha$ の存在が保証される；$\tilde{h}_N(x)$ は $N-3$ 回連続的微分可能で μ'_α は測度だから，たたみこみは積分形

$$(\tilde{h}_N * \mu'_\alpha)(x) = \int \tilde{h}_N(x-y)\, d\mu'_\alpha(y)$$

に書ける. そして，積分領域は x がコンパクト集合を動くとき常に有界であり，$\tilde{h}_N*\mu'_\alpha$ は $N-3$ 回連続的微分可能でその導関数は緩増加である. 従って $N\geqslant\sigma+3$ の場合なら,

$$\tilde{f}_N = \tilde{f} * \tilde{h}_N = \tilde{h}_N * \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha\,\mu'_\alpha = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} D^\alpha(\tilde{h}_N * \mu'_\alpha)$$

は連続である.

こうして $\tilde{f}_N(x)$ は連続な緩増加な関数で台が $\overline{V}^+$ に含まれることがわかった. この場合，関数 $\tilde{f}_N(x)$ の Laplace 変換に対し評価：

$$\begin{aligned} |f_N(p+iq)| &= \frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int \tilde{f}_N(x)\, e^{ipx-qx}\, d^4x\right| \\ &\leqslant A_1\int_{V^+}(1+x^0)^m e^{-qx} d^4x = A_1\left(1-\frac{\partial}{\partial q^0}\right)^m \int_{V^+} e^{-qx} d^4x \\ &= A_1\left(1-\frac{\partial}{\partial q^0}\right)^m \frac{1}{(q^2)^2} \leqslant A_2\frac{(1+\|q\|)^{2m}}{(q^2)^{m+2}} \end{aligned} \tag{1.A.16}$$

が成り立つ.

さて，$\tilde{f}(x)$ の Laplace 変換に移ろう. $(\square)^N\tilde{h}_N(x) = \dfrac{1}{\alpha^N}\delta(x)$ (α_N は適当な定数) だから,

$$\tilde{f} = \tilde{f} * \delta = \alpha_N\tilde{f} * (\square)^N\tilde{h}_N = \alpha_N(\square)^N(\tilde{f} * \tilde{h}_N) = \alpha_N(\square)^N\tilde{f}_N.$$

---

[1] もう少し強い結果が得られることを，V. S. Vladimirov が示した. $\overline{V}^+$ に台をもつ測度 μ_α を選ぶことができる ([24] の 35 頁を見よ).

これは

$$f(k) = \alpha_N(-k^2)^N f_N(k)$$

を意味する．それゆえに (1. A. 16) から評価 (1. A. 15) が得られる．

証明． b)《十分条件》：不等式(1. A. 15)が成り立つとせよ．自然数 N を $N \geqslant (n+5)/2$ に選んで T^+ で正則な関数 $f_N(k) = \dfrac{1}{\alpha_N(-k^2)^N} f(k)$ を定義しよう．$f(k)$ は定理 1. A. 1 の条件をみたすから，$f_N(k)$ もみたす；従って $\tilde{f}_N(x) \in \mathcal{S}^*_{\bar{V}^+}$ が存在して $f_N(k)$ はその Laplace 変換となる：

$$\tilde{f}_N(x) = e^{qx}\tilde{F}f(p+\mathrm{i}q).$$

もし a が V^+ の固定したベクトルで，$q \in Q_a = \{ta\,;\,t \geqslant 1\}$ ならば

$$|k^2|^2 = (p^2-q^2)^2+4(pq)^2 \geqslant C_1(a)\,(1+\|p+\mathrm{i}q\|)^4;$$

この場合

$$|f_N(p+\mathrm{i}ta)| \leqslant C_2(a)\frac{(1+\|p+\mathrm{i}ta\|)^n}{(1+\|p+\mathrm{i}ta\|)^{2N}t^{2r}} \leqslant \frac{C_3(a)}{(1+\|p\|)^5}.$$

従って q が半直線 Q_a を動くとき，$f_N(p+\mathrm{i}q)$ は p の関数として可積分関数の空間の有界集合を動く．そうすると，Fourier 変換は t に関して一様有界な連続関数である：

$$|\tilde{F}f(p+\mathrm{i}q)| \leqslant C(a);$$

従って

$$|\tilde{f}_N(x)| \leqslant e^{tax}C(a).$$

最後の不等式から $\mathrm{supp}\,\tilde{f}_N \subset \overline{V}^+$ がわかる．実際 $x \notin \overline{V}^+$ ならば，$xa<0$ となるような $a \in V^+$ が存在する；$t \geqslant 1$ は任意だから $f_N(x) = 0$.

さて，一般関数 $\tilde{g} = \alpha_N(\Box)^N\tilde{f}_N$ を考えよう．明らかに $\tilde{g}$ の台も $\overline{V}^+$ に含まれる．$\tilde{g}$ に対する Laplace 変換 $g(k)$ は $\alpha_N(-k^2)^N f_N(k) = f(k)$ に等しい．従って $\tilde{g} = \tilde{f}$．これで定理は証明された．

付録 B.　特異点を共有する一般関数の積

一般関数の空間に双線形で結合的な積を一義的には定義できないことは2.4節に述べた．困難は積の二つの因子が同一の点で特異性をもつときに生ずる．ここでは，一般関数の空間 $\mathcal{S}^*$ のある部分空間で，その仲間同志ならたとえ特異点が一致しても積が一義的に定義できるようなものを考察する．また，一般関数の積の例で基礎関数の空間 $\mathcal{S}$ 全体では一義的に定まらず，ただ部分空間 $\mathcal{S}_{(0)}$ の上だけで定義されるといったものも考える．

そして，これらの二つの場合について場の量子論からの例を示すことにしよう．

3.2 節の定理 1.3.3 によれば遅延型一般関数の Fourier 変換からなる部分空間 FS^*_{ret} においてはその任意の二つの元の積が定義されることがいえる．つまり，FS^*_{ret} は位相環をなす．

例として，二つの負振動数の Pauli=Jordan 関数 $D^{(-)}(x)$ の積を考察しよう．場の量子論に現われる特異関数については，第3章の付録にその要約がある．(3.A.4) は，この関数が光円錐 $x^2=0$ 上に特異点をもつことを示す．x 空間でこの式を見た限りでは積がつくれるなどとはまったく思えない．しかし，それらの積が，たたみこみ

$$(\widetilde{D}^{(-)}_M * \widetilde{D}^{(-)}_m)(p) = \int \widetilde{D}^{(-)}_M(q)\,\widetilde{D}^{(-)}_m(p-q)\,d^4q$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \theta(-q^0)\,\theta(q^0-p^0)\,\delta(q^2-M^2)\,\delta((p-q)^2-m^2)\,d^4q$$

$$= -\frac{\theta(-p^0)\,\theta(p^2-(M+m)^2)}{8\pi p^2}\{[p^2-(M+m)^2][p^2-(M-m)^2]\}^{1/2} \qquad (1.\mathrm{B}.1)$$

の Fourier 変換として定義できるのである（最後の式を導く積分の計算は第4章で詳しく述べる．(4.4.20) を見よ)．関数 (1.B.1) は連続でかつ無限遠で有界な普通の関数であることに注意しよう．この例においてなぜたたみこみが存在するか，その理由は明白である：(1.B.1) の積分は，つまりは，双曲面 $q^0=\sqrt{M^2+\boldsymbol{q}^2}$ 上のある有限部分の〈位相体積〉の勘定なのだ．被積分関数にある θ-関数が二つの側から q^0 の積分範囲を制限しているからである．

一般関数の積が $\mathcal{S}$ 全体では，一意に定まらないという第二の場合の例としては，変数の一致した因果性関数（第3章の付録を参照）の積があげられる．そんなときどうするのかを例示するために，一次元の簡単な場合をとり，階段関数 $\theta(t)$ と Dirac 関数 $\delta(t)$ の積を考えてみよう．明らかにこの積は，座標原点で0になるすべての基礎関数 $v(t)$ からなる $\mathcal{S}$ の部分空間 $\mathcal{S}_{(0)}$ 上ではうまく定義されて，常に

$$(\theta(t)\,\delta(t),\,v(t)) = 0 \qquad (v(0)=0) \qquad (1.\mathrm{B}.2)$$

となる．実際に $\delta(t)$ を連続関数列 $\delta_n(t)$ で近似してみるがよい．$v(0)=0$ ならば $\lim\int\theta(t)\,\delta_n(t)\,v(t)\,dt=0$ となるのは列 $\{\delta_n\}$ の特定な形にはよらないのである．一歩進めて，$\theta(t)\delta(t)$ を汎関数 (1.B.2) の全空間 $\mathcal{S}$ 上への拡張として定義しよう．除法の問題について 2.4 節で行なった議論により，拡張された関数の一般形が，C を任意の定数として，

$$\theta(t)\delta(t) = C\delta(t) \tag{1.B.3}$$

となることがわかる．こうして定数倍の任意性を除いて積が定義された．ところで，関数 θ と δ の Fourier 変換のたたみこみを (1.3.8) と (1.3.9) から求めれば発散してしまう：

$$(\tilde{\theta} * \tilde{\delta})(\omega) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'+\mathrm{i}0} = \infty. \tag{1.B.4}$$

それにもかかわらず，たたみこみ $\tilde{\theta} * \tilde{\delta}$ を用いて (1.B.3) に達することもできるのである．まず，空間 $\mathcal{S}_{(0)}$ の関数 $v(t)$——それに対して等式 (1.B.2) が成り立つ——が，$u(t)$ を $\mathcal{S}$ の任意関数として，

$$v(t) = tu(t)$$

の形に表わされることに注意しよう．Fourier 変換をすると，

$$\tilde{v}(\omega) = \mathrm{i}\frac{d}{d\omega}\tilde{u}(\omega) \qquad (\tilde{u} \in \mathcal{S}) \tag{1.B.5}$$

を得る．たたみこみ $(\tilde{\theta} * \tilde{\delta})(\omega)$ は (1.B.5) の形をした関数 $\tilde{v}(\omega)$ の空間 $\bar{\mathcal{S}}_{(0)}$ 上では汎関数として定義され，いたるところで0に等しいはずである．それゆえ，一般関数の導関数の定義から

$$\frac{d}{d\omega}(\tilde{\theta} * \tilde{\delta})(\omega) = 0$$

が導かれ，結局

$$\tilde{\theta} * \tilde{\delta} = C,$$

つまり，(1.B.3) に同値な結果に達する．この議論を一貫して ω 表示のままで正確に行なうためには，(1.B.4) のような無意味な式に出会わないように関数 $\delta(t)$ をまず《正則化する》——$\delta(t)$ を $\delta(t)$ に収束する連続関数列で置き変える——必要がある．そうして得られるたたみこみの列が0に収束することを証明するという手順をとるのである．

この例は，二つの一般関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の構成方法を暗示している．まず，問題の二つを連続関数列 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ とにより $\mathcal{S}^*$ の位相の意味で近似し，空間 $\mathcal{S}_{(0)} \subset \mathcal{S}$ としては極限

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)g_n(x)v(x)\,dx \tag{1.B.6}$$

が存在し，しかも列 $\{f_n\}$ と $\{g_n\}$ の特別な選び方によらないような基礎関数 $v(x)$ の空間をとる．そして，この空間上では積 $f(x)g(x)$ は極限 (1.B.6) に等しいと定める．こうして得られる線形汎関数を任意の方法で全空間 $\mathcal{S}$ 上連続線形汎関数に拡張して，その結果の全体を f と g の積 fg と定義するのである．

こういうわけで，二つの一般関数の積が常に一つの一般関数になるとは限らず，一般には無限個の一般関数の集まりとなる．上の例 (1. B. 3) のように集合 fg が，有限個のそれほど多くないパラメータで記述しきれる一般関数の組である場合なら，この種の定義も見通しがきき，従って内容のあるものといえよう．因果性関数の積について事態は正にそうなっている[1]．こうした積の一般理論 (Bogoliubov=Parasiuk (1957) を参照せよ)はこの辺で止めにして，以下では，質量 m のギ・スカラー（またはスカラー）中間子と相互作用している質量 M のスピノル粒子（核子）の自己エネルギーのグラフ ([4]，§33 あるいは [6]，第15章 §8 を参照）に対応した積

$$F(x) = D^c_m(x)\, S^c_M(x) \tag{1. B. 7}$$

という特別な場合を考えよう．$D^c_m(x)$ は公式 (3. A. 9) で与えられ，4行4列の行列 S^c_M は公式 (3. A. 16) により D^c_M から導かれる．

(1. B. 7) では，二つの因子が Lorentz 不変な一般関数であるから，積を定義する集合も Lorentz 不変な関数からなることを要請しよう．この要請は積の定義の任意性を若干せばめる．

先に考察した一次元の例 (1. B. 3) と同様に，関数 D^c と S^c との Fourier 変換のたたみこみもまた運動量 q が大きいところで，発散する．しかし，今度もそのたたみこみが空間 $\mathcal{S}(R_4)$ のある部分空間上では定義可能であることを示そう．まず一般的な処方に従って関数 D^c と S^c を正則化する．それは摂動論における Pauli=Villars の正則化であって，これは Lorentz 不変性を保存する：

$$\mathrm{Reg}\,[D^c_m(x)] = f_n(x, m)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\left\{\frac{1}{m^2-p^2-\mathrm{i}0}-\frac{1}{M_n^2-p^2-\mathrm{i}0}\right\} e^{\mathrm{i}px}\, d^4p = D^c_m(x) - D^c_{M_n}(x) \tag{1. B. 8}$$

$$\mathrm{Reg}\,[S^c_M(x)] = g_n(x, M) = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + M) f_n(x, M).$$

これが正則化であるというのは $n\to\infty$ のとき，$M_n\to\infty$ とすれば，$\mathcal{S}^*$ の位相に関して $f_n(x, m) \xrightarrow[n\to\infty]{} D^c_m(x)$ となるからである．なお，最後の式の γ^μ は Dirac の行列である．

問題 1. B. 1　たたみこみの列

$$(\tilde{f}_n * \tilde{g}_n)(p)$$

---

[1] 場の量子論の初歩を学んでいない読者は第2章，第3章を読んでから以下の例に戻るのがよい．

は関数

$$v(p)=\frac{\partial^2 u}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \qquad (u(p)\in \mathcal{S}(R_4))$$

からなる $\mathcal{S}(R_4)$ の部分空間 $\mathcal{S}_{(c)}$ 上で収束することを示せ.

この問題の結果から，求めるべきたたみこみ

$$\widetilde{F}(p) = (\widetilde{D}^c_m * \widetilde{S}^c_M)(p) \tag{1.B.9}$$

について，あらゆる二階偏導関数 $\partial^2\widetilde{F}/\partial p^\mu\partial p^\nu$ を偏導関数列 $(\partial^2/\partial p^\mu\partial p^\nu)(\tilde{f}_n * \tilde{g}_n)$ の $\mathcal{S}^*$ の位相に関する極限として定義することが可能となる.

それ自身が不変なテンソル関数 $F(p)$ は，明らかに，その二階の偏導関数によって付加項

$$C_1 1 + C_2\gamma^\mu p_\mu \tag{1.B.10}$$

の任意性を除いて一意的に定義される. C_1 と C_2 は任意定数である. 摂動論によって二点 Green 関数を計算するときには，これらの定数は，くりこみの条件

$$\widetilde{F}(p)|_{p^2=M^2} = \left.\frac{\partial \widetilde{F}(p)}{\partial p^\mu}\right|_{p^2=M^2} = 0 \tag{1.B.11}$$

によって定められる（第4章 4.2 節を参照せよ).

最後に注意しておきたいのは，たたみこみ (1.B.9) あるいは積 (1.B.7) の定義の手続きは正則化 (1.B.9) の式を必要としないより簡潔な方法に置き換えられるということである. (1.B.9) をそのまま書いた積分

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{(M-\gamma^\mu q_\mu)\,d^4q}{[m^2-(p-q)^2-\mathrm{i}0]\,(M^2-q^2-\mathrm{i}0)} \tag{1.B.12}$$

は発散するから，これは形式的な式でしかないが，これを積分記号の下で p^μ と p^ν に関し微分する. そうすると積分は収束するから，これを $\partial^2\widetilde{F}/\partial p^\mu\partial p^\nu$ に等しいと定義する. ここで不変性の条件を使えば付加項 (1.B.10) に二つの任意パラメータをもつ汎関数の集合としてたたみこみ $\widetilde{F}$ が得られることになる.

文 献 案 内

§1. ノルム空間とその共役空間とについて深く知りたい読者には [10] を薦めよう．可算ノルム空間の理論はたとえば [12]，[13] にある．Hilbert 空間における演算子の古典的な理論については [15] と [20] がよい：百科全書的な [11] には最も完全な記述がある．

空間 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{S}$ における核定理は Schwartz (1952) により証明された．Schwartz (1953/54) は核型演算子という概念も導入している．核型空間の一般的定義は Grothendieck(1955) が与えた．

(Pietsch [14] もまた参照せよ)．これらの問題のわかり易い叙述が [13] にある．Gelfand の三つ組の概念は本質的には Gelfand と Kostyuchenko (1955) により導入された ([13] も参照)．一般化された固有ベクトルの完全系の存在に関する定理は Gelfand の三つ組の代わりに一対の Hilbert 空間を用いて自然な形に定式化されている (Kats (1960) と Berezanskii [21] を参照)．

§2. 台が有限で滑らかな関数上の線形汎関数としての一般関数は Sobolev (1936) により初めて導入された．Schwartz (1945) ([17] も参照) は Sobolev の考えを発展させ，線形位相空間の一般論を導入して，空間 $\mathcal{D}$ や $\mathcal{S}$ 上の汎関数としての超関数や一般関数の現在の理論をつくり上げた．$\mathcal{S}^*$ に属する一般関数と同じものを，ある種の関数族 $C(p,q;m)$ の上の汎関数として定義することもできる．この定義を利用しているのは Bogoliubov (たとえば [1] の付録 A を参照) である．基本列の同値類としての一般関数のもうひとつの定義は Mikusiński [22] と Tagamlitskii (1954-1956) とにより与えられた．Bargmann (1967) は一般関数の空間 $\mathcal{S}^*$ と整関数のつくるある空間とのあいだの興味ある同形を発見している．任意の二つの一般関数の積は定義できないという注意は Schwartz (1954) による．場の量子論における因果性関数のかけ算については Bogoliubov=Parasiuk (1957) を参照せよ．一変数関数の場合の除法の問題は Schwartz [17] により解かれ，多変数関数の場合は Malgrange (1953)，Ehrenpreis (1954)，Hörmander (1954) が解いた．一般関数の理論とその応用について系統的かつ現代的な叙述を Gelfand 一派の大部の書物 [18 12, 13, 23] が与えている．

§3. $\mathcal{S}$ の基礎関数と $\mathcal{S}^*$ の一般関数に対する Fourier 変換の理論とその応用は Schwartz [17] の第2巻に展開されている．Lorentz 不変な一般関数の一般形は Methée (1954)，(1955) (Methée (1957) も参照)，および Gårding=Lions (1959) に与えられている；不変関数とその Fourier 変換の一覧表が Gorgé (1966) に引用されている．

付録 A 定理 1.A.1 は Schwartz (1952) と Lions (1952-1953) による ([24] も参照せよ)．定理 1.A.2 の証明は Bros et al. (1967) の考えに基づく．

付録 B 場の量子論における因果性関数の多重積の理論は Bogoliubov=Parasiuk (1957) が研究した (Hepp (1966) も参照)．

[訳者補足] 線形位相空間と一般関数に関して [山中] がよい参考書である．核型空間の一つの定義の仕方について [越] が，Hilbert 空間の核型拡大については [梅村] がある．

第2章　相対論的量子論の一般原理

要　約

場の量子論の基本的諸要請を定式化するには，いろいろちがったやり方があるが，そのいずれにも共通なある一般的部分，つまり本質的にはまったく等しい部分がある．それは，状態を表わす確率振幅の諸性質のうちで，場や S 行列の概念を導入するに先立って定式化が可能な部分である．

状態ベクトルの空間は正定値計量をもつ Gelfand の三つ組として定義される（§1）．従って不定計量をもった理論（たとえば量子電気力学）は，はじめから考察の対象外に置かれる．Gelfand の三つ組 $\Omega \subset \mathscr{H} \subset \Omega^*$ のうちには，$\mathscr{H}$ に属する普通の規格化できる状態のほかに，Ω^* に属する規格化できない一般状態も含まれている．このような状態に対しては，物理量の期待値の相互の比のみが定義できる（1.1節）．状態ベクトルの Hilbert 空間を Gelfand の三つ組に拡げるやり方は，その Hilbert 空間でどのような演算子を問題とするかに応じていろいろありうる．Gelfand の三つ組を具体的に構成する例題としては，有限自由度の量子力学の場合（1.2節）および相対論的量子論の場合（3.2節と§5）を扱う．

相対論的不変性の要請とは，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ において，スカラー積の絶対値を保存するような Poincaré 群の表現すなわち《位相因子だけ不定な表現》が実現されるという要求を意味する．§3で略述する Wigner と Bargmann の分析は，$\mathscr{H}$ において実現されているのが Poincaré 群の普遍被覆群 $\tilde{\mathscr{P}}$ の一価表現であることを示している．Poincaré 変換が時間反転を含む場合には，表現の演算子は反ユニタリとなり（3.3節），含まないときにはユニタリである．固有 Poincaré 群の普遍被覆群 $\mathscr{P}_0$ は2行2列の行列の組 $(\underset{\sim}{a}, A)$ の集合にほかならない．ここで $\underset{\sim}{a}$ は 2×2 のエルミート行列，A は複素ユニモジュラ行列である（つまり $\det A=1$；こういう行列のつくる群を $SL(2)$ とよぶ）．群 $\mathscr{P}_0$ のかけ算の法則は（2.2.19）式

$$(\underset{\sim}{a}_1, A_1)(\underset{\sim}{a}_2, A_2) = (\underset{\sim}{a}_1 + A_1\underset{\sim}{a}_2 A_1^*, A_1A_2)$$

によって与えられる．Poincaré 群と $\mathscr{P}_0$ との関係は次のようにして見いだされる．まず各四元ベクトル $x = (x^0, \boldsymbol{x})$ に2行2列のエルミート行列 $\underset{\sim}{x}$ を

$$\underset{\sim}{x} = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}\,x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}\,x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

に従って対応させると，行列の変換

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^* + \underset{\sim}{a}$$

がベクトル x の固有 Poincaré 変換をひきおこすのである（行列 A と Lorentz 変換 Λ とのあらわな関係は (2.2.15) 式に与えられている．なお問題2.2.1も参照せよ）．

Poincaré 群には10個のパラメータがある．その エルミートな 無限小演算子（《生成演算子》ともいう）は系の四元運動量 P^μ および角運動量テンソル $M^{\mu\nu}$ と同一視される．Pauli=Lubanski=Bargmann のギ・ベクトル

$$w_\rho = \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\lambda\mu\nu}P^\lambda M^{\mu\nu}$$

を用いて，スピンの共変的な定義 (2.3.18) が与えられる．Poincaré 群の Lie 代数には，二つの多項式型不変量 (Casimir 演算子)

$$P^2 = (P^0)^2 - \boldsymbol{P}^2, \quad W = -w^2$$

がある．第一の不変量は質量の二乗を与え，その値に応じて $\mathscr{P}_0$ のユニタリ（無限次元）表現には四つのクラスが存在する．真空は Poincaré 群の恒等表現（トリヴィアルな表現）に従って変換する．スペクトルに関する要請 (3.2節) とは次の命題をいう――$\mathscr{H}$ において具体化される $\mathscr{P}_0$ の物理的表現は，真空を別にすれば，すべて $P^2 > 0$, $P^0 > 0$ のクラスに属さねばならない．

$SL(2)$ および $\tilde{\mathscr{P}}$ のスピノル表現は詳しく検討される（§4）．ついでに γ 行列の代数と Dirac 方程式に関して必要な事項を説明する．

§ 1. 状態の空間

1.1. Gelfand の三つ組と一般状態

非相対論的量子力学の場合と同様に，相対論的量子論においても物理系の状態は[1]，あ

[1] Hilbert 空間の計量は正定値が前提であるから，普通の形式による量子電気力学だけでなく Heisenberg の非線形理論（たとえば論文集 NKTP を見よ）も，またこの原則の枠内に入らないことを注意しておく．不定計量の空間を含むさらに一般的な理論形式はこの本ではとりあげない（この問題については Wightman and Gårding (1964) を参照）．

る可分な Hilbert 空間の単位ベクトル Ψ によって記述される．定数の（《位相》）因子だけちがうベクトルは同じ状態を記述する．$\mathscr{H}$ において与えられたベクトル Ψ と同一直線上にあるすべての単位ベクトルの集合を $\mathscr{H}$ における《単位射線》（あるいは《規格化された射線》）とよび，$\boldsymbol{\Psi}$ と書くことにしよう．

状態は数学的にはひとつの単位射線と同一視され，状態どうしを加えることはできない点に注意しよう．いわゆる〈重ね合わせの原理〉は $\mathscr{H}$ のベクトルについてのみ成り立つのである．

測定可能な物理量（観測量）a の各々には $\mathscr{H}$ における自己共役演算子 A が対応させられる．そのさい観測量 a に演算子 A が対応するなら，$f(a)$ には $f(A)$ が対応する．

A を物理量 a に対応する自己共役演算子とし，演算子 A の定義域に含まれるひとつの単位ベクトルを Ψ としよう（すなわち $A\Psi \in \mathscr{H}$）．量子論の基本原理のひとつが教えるところによれば，$\boldsymbol{\Psi}$ という状態にある物理系に対して，観測量 a の期待値 $\bar{a}$ は，公式

$$\bar{a} = \overline{A} = (\Psi, A\Psi) \tag{2.1.1}$$

によって与えられる．ここで $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}$である（明らかに，$\bar{a}$ の値は単位射線 $\boldsymbol{\Psi}$ から代表としてどの Ψ をとるかにはよらない）．

ただし与えられた Ψ に対し，平均値 (2.1.1) が定義されるのは $\Psi \in D_A$ となるような演算子 A についてのみである．量子力学では一般に有界でない演算子を扱うから，この断り書きを落とすわけにはゆかない．もっとも，恒等式 $\Pi^2 = \Pi$ を満足する有界な自己共役射影演算子だけで理論を構成するという別のゆき方も可能である（たとえば Jauch and Piron (1963) を見よ）．$\Pi^2 = \Pi$ を満足するから，Π の固有値は 0 か 1 以外ではあり得ない（このような演算子は答が〈然り〉，〈否〉しかありえないような物理的設問に対応する）．この場合には公式 (2.1.1) はすべての $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して意味をもち，正射影[1]演算子 Π に対応する設問への答が肯定となる確率を与えると解釈することができる．

演算子 A が固有値の離散スペクトル $a_1, \cdots, a_n, \cdots$ しかもたないならば，状態 $\boldsymbol{\Psi}$ にある物理系において物理量 a を測定したときに，値 a_n が得られる確率は

$$W_{\Psi}(a_n) = \|\Pi_n\Psi\|^2 = (\Pi_n\Psi, \Pi_n\Psi) \tag{2.1.2}$$

に等しい．ただし Π_n は，演算子 A が固有値 a_n をもつ部分空間 $\mathscr{H}_n$ 上への正射影演算

[1] 演算子 Π が，$\mathscr{H}$ の任意のベクトル Φ, Ψ に対して $(\Pi\Psi, (1-\Pi)\Phi) = 0$ となるときに，Πを正射影演算子という．容易にわかるように，$\Pi^2 = \Pi$ という条件をみたす演算子が正射影であるための必要十分条件は Π が自己共役となることである．

子である[1]．すなわち

$$A = \sum_k a_k \Pi_k .$$

問題 2.1.1 固有値が離散スペクトルだけからなる演算子に対し，条件 (2.1.1) と (2.1.2) とは同等であることを示せ ($\bar{a} = \sum a_k W_\Psi(a_k)$ を思いだせばよい)．

要請 (2.1.1) と (2.1.2) は次のもっと一般的な要請の特別な場合にあたる．これはスペクトル関数 $E_A(x)$ をもつ一般の自己共役演算子 ((1.1.47) を見よ) に対して成り立つもので，状態 Ψ にある系で物理量 a が区間 $\Delta = [\alpha_1, \alpha_2]$ 内の値をとる確率は，

$$W_\Psi(a \in \Delta) = (\Psi, E_A(\Delta)\Psi) \tag{2.1.3}$$

に等しいとするのである．

上に定式化した基本原理は，量子力学のどの教科書にも出ていて極めてよく知られている．ところがまた量子力学に関するほとんどすべての教科書では，これらの〈黄金律〉は，定式化されたすぐあとで，平面波あるいは一般に連続スペクトルをもつ演算子の〈固有関数〉の話が出てくるや否や直ちに侵犯されてしまう．量子力学の多くの問題（たとえば散乱の問題）を通常のやり方で設定するさいに，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のベクトルでは記述されぬような〈状態〉を用いることが問題なのだ．このような特異状態に対応する〈ベクトル〉に対しては一般にスカラー積が定義されていないので，それを規格化することができない．物理学者が量子力学に関する仕事のなかで使っている理論形式を（全部とはいわぬまでも）保存しながら，この困難に自然な解決を与えるものが，Gelfand の三つ組の概念（第1章1.5節参照）にほかならない．

すでに第1章で注意したように，与えられた Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ はさまざまな異なったやり方で三つ組に拡げることができる．それは $\mathcal{H}$ のなかからどのような核型空間 Ω を選びだすかに依存する．この自由度を利用して，Ω はある与えられた演算子の作用に関して不変でなければならないと要請することができる．だいたい，量子論では与えられた Hilbert 空間の可能な演算子をすべて問題とすることはなく，いわゆる演算子の〈完全な〉組と，それに属する演算子の有限個の積や和（数学の言葉でいえば演算子のある種の代数）を問題とするだけである．そこで，われわれは次のことを要求しよう（それが可能なときは）．すなわち，与えられた組に属するすべての演算子 A は Ω で定義されており，しかも $\Phi \in \Omega$ ならば $A\Phi \in \Omega$ であることを要求する．場の量子論におけるこのような Ω のつくり方は，この章の§5で与える．以下では (1.2節)，有限自由度の量子力学の場合

---

[1] これは，$\Psi_n \in \mathcal{H}_n$ なら $\Pi_k \Psi_n = \delta_{kn} \Psi_n$ が成り立つという意味である．

に，このような空間の例を検討する．

ともかくこのようにして，Gelfand の三つ組 (1.1.33) が

$$\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^* \tag{2.1.4}$$

のように定められたとしよう．Ω のベクトルで記述される状態を《正則状態》といい，共役空間 Ω^* のベクトルを《一般状態》ということにしよう（$\mathcal{H}$ のベクトルはこれまで通り単に状態とよぶ）．

ここで次の問題が生ずる——一般状態に対しては公式 (2.1.1)～(2.1.3) が使えないことは明らかであるが，それでは，一般状態はどのような物理的意味をもっているのか？一般状態に物理的意味を与えるには，第一に観測可能な物理量の範囲を制限し，第二にいろいろな測定結果について，確率の絶対値ではなく確率の比のみを考えることにしなければならない．

Gelfand の三つ組 (2.1.4) における自己共役演算子 A（第1章 定義7）は，それが一般状態 Φ を正則状態にうつすとき，すなわち $A\Phi \subset \Omega$ となるときに，Φ における《許容》観測量とよぶことにしよう[1]（この定義によれば，1をかけるという演算子も，$\Phi \notin \mathcal{H}$ に対しては許容演算子ではないことに注意せよ）．A と B を一般状態 Φ における許容観測量としよう．すると公式 (2.1.1) によって表現されている量子論の基本的要請を次の形に一般化することができる．$\Phi \in \Omega^*$ という状態において，演算子 A, B に対応する物理量 a, b の期待値の比は，

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{(\Phi, A\Phi)}{(\Phi, B\Phi)} \tag{2.1.5}$$

に等しい．なお (2.1.5) の右辺のスカラー積は，汎関数 Φ の正則ベクトル $A\Phi$（と $B\Phi$）における値と了解しなければならない．

Φ が普通の状態 ($\Phi \in \mathcal{H}$) でかつ $B=1$ という特別な場合には，公式 (2.1.5) が (2.1.1) の帰結であることは明らかである．この場合，Φ が規格化されていると仮定しなければ，公式 (2.1.1) も (2.1.5) と似た形

$$\bar{a} = \frac{(\Phi, A\Phi)}{(\Phi, \Phi)} \qquad (\Phi \in \mathcal{H}) \tag{2.1.6}$$

に書かねばならない．公式 (2.1.6) は (2.1.5) と同じように演算子 A と単位演算子の

---

[1] Ω が可算ノルム空間すなわち $\Omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ で，$\Phi \in \Omega_n^*$ ならば，$A\Phi \subset \Omega_n$ を要求すれば十分である．このとき公式 (2.1.5) はやはり意味をもつから．（以下訳注）同様にして普通の状態 $\Phi \in \mathcal{H}\ (=\mathcal{H}^*)$ に対しては，$A\Phi \subset \mathcal{H}$ ならば許容演算子と考える．

期待値の比と解釈することができる（$\Phi \in \mathscr{H}$ に対して単位演算子は許容である）．

同様にして，問題とする射影演算子が許容演算子なら，（2.1.2）も一般化することができる．

物理的な観点からいえば，公式（2.1.5）は演算子 A, B が交換可能な場合にだけ使って始めて筋が通る．なぜなら，そういう場合にのみ物理量 a, b は同時に測定できるからである．

普通の状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ の場合でさえも，われわれがすでに見たように，公式（2.1.1）に現われるすべての自己共役演算子が許容演算子であるとは限らない．しかし，この場合には，すべての有界演算子，特にすべての射影演算子（単位演算子もこのなかに入る）が許容演算子であった．一般状態に対しては，許容演算子の範囲はこれよりもはるかに狭くなるが，この場合にも，Ω^* のすべての一般状態に対して許容される演算子が存在することは，あとで例によって確かめよう．

一般的にいえば，一般状態をなんらかのやり方で規格化することはない．Ω^* に属する二つのベクトル Φ_1 と Φ_2 は，一方に0でない複素数 λ をかけるとき他方に移るならば，まったく同じ物理的状態を記述する（Φ を $\lambda\Phi$ に変えても，（2.1.5）の比の値は変わらない）．しかしときには一般状態の与えられた集合において，ある意味の規格化を導入した方が都合のよいことがある（そうしなければならぬというわけではないが）．このことを例によって説明しよう．

量子論における一般状態は，連続スペクトルをもつ自己共役演算子の一般化された固有関数として登場することが多い．A をそのような演算子，$f_\alpha \in \Omega^*$ を固有値 α に対応する A の一般化された固有関数としよう．このとき一般状態 f_α に対しては，規格化

$$(f_{\alpha'}, f_\alpha) = \delta(\alpha - \alpha') \tag{2.1.7}$$

を用いるのが普通である．この形式的な等式は次のような正確な意味をもっている．まず定理1.1.1によれば，任意の正則ベクトル $\Phi \in \Omega$ は A の一般化された固有ベクトルを用いて

$$\Phi = \int \Phi(\alpha) f_\alpha d\alpha$$

と展開することができる．等式（2.1.7）の意味は，ベクトル Φ における汎関数 $f_{\alpha'}$ の値が，

$$(f_{\alpha'}, \Phi) = \Phi(\alpha')$$

によって与えられるということにほかならない．

結局，数学的対象と観測可能な物理量との関係を記述する量子論の第一番目の要請は，次のように定式化することができる：

I．物理系の状態は正定値計量をもつ Gelfand の三つ組 $\mathscr{H}$ における規格化された射線 $\boldsymbol{\Psi}$ によって記述される．観測可能な物理量 a の各々には自己共役演算子 A が対応し，その対応の仕方は物理量 a に演算子 A が対応するとき，物理量 $f(a)$ には演算子 $f(A)$ が対応するようなものであるとする．状態 Ψ にある物理系で測定をするさいに，物理量 a の値として，区間 Δ に含まれる値をうる確率は公式(2.1.3) によって与えられ，この確率は代表ベクトル $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}$ の選び方にはよらない．

空間 $\Omega^* \supset \mathscr{H}$ のなかの射線を一般状態という．演算子 A および A_0 が自己共役で，さらに $A\Psi$ と $A_0\Psi$ はともに線形汎関数 $\Psi \in \Omega^*$ の定義域に属するという条件をみたすならば，

$$M\left(\frac{A}{A_0}\right) = \frac{(\Psi, A\Psi)}{(\Psi, A_0\Psi)}$$

は，定義によって，演算子 A と A_0 に対応する物理量の期待値の比に等しい．ただし物理系は一般状態 Ψ にあるものとする．

1.2. 自由度 f の系の量子力学

例として，自由度 f が有限な系の古典的量子力学の場合に状態ベクトルの空間を検討しよう．

よく知られているように量子力学では，自由度 f の系は一般座標 $q_1, \cdots, q_f$ とそれらに共役な運動量 $p_1, \cdots, p_f$ を用いて特徴づけられ，これらの量は交換関係

$$\begin{aligned} [q_\mu, p_\nu] &\equiv q_\mu p_\nu - p_\nu q_\mu = \mathrm{i}\,\delta_{\mu\nu} \\ [q_\mu, q_\nu] &= [p_\mu, p_\nu] = 0 \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, \cdots, f) \tag{2.1.8}$$

を満足する．q と p が自己共役演算子として具体化される状態ベクトル空間は次のようにして構成することができる．

まず演算子 q と p の代わりに，いわゆる生成・消滅の演算子 a^*, a を

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\nu + \mathrm{i}\,p_\nu), \quad a_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\nu - \mathrm{i}\,p_\nu) \tag{2.1.9}$$

によって導入しよう．これらの演算子がみたす交換関係は，

$$[a_\mu, a_\nu^*] = \delta_{\mu\nu}, \quad [a_\mu, a_\nu] = [a_\mu^*, a_\nu^*] = 0 \qquad (\mu, \nu, = 1, \cdots, f) \tag{2.1.10}$$

である．

求める空間の正規直交基底を

$$\Phi_\nu = \frac{(a_1^*)^{\nu_1} \cdots (a_f^*)^{\nu_f}}{\sqrt{\nu_1! \cdots \nu_f!}} \Phi_0 \tag{2.1.11}$$

ととろう．ここで $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_f)$ は非負の整数の組，Φ_0 は，定義によって，方程式

$$a_\nu \Phi_0 = 0 \qquad (\nu = 1, \cdots, f) \tag{2.1.12}$$

を満足する（位相因子は別にして）唯一の規格化されたベクトルである．定義から

$$a_i^* \Phi_{\nu_1 \cdots \nu_i \cdots \nu_f} = \sqrt{\nu_i + 1}\, \Phi_{\nu_1 \cdots \nu_{i+1} \cdots \nu_f},$$

$$a_i \Phi_{\nu_1 \cdots \nu_i \cdots \nu_f} \begin{cases} = \sqrt{\nu_i}\, \Phi_{\nu_1 \cdots \nu_{i-1} \cdots \nu_f} & (\nu_i > 0) \\ = 0 & (\nu_i = 0) \end{cases} \tag{2.1.13}$$

が導かれる．$(\Phi_0, \Phi_0) = 1$ という要求および交換関係（2.1.10）から，ベクトル Φ_ν が確かに正規直交基底をなすこと，すなわち

$$(\Phi_\mu, \Phi_\nu) = \delta_{\mu_1 \nu_1} \cdots \delta_{\mu_f \nu_f} \tag{2.1.14}$$

となっていることがわかる．

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ は，

$$\Phi = \sum_\nu c_\nu \Phi_\nu \qquad (\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_f))$$

という形のベクトルで，複素係数 c_ν が

$$\sum_\nu |c_\nu|^2 < \infty$$

となるものの全体からなる．基底（2.1.11）を普通は《Fock 基底》といい，この場合の空間 $\mathscr{H}$ それ自身を《Fock 空間》とよぶ．空間 Ω は，次の性質をもつ極大の核型部分空間と定義することができる．すなわち，Ω は，演算子 p, q（あるいは a, a^*）の任意の多項式がその核型位相に関して連続となるような $\mathscr{H}$ の核型部分空間のうちで極大のものである．この条件は，とりわけ

$$P(a_\mu, a_\nu^*)\, \Omega \subset \Omega \tag{2.1.15}$$

が成り立つことを意味している．ここで $P(a_\mu, a_\nu^*)$ は任意の多項式である．従って，すべてのノルム

$$\|\Phi\|_r^2 = (\Phi, h^r \Phi), \qquad h = 1 + \sum_{i=1}^f a_i^* a_i \qquad (r = 0, 1, \cdots) \tag{2.1.16}$$

は Ω において有限である．一方 Ω に可算ノルム系（2.1.16）で位相を入れれば，任意の多項式 $P(a_\mu, a_\nu^*)$ が Ω の連続演算子となることは容易にわかる．以上のことから，$\mathscr{H}$ のベクトルのうちノルム（2.1.16）が有限となるもののつくる空間を Ω とすれば，これ

が求めるもの，すなわち必要な性質をそなえた $\mathcal{H}$ の極大核型部分空間にほかならない．

問題 2.1.2 a) ベクトル $\Phi=\sum c_\nu \Phi_\nu$ は，

$$\|c\|_r^2=\sum_{\nu_1\cdots\nu_f}(\nu_1+\cdots\nu_f+1)^r|c_\nu|^2 \qquad (r=0,1,2,\cdots)$$

の形の和がすべて有限となるとき，かつその時に限り Ω に属することを示せ（ヒント：$\|c\|_r^2=\|\Phi\|_r^2$ を示せ）．

b) f 重数列 c の集合に可算ノルム系 $\|c\|_r$ で収束の定義を入れた空間 $\mathcal{S}_f$ を《急減少 f 重数列》の空間とよぶことにしよう．$f=1$ の場合には，この定義は定義 5（第 1 章 1.4 節）と同等であることを示せ．$\mathcal{S}_f$（従って，これと同形な Ω）は核型空間であることを示せ．

c) 共役空間 $\mathcal{S}_f^*$ は（一般状態の空間 Ω^* と同形であるが），《緩増加》数列——f 重数列のうち級数 $\sum_\nu |c_\nu|^2/(\nu_1+\cdots\nu_f+1)^r$ が収束するようなある $r\geqslant 0$ が存在するもの——の全体からなることを示せ．

Gelfand の三つ組 $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ は関数 $\Phi(q)$ の空間としても，まったく等価な形で具体化できる．その目的のためには基底ベクトル Φ_ν に規格化されたエルミート関数

$$\Phi_\nu(q)=h_{\nu_1}(q_1)\cdots h_{\nu_f}(q_f) \tag{2.1.17}$$

を対応させるだけでよい．ただし

$$h_n(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x) \tag{2.1.18}$$

であり，

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

はエルミート多項式である．この具体化では，スカラー積が，

$$(\Phi,\Psi)=\int\cdots\int\overline{\Phi}(q)\Psi(q)\,dq_1\cdots dq_f$$

という公式で与えられ，演算子 p, a, a^* の形は，

$$p_\nu=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_\nu},\quad a_\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(q_\nu+\frac{\partial}{\partial q_\nu}\Big),\quad a_\nu^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(q_\nu-\frac{\partial}{\partial q_\nu}\Big) \tag{2.1.19}$$

となる．

そのうえ核型空間 Ω は $\mathcal{S}(R_f)$ と，Ω^* は $\mathcal{S}^*(R_f)$ と一致することが証明できる[1]．空間 Ω は，正準変数 p, q の対称性のおかげで，Fourier 変換に関して自動的に対称な形に求められたことを注意しておこう（ついでながら $h_n(q)$ を Fourier 変換すれば $\mathrm{i}^n h_n(p)$

[1] この点については Kristensen et al. (1965) を参照．この証明はたいして厄介でないから，数学を知っている読者には自ら試ることをおすすめする．

となる). (2.1.7) のように規格化された運動量演算子の固有関数は,

$$\frac{1}{(2\pi)^{f/2}}e^{\mathrm{i}(p_1q_1+\cdots+p_fq_f)}=\sum_\nu \mathrm{i}^{\nu_1+\cdots+\nu_f}\Phi_\nu(p)\Phi_\nu(q) \tag{2.1.20}$$

という形に展開される.

1.3. Hilbert 空間の直和と超選択則

Hilbert 空間の任意のベクトルは物理的に実現可能な状態を記述し, 任意の自己共役演算子はなんらかの観測量に対応すると考えたとしたら, それはあまりにもきつすぎる要請であろう. 自然においては, たとえば一定の電荷・一定のバリオン数をもった粒子 (系) の状態しか実現されていない. 陽子と中性子の状態ベクトルの和は, 実験によって実現可能な状態には対応しない (すなわちある確率 W で陽子, 確率 $1-W$ で中性子であるような一粒子状態は実現できない). これは実験事実である. 一方では実現不可能であることが, 理論的に予言できるような状態がある. 整数スピンの状態と半整数スピンの状態[1]の重ね合わせ $a\Phi+b\Psi$ $(a, b \neq 0)$ の場合がそれにあたる. 座標系を z 軸のまわりに 2π だけ回転すると, 物理系はもとのままなのに, 上のベクトルはそれとは同一直線上にないベクトル $a\Phi-b\Psi$ に変わり, 別の射線に属することになってしまう. その上, 物理的に実現可能な状態ベクトルの集合は, 閉集合でないと考えてよい根拠がある. 実際, 量子論においてエネルギーは常に非有界演算子 H によって与えられる (自由粒子のエネルギーには上限がないことだけを見ても当然そういえるだろう). われわれは常に, エネルギー演算子 H が Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ のいたるところ稠密な領域 D_H で定義されていると考えよう. 有限エネルギーの状態, すなわち D_H のベクトルが物理的に実現可能であると考えるのは自然である. そうすると, このようなベクトルからなるベクトル列の極限で D_H の外に出て無限エネルギーの状態に対応するものは, 実現可能ではないのである. ゼロでない物理的ベクトルの集合を F とし, F の張る線形空間の閉包 $L(F)$ は全 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ と一致することを以下では仮定しよう. また物理的に実現可能なベクトル Ψ に対する正射影演算子 Π_Ψ は, 定義によって, 観測量に対応するとみなすことにしよう.

これから次のことを証明する——Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ は以下に述べるような性質をもった直交部分空間 $\mathscr{H}_\alpha$ の直和

---

[1] スピンの概念は Poincaré 群の既約表現を分類するときに, 自然なかたちで出てくる (この章の §3 を見よ). ここでわれわれにとって必要なのは, ある軸のまわりに 2π だけ回転したとき, スピノル Ψ (半整数スピンに対応) は符号をかえるが, テンソル Φ (整数スピンに対応) は変化しないということだけである.

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\alpha} \mathscr{H}_{\alpha} \tag{2.1.21}$$

に分解することができる．その $\mathscr{H}_\alpha$ の性質とは，第一に物理的に実現可能なベクトルの集合 F の部分集合を $F_\alpha = \mathscr{H}_\alpha \cap F$ とするとき，$\mathscr{H}_\alpha$ は F_α の張る線形空間の閉包となる．なお $\bigcup_\alpha F_\alpha = F$ である．第二に，$\mathscr{H}_\alpha$ は $\mathscr{H}'_\alpha$ と $\mathscr{H}''_\alpha$ に含まれる物理的ベクトルで F_α がつくされてしまうような，すなわち，$(F \cap \mathscr{H}'_\alpha) \cup (F \cap \mathscr{H}''_\alpha) = F_\alpha$ となるような空でない直交部分空間 $\mathscr{H}'_\alpha$ と $\mathscr{H}''_\alpha$ の直和に分解されることはない．これらの性質からわかるように，あるベクトル Ψ が少なくとも二つの異なる部分空間 $\mathscr{H}_\alpha$ に対して，ゼロでない射影をもつならば，Ψ は物理的に実現可能ではない．また互いに異なる $\mathscr{H}_\alpha$ に属する二つのベクトルではさんだときに，ゼロでない行列要素をもつ演算子は観測量には対応しない．われわれはまた(2.1.21) の分解が，すべての観測量と可換な演算子の組によって（相互に一意的に）定義されることを示そう．こういう演算子は《超選択則》を導くといわれる．ここに列挙したような性質をもつ部分空間 $\mathscr{H}_\alpha$ を《コヒーレントな部分空間》という．なお物理的ベクトルの集合 F_0 が空でない互いに直交する部分集合の合併集合として表わされないとき，F_0 は《コヒーレント》であるということにしよう．

これまでに定式化した諸命題は，次の二つの補題から導かれる：

[補題 2.1.1] ゼロ・ベクトルを含まないベクトル集合 $M \subset \mathscr{H}$ がコヒーレントであるための必要十分条件は，M の張る線形空間の閉包 $\mathscr{L}(M)$ の有界演算子で，ベクトル $\Psi (\equiv |\Psi\rangle) \in M$ への正射影演算子 $\Pi_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ のすべてと可換なものが，いずれも $\mathscr{L}(M)$ における単位演算子の定数倍になることである．

第5章の付録 A で導入される言葉を使えば，この補題を次のように定式化することもできる——〈集合 M は，射影演算子 $\Pi_\Psi (\Psi \in M)$ によって生成される von Neumann 代数が $\mathscr{L}(M)$ において既約であるとき，そのときに限りコヒーレントである〉.

証明. a) 《十分条件》：補題の条件がみたされているとしよう．それにもかかわらず M がコヒーレントではない，すなわち空でない互いに直交する部分集合 M_1, M_2 が存在して $M = M_1 \cup M_2$ であると仮定しよう．すると部分空間 $\mathscr{L}(M_1)$ への射影演算子は，明らかに，すべての $\Pi_\Psi (\in M)$ と可換であるが，$\mathscr{L}(M)$ の単位演算子の定数倍ではない（なぜなら $1-\Pi_1$ は空でない集合 $\mathscr{L}(M_2)$ への射影演算子だから)．これは矛盾である．従って補題の条件は十分であることが証明された．

b) 《必要条件》：演算子 C が，コヒーレントな集合 M のベクトル Ψ に対する射影演算子 Π_Ψ のすべてと可換であるとしよう．そして，C はそのとき $\mathscr{L}(M)$ における単位

演算子の定数倍であることを示そう．

C は Π_Ψ と可換であり，Π_Ψ はベクトル Ψ できまる一次元部分空間への射影であるから，Ψ は C（およびそのエルミート共役演算子 C^*）の固有ベクトルでなければならない．すなわち $C\Psi = \lambda(\Psi)\Psi$ および $C^*\Psi = \overline{\lambda(\Psi)}\Psi$ が成り立つ．ところが実際には λ は Ψ にはよらない．λ が Ψ とともに変わるとすると，$\lambda(\Psi) = \lambda_1$ のとき $\Psi \in M_1$，$\lambda(\Psi) \neq \lambda_1$ のとき $\Psi \in M_2$ とすることによって，M を空でない互いに共通部分をもたない二つの集合 M_1, M_2 に分けることができる（$M = M_1 \cup M_2$）．M_1 と M_2 は互いに直交することを示そう．実際，$\Psi_1 \in M_1$，$\Psi_2 \in M_2$ とすれば，

$$\begin{aligned}\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle &= [\lambda(\Psi_1)-\lambda(\Psi_2)]^{-1}\{\langle\lambda\overline{(\Psi_1)}\Psi_1|\Psi_2\rangle - \langle\Psi_1|\lambda(\Psi_2)\Psi_2\rangle\} \\ &= [\lambda(\Psi_1)-\lambda(\Psi_2)]^{-1}\{\langle C^*\Psi_1|\Psi_2\rangle - \langle\Psi_1|C\Psi_2\rangle\} = 0\end{aligned}$$

である．これで M はコヒーレントでないことになり，矛盾に達した．従って $\lambda(\Psi)$ はある定数 λ に等しく，$\mathcal{L}(M)$ において $C = \lambda\mathbf{1}$ である．こうして補題2.1.1は証明された．

[補題 2.1.2]　M は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のゼロでないベクトルの集合で空集合ではないとする．そのとき M の張る線形空間の閉包 $\mathcal{L}(M)$ は，$M_\alpha = M \cap \mathcal{L}_\alpha$ がいずれもコヒーレント集合となるような直交部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ の直和

$$\mathcal{L}(M) = \bigoplus_\alpha \mathcal{L}_\alpha$$

に分解され，その際 $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ となる．

証明．　M のなかに同値関係を定義しよう．すなわち，M のコヒーレント部分集合 M_0 で，$\Psi, \Phi \in M_0$ であるようなものが存在するとき，$\Psi \sim \Phi$ とする．この関係が反射法則（$\Psi \sim \Psi$）と対称法則（$\Psi \sim \Phi \Longleftrightarrow \Phi \sim \Psi$）とをみたすことは明らかである（コヒーレント集合の定義によれば，ひとつのベクトルだけからなる集合はコヒーレントである！）．関係～が推移法則を満足することを証明しよう．$\Phi \sim \Psi$，$\Psi \sim X$ とする．そのとき，$\Phi, \Psi \in M_1$，$\Psi, X \in M_2$ となるコヒーレント部分集合 M_1, M_2 が存在する．

次に合併集合 $M_0 = M_1 \cup M_2$ はコヒーレントであることを示そう．それには M_0 がコヒーレントではない，すなわち共通部分のない直交部分集合 M'_0, M''_0 の和に分解されると仮定してみる．$\Psi \in M'_0$ としよう．M_1 は $M_1 \cap M'_0$ と $M_1 \cap M''_0$ との和になるが，このふたつは共通部分がなく互いに直交している．さらに $M_1 \cap M'_0$ は Ψ を含むから空集合ではない．ところが，M_1 はコーヒレントだから，$M_1 \cap M''_0 = \varnothing$（空集合）でなければならない．同様にして $M_2 \cap M''_0 = \varnothing$．従って，$M''_0$ そのものが空集合となる——

$M_0'' = M_0'' \cap M_0 = M_0'' \cap (M_1 \cup M_2) = \varnothing$. M_0 を空でない直交部分集合に分解することはできない．すなわち，M_0 はコヒーレントである．Φ と X はともに M_0 に属するから，定義によって同値となり，関係 $\sim$ の推移法則が証明された．

次に集合 M を同値類 M_α にわける．集合 M_α はそれぞれコヒーレントで互いに直交する（なぜなら，コヒーレント集合の定義から明らかなように，二つの互いに直交しないベクトル Φ, Ψ だけからなる集合はコヒーレントであるから，$\Phi, \Psi \in M$ で $\langle \Phi | \Psi \rangle \neq 0$ ならば $\Phi \sim \Psi$ である）．従って

$$\mathcal{L}(M) = \bigoplus_\alpha \mathcal{L}(M_\alpha)$$

が成り立つ．こうして補題2.1.2は証明された．

この補題を物理的ベクトルの集合 F に適用すれば，$\mathcal{L}(F) = \mathcal{H}$ と仮定したから，$\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{L}(F_\alpha)$ とすることによって (2.1.21) の分解の成り立つことがわかる．ここで F_α は互いに直交し，集合として和をとれば F となるような物理的ベクトルのコヒーレント集合である．$\mathcal{H}$ が可分な空間の場合には（これが場の量子論の一般に認められた定式化の場合に対応する．この章の§5を見よ），(2.1.21) の和は可算個をこえない．物理的ベクトルのコヒーレントな集合 F_α は，いずれも線形多様体をなしているとみなすのが普通である．こう考えることによって，量子論の重ね合わせの原理を定式化することができる．しかし (2.1.21) を導くには，このような仮定を必要とはしなかった．

直和の定義によって，ベクトル $\Psi \in \mathcal{H}$ の各々は部分空間への射影 $\Psi_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ の和に一意的に分解されることを思いだしておこう．またこのときに，

$$\Phi = \sum_\alpha \Phi_\alpha, \qquad \Psi = \sum_\alpha \Psi_\alpha$$

ならば

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_\alpha \langle \Phi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle$$

である．空間 $\mathcal{H}_\alpha$ への正射影演算子を Π_α で表わせば，定義によって $\Pi_\alpha \Psi = \Psi_\alpha$ となる．

$\mathcal{H}$ で稠密な定義域 D_A をもつ自己共役演算子 A は，$D_A \cap F$ が物理的ベクトルの集合 F において稠密であり，A が $\mathcal{H}$ の任意のコヒーレント部分空間 $\mathcal{H}_\alpha$ を不変にするとき，《観測量》とよばれる．この定義によれば，特に，物理的に実現可能な任意の状態 Ψ への射影演算子 Π_Ψ は観測量である．さらに任意の観測量 A はブロック型

$$A = \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} A_{\alpha} \Pi_{\alpha} \tag{2.1.22}$$

に表わすことができる．ここに，A_α は $\mathcal{H}_\alpha$ における自己共役演算子である．

補題2.1.1によれば，任意のコヒーレント部分空間 $\mathcal{H}_\alpha$ において，観測量の集合は既約である．言いかえれば，任意の観測量 A_α と可換な $\mathcal{H}_\alpha$ の有界演算子はすべて単位演算子の定数倍となる．このことから全空間 $\mathcal{H}$ において，すべての観測量と可換な演算子 C は，いずれもコヒーレント部分空間に対する射影演算子の重ね合わせ

$$C = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \Pi_{\alpha} \tag{2.1.23}$$

であることがわかる．ここで c_α は複素数である．特に c_α が実数なら演算子 C 自身も観測量である．(2.1.23) の形をした観測量について，これらは超選択則を導くという．物理的に実現可能な状態はそれぞれ演算子 C の固有状態となる．互いに直交する部分空間への射影が可換であることから (2.1.23) の形の演算子はすべて互いに可換であることが導かれるので，(2.1.23)は従っていわゆる《超選択則の可換性》を示している．われわれはこの可換性を証明するのに，可換な観測量の完全な組の存在を仮定しなかったことを注意しておく．

超選択則の可換性は，物理的状態に対する射影演算子が観測量であるという仮定のもとで得られた．この仮定は自然である．なぜなら，1.1節で要請したように，すべての物理的状態は Hilbert 空間における規格化された射線に対応し，$(\Phi, \Pi_\Psi \Phi) = |(\Phi, \Psi)|^2$ という量は，状態 Φ から状態 Ψ への遷移確率という意味をもつからである．

§ 2.　量子論の相対論的不変性

2.1.　Lorentz 群と Poincaré 群

一般 Lorentz 群とは，四元ベクトルの空間において双一次形式

$$xy = x^0 y^0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu \tag{2.2.1}$$

を不変にする実線形変換の全体として定義される．ここで計量テンソル $G = \{g_{\mu\nu}\}$ は

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \qquad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{2.2.2}$$

のように与えられている（同じギリシャ文字が二回でてきたら，(2.2.1) および以下の式も含めて，0から3までの和をとるものと約束する）．任意の Lorentz 変換は，実数の行列要素 Λ^μ_ν をもつ行列 Λ により　　(2.2.3)

$$y^\mu = (\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

という公式で与えられる．二次形式 (2.2.1) が不変という条件は，

$$\Lambda^{\kappa}_{\mu} g_{\kappa\lambda} \Lambda^{\lambda}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{2.2.4}$$

と同値であり，これを行列のかけ算で書けば

$$\Lambda^{T} G \Lambda = G, \quad \text{つまり} \quad \Lambda^{-1} = G\Lambda^{T} G \tag{2.2.5}$$

となる．ここで Λ^T は Λ の転置行列 $(\Lambda^T)^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}$ である．(2.2.5) 式の両辺の行列式をとれば，

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \det \Lambda = \pm 1 \tag{2.2.6}$$

が知られる．

$\det \Lambda = +1$ の変換の例としては，恒等変換 $\Lambda = \mathbf{1}$（群の単位元）や全部の座標の反転 $\Lambda = -\mathbf{1}$ などをあげることができよう．$\det \Lambda = -1$ の変換の例に空間反転 $\Lambda = G$ がある．(2.2.4) で $\mu = \nu = 0$ と置けば，

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{j=1}^{3} (\Lambda^j_0)^2 = 1 \tag{2.2.7}$$

となり，従って，パラメータ Λ^0_0 には二つの変域

$$\Lambda^0_0 \geqslant 1 \quad \text{と} \quad \Lambda^0_0 \leqslant -1$$

が可能である．

もし $\Lambda^0_0 \geqslant 1$ ならば Λ を《順時》(すなわち時間反転を含まない) 変換という．以下で単に Lorentz 変換というときは，順時変換を指すことにしよう．$\Lambda^0_0 \leqslant -1$ ならば Λ は逆時変換である (時間反転を含む)．

このように Lorentz 群は四個の連結成分からなり，それぞれ次のような記号で表わされる——$L^{\uparrow}_{+}$ ($\det \Lambda = 1$ で $\Lambda^0_0 \geqslant 1$)；$L^{\downarrow}_{+}$ ($\det \Lambda = 1$ で $\Lambda^0_0 \leqslant -1$)；$L^{\uparrow}_{-}$ ($\det \Lambda = -1$ で $\Lambda^0_0 \geqslant 1$)；$L^{\downarrow}_{-}$ ($\det \Lambda = -1$ で $\Lambda^0_0 \leqslant -1$)．

群の単位元は $L^{\uparrow}_{+}$ 成分に含まれる．$L^{\uparrow}_{+}$ が L の部分群であることは，簡単に確かめられる．この部分群はこれから極めてひんぱんにでてくるので，《固有 Lorentz 群》と名づけておく．各成分を組合せて得られる $L_{+} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\downarrow}_{+}$, $L^{\uparrow} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\uparrow}_{-}$ および $L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\downarrow}_{-}$ もまた一般 Lorentz 群の部分群である．これら三つの群のうち，最後の群にはこれまでのところ固有の記号がないのだが，まさにこの群に属する変換によって不変となるような物理現象，すなわち固有 Lorentz 変換および時間反転で不変な現象が広い範囲にわたって存在していることを強調しておこう[1]．

---

[1] ただし TCP 定理（第5章を見よ）が正しいなら，$K^0_2 \to 2\pi$ という崩壊（Cristenson et al. (1964)）は時間反転に関する不変性と矛盾する．

相対論的な量子論では，非斉次 Lorentz 群が極めて大きな役割を果たすが，これは Λ^μ_ν を一般 Lorentz 変換，a^μ を平行移動を示す実四元ベクトルとするとき，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{2.2.8}$$

という形の変換全体からなる群である．われわれは Wigner と Wightman に従って，この群を《一般 Poincaré 群》とよび，$\mathcal{P}$ で表わすことにしよう．Poincaré 群も Lorentz 群と同じく四個の成分——$\mathcal{P}^\uparrow_+, \mathcal{P}^\downarrow_+, \mathcal{P}^\uparrow_-, \mathcal{P}^\downarrow_-$ から成っている．部分群 $\mathcal{P}^\uparrow_+$ (このとき $\Lambda \in L^\uparrow_+$) を《固有 Poincaré 群》とよぶことにする．

2.2.　固有 Lorentz 群と二次元の特殊線形群

固有 Lorentz 群は，行列式が 1 に等しいような 2 行 2 列の複素行列の群 $SL(2)$[1] に局所同形である．詳しくいえば，以下で示すように任意の行列 $A \in SL(2)$ に一つの定まった Lorentz 変換 $\Lambda(A)$ が対応し，

$$\Lambda(A_1 A_2) = \Lambda(A_1)\Lambda(A_2) \tag{2.2.9}$$

となり，そして $\Lambda(A_1) = \Lambda(A_2)$ であるのは $A_1 = \pm A_2$ のとき，そのときに限る．言葉をかえれば，$\Lambda \leftrightarrow \pm A$ の対応は固有 Lorentz 群の二価表現，いわゆる《スピノル表現》である．この対応は Lorentz 群の表現論で基本的役割を果たすもので，以下においてくりかえし利用されるであろう．

まず各四元ベクトル x にエルミート行列 $\underset{\sim}{x}$ を

$$\underset{\sim}{x} = x^\alpha \sigma_\alpha = x^0\sigma_0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-\mathrm{i}x^2 \\ x^1+\mathrm{i}\,x^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

という公式に従って対応させる．ここで σ_0 は単位行列，σ_i は Pauli 行列である．すなわち

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.11}$$

容易にわかるように，

$$\det \underset{\sim}{x} = x^2 = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2 \tag{2.2.12}$$

である．逆に任意の 2 行 2 列のエルミート行列 $\underset{\sim}{x}$ には，ひとつの四元ベクトル x が対応し，その成分は

---

[1] 記号の意味はこうである——$L(2)$ は二次の正則行列のつくる線形群を意味する．S は特殊群の記号で，行列がユニモジュラである（すなわち行列式が 1 である）ことを意味する．数学の文献では，複素行列を問題としていることを明記するため $SL(2, C)$ という記号が使われている（C は複素数体の意味）．

$$x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu \underset{\sim}{x}) \tag{2.2.13}$$

によって与えられる．ここで $\mathrm{Tr}\,A$ とは行列 A の対角和（つまり対角要素の和）のことである．

次に行列式が 1 となる任意の 2 行 2 列の行列 A（すなわち $A \in SL(2)$）によって，エルミート行列 $\underset{\sim}{x}$ を

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^* \tag{2.2.14}$$

と変換すれば，$\underset{\sim}{x}'$ もまたエルミート行列であり，(2.2.12) によればベクトル x と x' は長さが等しい．言いかえると，行列の変換 (2.2.14) の各々には，ただ一つの定まった固有 Lorentz 変換 $\Lambda = \Lambda(A)$ が対応する．実際，変換 $\Lambda(A)$ の行列要素は公式

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^*) \tag{2.2.15}$$

によって定められるのである．

公式 (2.2.15) が，群 $SL(2)$ から群 $L_+^\uparrow$ の上への求めていた写像を与える．

問題 2.2.1 a) (2.2.13) を用いて (2.2.15) を証明せよ．

b) 任意のユニモジュラ行列 A は，

$$A = \sum_{\nu=0}^{3} a^\nu \sigma_\nu \equiv \underset{\sim}{a}$$

という形に書けることを示せ．ここに，$\boldsymbol{a}$ は複素 Minkowski 空間の単位ベクトル，すなわち

$$a^2 = (a^0)^2 - (\boldsymbol{a})^2 = 1$$

をみたすものである．

なお $A = \underset{\sim}{a}$ とすれば，$\Lambda(A)$ は次の式で与えられることを示せ――

$$\Lambda^0_0 = a^0\overline{a}^0 + \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}} = |a^0|^2 + |\boldsymbol{a}|^2$$

$$\Lambda^0_j = \overline{a}^0 a^j + a^0 \overline{a}^j - \mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl}\, a^k \overline{a}^l$$

$$\Lambda^j_0 = \overline{a}^0 a^j + a^0 \overline{a}^j + \mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl}\, a^k \overline{a}^l$$

$$\Lambda^j_k = \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}}\,\delta^j_k + 2\,\mathrm{Im}\,\overline{a}^0 a^l\,\varepsilon_{jkl} + 2\,\mathrm{Re}\,a^j \overline{a}^k. \tag{2.2.16}$$

ただし，ラテン文字の添え字 $j, k \cdots$ は 1 から 3 までの値をとり，ε_{jkl} は完全な反対称単位テンソルである ($\varepsilon_{123} = 1$)．

（ヒント：(2.2.15) および Pauli 行列の積の対角和にたいする公式

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, \cdots, 3),$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) = \mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl},$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_m) = \delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{lk} - \delta_{jl}\delta_{km} \qquad (j, k, l, m = 1, 2, 3)$$

を利用せよ）．

c) (2.2.15), (2.2.16) の逆公式, すなわち二次の行列 $\pm A$ を四次の行列 Λ で表わす式を求めよ (Wightman (1960 b) を参照).

d) (2.2.9) の関係が成り立つことを確かめよ.

e) (2.2.15) で定義された行列 Λ は群 $L_+^\uparrow$ に属すること, すなわち $\Lambda_0^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AA^*) > 0$ で $\det \Lambda = 1$ となることを確かめよ.

問題 2.2.2 a) (2.2.15) で与えられる $SL(2)$ から $L_+^\uparrow$ への写像において, 二次のユニタリ行列 V ($VV^* = 1$) には三次元の Euclid 回転が対応し, 正定値 (あるいは負定値) のエルミート行列 H には純 Lorentz 変換 (いわゆる〈双曲回転〉), すなわち,

$$y^0 = x^0 \cosh\alpha + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\sinh\alpha,$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + [(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\cosh\alpha + x^0\sinh\alpha]\boldsymbol{n} \qquad (2.2.17)$$

という形の変換が対応することを示せ. ここで $\boldsymbol{n}$ は三次元の単位ベクトルである. 特に対角行列,

$$A = \begin{pmatrix} e^{\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha/2} \end{pmatrix}$$

に対応するのは, (x^0, x^3) 平面の双曲回転,

$$y^0 = x^0 \cosh\alpha + x^3 \sinh\alpha,$$
$$y^3 = x^0 \sinh\alpha + x^3 \cosh\alpha$$

である.

b) 任意の固有 Lorentz 変換は, (2.2.17) の形のひとつの純 Lorentz 変換とひとつの三次元 Euclid 回転をひきつづいて行った結果として表現できることを示せ.
(ヒント: $SL(2)$ に属する任意の行列 A は $A = VH$ と表現できることを使え. ここで $H = \sqrt{A^*A}$ は正定値行列, $V = A(A^*A)^{-1/2}$ はユニタリ行列である).

連結な群 G に準同形な極小の単連結群 $\widetilde{G}$ を, 連結群 G の《普遍被覆群》とよぶことにしよう[1] ([25] 参照. そこでは, 与えられた群の普遍被覆群は上記の条件によって一意的にきまることが証明されている). $SL(2)$ は単連結であり, 固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ の普遍被覆群であることが証明できる. 任意の単連結群のどの表現も一価である.

以下の諸節では群 $\widetilde{\mathcal{P}}$ の表現を研究しよう. $\widetilde{\mathcal{P}}$ とは二次のエルミート行列 $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$ に対する非斉次な変換で差の行列式

$$\det(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) = (x-y)^2$$

を不変にするもの全体のなす群をさすのである. 固有スピノル群 $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \equiv \mathcal{P}_0$ (群 $\widetilde{\mathcal{P}}$ の極大連結部分群) は, $(\underset{\sim}{a}, A)$ という形の元全体からなっている. ここで A はユニモジュラ行列 ($A \in SL(2)$), $\underset{\sim}{a}$ は二次のエルミート行列である. $\mathcal{P}_0$ の元 $(\underset{\sim}{a}, A)$ はエルミート行

[1] これらの言葉の定義を思いだしておく. 群 H から群 G の上への一意的な対応 $f: H \to G$ (群 H から群 G 全体への写像) が存在し (逆は必ずしも一意的でなくてよい), それが群の演算を保存するとき, つまり $f(h_1h_2) = f(h_1)f(h_2)$ であるときに, H は G に《準同形》であるという. 集合 $\widetilde{G}$ に含まれる任意の閉じた道を $\widetilde{G}$ の外にでないように連続変形して, 常に一点に収縮することができるときに, $\widetilde{G}$ は《単連結》であるという.

列 $\underset{\sim}{x}$ に

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}A^* + \underset{\sim}{a} \tag{2.2.18}$$

という公式に従って作用する．これから $\mathcal{P}_0$ における群のかけ算の法則

$$(\underset{\sim}{a}_1, A_1)(\underset{\sim}{a}_2, A_2) = (\underset{\sim}{a}_1 + A_1\underset{\sim}{a}_2A_1^*, A_1A_2) \tag{2.2.19}$$

を導くことは容易である．$\mathcal{P}_0$ の元 $(\underset{\sim}{a}, A)$ を4行4列の行列で

$$(\underset{\sim}{a}, A) = \begin{pmatrix} A & \underset{\sim}{a}A^{*-1} \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \tag{2.2.20}$$

の形に書けば，群のかけ算 (2.2.19) は普通の行列のかけ算になることを注意しておこう．

対応

$$A \to A^{*-1}$$

は群 $SL(2)$ のそれ自身の上への《外部自己同形》であり[1]，Lorentz 群でいえば，空間反転に対応している．詳しくいうと，等式

$$G\Lambda(A)G^{-1} = \Lambda(A^{*-1})$$

が成り立つということである．ここで G は計量テンソルの行列 (2.2.2) である．この式を確かめることは読者にまかせよう．それには (2.2.16) とともに，$A = \underset{\sim}{a}$ ならば

$$A^{*-1} = \underset{\sim}{a}^{*-1} = \tilde{\underset{\sim}{a}}$$

となることを使えばよい．ただし $\tilde{a} = a^0\sigma_0 - (\boldsymbol{\sigma a})$ である．

読者はついでに次のことも証明してみてほしい——四元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}$ とエルミート行列 $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{a}$ が (2.2.10) の対応で結びついているとき，(2.2.18) の変換は固有 Poincaré 変換 $x' = \Lambda x + a$ と同値である．従って，群 $\mathcal{P}_0$ は $SL(2)$ と同じく単連結であり，固有 Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ の普遍被覆群である．

後の章（第5章）では，双一次形式(2.2.1)を不変にし，その行列式が$+1$に等しい複素 Lorentz 変換の群 $\mathcal{L}_+$，つまり $\det\Lambda = 1$ で (2.2.5) の関係を満足する4行4列の複素行列の群を扱うこととなろう．上に述べた $L_+^\uparrow$ の二価表現は，次のようにして複素群 $\mathcal{L}_+$ に拡張される．

まず公式 (2.2.10) に従って，任意の複素四元ベクトル z に2行2列の行列 $\underset{\sim}{z}$ を対応させる．(2.2.14) の変換はもうすこし一般的な形の変換

[1] 群 G の自己同形とは G のそれ自身の上への写像で群の演算を保存するものをいう．特に，$g_0 \in G$ によって $g \to g_0 g g_0^{-1}$ と書けるものを《内部》自己同形といい，こういう性質をもつ元 g_0 が存在しないときに《外部》自己同形という．

$$\underset{\sim}{z}' = A\underset{\sim}{z}B^T \tag{2.2.21}$$

に置き換えられる．ここで B^T は B の転置行列であり，

$$\det A = \det B = 1$$

である．行列の変換 (2.2.21) の各々に複素 Lorentz 変換 $\Lambda(A, B) \in \mathcal{L}_+$ が対応する．これは公式

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu A \sigma_\nu B^T) \tag{2.2.15a}$$

によって与えられる．$B = \bar{A}$ という特別な場合には (2.2.15a) は (2.2.15) になる．

2.3. 相対論的不変性の要求

量子論においては二つの描像が重要な役割を果たしている．Schrödinger の描像では，系の状態そのものが各時刻ごとに与えられる（この描像では状態ベクトルは，与えられた時刻におけるあらゆる可能な実験の結果を記述する）．Heisenberg の描像では，すべての時間変化は演算子に肩代りされて，状態ベクトルは時間に無関係となり，問題の系の歴史全体にわたるあらゆる可能な実験の結果を記述する．

理論の相対論的共変性をあらわな形で扱うには，Heisenberg の描像のほうが適しているので，これからはすべてこの描像を用いて話を進めることにしよう．

すでに，1.1 節で知ったように，系の任意の状態は Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の単位射線 $\boldsymbol{\Psi}$ によって記述される (Schrödinger の描像においては，各時刻ごとに射線が定まるから，それらの射線全体によって系を特徴づけねばならなかっただろう)．

理論が固有 Poincaré 変換で不変であるとは，期待値 (2.1.1) あるいは確率 (2.1.3) がこの変換のさいに値を変えないことを意味する．この不変性の要求から，任意の変換 $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，単位射線 $\boldsymbol{\Psi}$ の変化はスカラー積の絶対値が変わらないような範囲，すなわち

$$|(\boldsymbol{\Phi}(a, \Lambda), \boldsymbol{\Psi}(a, \Lambda))| = |(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi})| \tag{2.2.22}$$

の成り立つ範囲に限られることが導かれる．なお単位射線 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ のスカラー積の絶対値とは，二つのベクトル $\Phi \in \boldsymbol{\Phi}$, $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}$ のスカラー積の絶対値と定義する．この定義が $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ からの〈代表ベクトル〉Φ, Ψ の選び方に依存しないことは容易に確かめられる．

射線の変換をベクトルの変換にやき直すには次の定理を利用する (Wigner の定理)：

[定理 2.2.1]　$\mathscr{H}$ と $\mathscr{H}'$ を二つの Hilbert 空間とし，$\boldsymbol{T}$ は $\mathscr{H}$ の単位射線から $\mathscr{H}'$ の単位射線への写像で

$$|(\boldsymbol{T\Phi}, \boldsymbol{T\Psi})| = |(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi})|$$

という条件を満足しているものとしよう．そうすると，$\mathscr{H}$ から $\mathscr{H}'$ への演算子 T で次の性質をもつものが，位相因子の任意性を除いて一意的に存在する——射線の写像と見たとき上の $\boldsymbol{T}$ に一致し，さらに 1) 加法性 $T(\Psi_1+\Psi_2) = T\Psi_1+T\Psi_2$ をもち，2) ユニタリ $(T\Phi, T\Psi)=(\Phi,\Psi)$ であるか，あるいは反ユニタリ

$$(T\Phi, T\Psi) = \overline{(\Phi,\Psi)} = (\Psi,\Phi) \tag{2.2.23}$$

である（[26] の第20章の付録および Bargmann (1964) を参照．定理の証明をここに再録するのはやめておこう）．

$\mathscr{H}$ から $\mathscr{H}$ 自身の上への (2.2.22) を満足するような単位射線の写像は，いずれも，

$$(\Phi', A'\Phi') = (\Phi, A\Phi)$$

と置くことによって，観測量の変換 $A \to A'$ を一意的に定義することを注意しておこう．ここで Φ と Φ' はそれぞれ単位射線 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}'$ に含まれるベクトルを勝手にもってきたものである．従って定理 2.2.1 で与えられる演算子 T を用いて，観測量の変換則は，

$$A \to A' = TAT^{-1}$$

となることが導かれる．

また群の単位元 $(a = 0, \Lambda = 1)$ の近傍における関数 $|(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_{(a,\Lambda)})|$ の連続性を仮定すれば，固有 Poincaré 群の場合に演算子 $T \equiv U(a,\Lambda)$ は，必然的にユニタリであることが容易に結論される．

このようにして，確率の相対論的不変性という物理的要求は，状態の空間において群 $\mathscr{P}$ のいわゆる《射線表現》が実現されるという結論に導くことがわかった．すなわち任意の固有 Poincaré 変換 (a,Λ) に，ユニタリ演算子の規格化された射線 $\boldsymbol{U}(a,\Lambda)$ が対応する（二つのユニタリ演算子 U と U' は，それらが絶対値 1 の複素因子の違いしかないとき，かつそのときに限り，同じ射線 $\boldsymbol{U}$ に属する）．変換の合成には演算子の射線の積が対応する——

$$\boldsymbol{U}(a_1,\Lambda_1)\boldsymbol{U}(a_2,\Lambda_2) = \boldsymbol{U}(a_1+\Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2). \tag{2.2.24}$$

また群の単位元 $(e \equiv (0,1))$ には単位演算子の射線すなわち絶対値 1 の複素数全体が対応する．

Wigner (1939) と Bargmann (1954) の分析の基本的な結論のひとつは，固有 Poincaré 群の任意の射線表現が前節で定義した群 $\mathscr{P}_0$ の普通の一価ユニタリ表現[1] から誘導されるということである．言いかえると，次の定理が成り立つ：

---

[1] この章の付録に表現論の基礎概念がまとめてある．

[定理 2.2.2]　演算子の射線 $\boldsymbol{U}(a, \Lambda)$ の各々から，それぞれひとつずつの代表元 $U(\underset{\sim}{a}, A) \in \boldsymbol{U}(a, \Lambda)$ を選んで，

$$U(\underset{\sim}{a}_1, A_1)U(\underset{\sim}{a}_2, A_2) = U(\underset{\sim}{a}_1 + A_1\underset{\sim}{a}_2A_1^*, A_1A_2),$$
$$U(0, 1) = 1 \tag{2.2.25}$$

という関係が成り立つようにできる．ここで $\underset{\sim}{a}$ は公式 (2.2.10) で定義されている (なお (2.2.19) を参照)．

この定理の証明については，読者のために，Wigner (1939) と Bargmann (1954) の原論文や [27] のなかの Newton の簡潔な綜合報告を引用しておき，ここでは Wigner=Bargmann の定理の定式化について，もうすこし立ち入って述べておくにとどめよう．

演算子の射線 $\boldsymbol{U}(a, \Lambda)$ の各々からそれぞれ代表として演算子 $U(a, \Lambda)$ をひとつずつ選んでおけば，(2.2.24) によって固有 Poincaré 群の (位相因子の不定性を残した) 表現

$$U(a_1, \Lambda_1)U(a_2, \Lambda_2) = \omega(a_1, \Lambda_1; a_2, \Lambda_2)U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2), \tag{2.2.26}$$

が得られる．ここで $|\omega| = 1$ であるが，簡単のため $\{a, \Lambda\} \equiv g$ と記せば，

$$\omega(g_1, g_2) = \exp\{i\xi(g_1, g_2)\} \tag{2.2.27}$$

と書き表わせる．$\xi(g_1, g_2)$ は実関数であり，(2.2.26) の定義と，積が結合則をみたすこととを考えれば，

$$\xi(e, e) = 0,$$
$$\xi(g_1, g_2) + \xi(g_1g_2, g_3) = \xi(g_1, g_2g_3) + \xi(g_2, g_3)$$

という等式を満足することがわかる．定理 2.2.2 の命題は，要するに，すべての演算子 U の位相を

$$U(g) \to e^{i\zeta(g)}U(g), \quad \xi(g_1, g_2) \to \xi(g_1, g_2) + \zeta(g_1) + \zeta(g_2) - \zeta(g_1g_2)$$

とずらすことによって，新しい演算子 $U(a, \Lambda)$ が群のパラメータに連続的に依存し，かつ変換後の位相因子が $\omega(a_1, \Lambda_1; a_2, \Lambda_2) = \pm 1$ となるようにできるということである (ω の符号をひとつに限ることができないため，射線表現からは群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ の表現ではなく群 $\mathcal{P}_0$ の表現が導かれるのである)．

Wigner=Bargmann の定理は，量子論の相対論的不変性の要求を研究する上で，普遍被覆群という概念のもつ意義をはっきり示している．非相対論的量子力学においては，Poincaré 群の代わりに Galilei 群が問題となるが，Galilei 群の射線表現はその被覆群の一価表現にならないことを注意しておく (Bargmann (1954) と Lévy-Leblond (1963) を参照せよ)．

結局，量子論の相対論的不変性という原理，すなわち，われわれの理論形式の二番目の要請は最終的に次の形に定式化されることになる：

II. 固有 Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ に属する変換のさいに，状態ベクトルは群 $\mathcal{P}_0$ の連続ユニタリ表現に従って変換する．

さらに，群 $\mathcal{P}_0$ のいま問題とする表現 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ は，超選択則によって簡約されると仮定しよう．その意味は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の任意のコヒーレント部分空間 $\mathcal{H}_j$ が $U(\underset{\sim}{a}, A)$ の演算によって不変だということである．

空間や時間の反転という変換のさいに，状態ベクトルがどう振舞うかは 3.4 節で扱われるはずである．

§ 3. Poincaré 群の既約表現とスペクトルに関する要請

3.1. Poincaré 群の Lie 代数と不変演算子

群 $\mathcal{P}_0$ の可能なユニタリ表現をすべて調べあげる問題は，結局，その既約表現を分類する問題に帰着する．なぜならこの群の任意のユニタリ表現は，既約表現の直和（あるいは直積分）に分解することができるからである．

Poincaré 群はコンパクトではないから（局所コンパクトであるにすぎない），この結果は自明ではない．局所コンパクト群の任意のユニタリ表現の分解の理論が現在どこまで進んでいるかについては，Naimark の総合報告（1964）を参照されたい．

群 $\mathcal{P}_0$ の各元は 10 個の実パラメータ（変位の 4 個，回転角の 6 個）によって，従ってまた 10 個の独立な無限小演算子によって特徴づけられる．以下では並進の生成演算子を $-\mathrm{i}P^0, \mathrm{i}P^1, \mathrm{i}P^2, \mathrm{i}P^3$ によって表わし，回転の生成演算子を $\mathrm{i}M^{\mu\nu} = -\mathrm{i}M^{\nu\mu}$ で表わすことにしよう．$P^\mu, M^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ はエルミート演算子であり，交換関係

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \qquad [M^{\lambda\mu}, P^\nu] = \mathrm{i}(g^{\mu\nu}P^\lambda - g^{\lambda\nu}P^\mu)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\rho\mu} - g^{\mu\sigma}M^{\rho\nu}) \qquad (2.3.1)$$

を満足する．

固有 Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ は $\mathcal{P}_0$ と局所同形だから，$\mathcal{P}_+^\uparrow$ の無限小演算子もまた (2.3.1) とまったく同じ交換関係を満足する．(2.3.1) は添え字を下につけたものに対しても成り立つ．

Poincaré 群の Lie 代数の具体化として，二つの例を考えてみよう．第一のものは群の有限次元の表現に対応し，第二のものは無限次元の表現に対応する．

第一の例は $\mathscr{P}_0$ の四次元表現 (2.2.20) である.

純 Lorentz 変換 (2.2.17) には正定値行列

$$H(\alpha, \boldsymbol{n}) = \sigma_0 \cosh\frac{\alpha}{2} + (\boldsymbol{\sigma n}) \sinh\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{\sigma n})} \tag{2.3.2}$$

が対応している (問題2.2.2を見よ). いま, 特に $\boldsymbol{n}$ として座標軸方向の単位ベクトル e_j $(j = 1, 2, 3)$ を順々にとれば, 特殊 Lorentz 〈回転〉の生成演算子 $M^{0j} = N^j$ の二次元スピノル表現が得られる——

$$\overset{(2)}{N}{}^j = \mathrm{i}\left[\frac{d}{d\alpha}H(\alpha, e_j)\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\mathrm{i}\sigma_j. \tag{2.3.2 a}$$

容易にわかるように, $\boldsymbol{n}$ を軸とする角度 θ の普通の回転にはユニタリ行列

$$U(\boldsymbol{n}, \theta) = \sigma_0 \cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma n}) \sin\frac{\theta}{2} = e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{\sigma n})} \tag{2.3.3}$$

が対応する.

この変換の生成演算子 $M^j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}M^{kl}$ は,

$$\overset{(2)}{M}{}^j = \mathrm{i}\left[\frac{d}{d\theta}U(e_j, \theta)\right]_{\theta=0} = \frac{1}{2}\sigma_j \tag{2.3.3 a}$$

となる.

問題 2.3.1 上にあげた公式を使って, 群 $\mathscr{P}_0$ の四次元表現 (2.2.20) の生成演算子は次のような形をもつことを示せ.

$$\overset{(4)}{M}{}^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}, \qquad \overset{(4)}{N}{}^j = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix},$$

$$\overset{(4)}{P}_\mu = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a^\mu}\begin{pmatrix} 1 & \underset{\sim}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.4}$$

第二の例は, Poincaré 群の表現を変数 $x \in R_4$ の滑らかな関数の空間における変数変換の群として具体化するものである.

はじめに次のことを注意しておこう. 群 G が点 x からなる空間 X の変換群として作用するときには, X で定義された関数 $f(x)$ の空間において,

$$(T_g f)(x) = f_g(x) = f(g^{-1}x)$$

と置くことにより, 常に G のひとつの線形表現を定義することができる. この場合に

$$T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$$

という条件がみたされていることを確かめておこう. 実際,

$$(T_{g_1}T_{g_2}f)(x) = (T_{g_1}f_{g_2})(x) = f_{g_2}(g_1^{-1}x)$$
$$= f(g_2^{-1}g_1^{-1}x) = f((g_1g_2)^{-1}x) = (T_{g_1g_2}f)(x).$$

容易にわかるように，G が非可換群の場合，変換法則を $(S_g f)(x) = f(gx)$ としたのでは，上に掲げた $T_g f$ のそれとはちがって，群 G の表現にならない．

Poincaré 群に話をもどそう．この群は四次元空間の変換群と考えられて，その表現 T_g は，

$$(T_{(a\Lambda)}f)(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$$

という形になる．容易にわかるように，この表現の生成演算子は，

$$P_\mu = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$
$$M^{\mu\nu} = \mathrm{i}\left(x^\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu} - x^\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu \tag{2.3.5}$$
$$(M^{0j} = N^j,\quad M^{12} = M^3, \cdots)$$

となる．

なお交換関係

$$[x^\mu, P^\nu] = -\mathrm{i}\,g^{\mu\nu}$$

を用いて，(2.3.5) の演算子 $P^\mu = g^{\mu\nu}P_\nu$ と $M^{\mu\nu}$ が交換関係 (2.3.1) を満足することを示す仕事は読者におまかせしよう，

もう一度ここで強調しておきたいのは，交換関係 (2.3.1) は表現の選び方によらないが，生成演算子の具体的な表示は，当然のことながら，表現の選び方に依存するということである．無限小演算子の記号の上に括弧に入れて，表現の指定を記したのはまさにこの理由からにほかならない．

非相対論的量子力学とのアナロジーに従い，また Noether の古典的定理（たとえば [4] の第1章を見よ）を念頭において，定義として $P = (P^0, P^1, P^2, P^3)$ を物理系の四次元的な全運動量の演算子，$\{M^{\mu\nu}\}$ を四次元的角運動量の演算子と考えよう．

四次元のギ・ベクトル[1)]

$$w_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu}P^\lambda M^{\mu\nu} \tag{2.3.6}$$

を導入しよう．ここで，$\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu}$ は四次元の完全反対称テンソルである（$\varepsilon_{0123} = 1$ で

1) 三つの空間座標軸を反転すると，ギ・ベクトル w の空間成分 $\boldsymbol{w}$ は変わらず，w^0 が符号を変える．このベクトルを導入した人々の名をとって，w のことを Pauli=Lubánski=Bargmann のギ・ベクトルということがある．

$\rho\lambda\mu\nu$ が 0123 の偶置換なら $\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu}=+1$, 奇置換ならば $\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu}=-1$, どれか二つの添え字が一致すれば $\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu}=0$ である). ベクトル $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ を使えば $\boldsymbol{w}$ は

$$w^0 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{M} = P^jM^j, \quad \boldsymbol{w} = P^0\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{N} \tag{2.3.7}$$

という形に書かれる[1].

演算子 w^μ の重要な性質は, 四元運動量の演算子と可換なことである:

$$[w^\mu, P^\nu] = 0. \tag{2.3.8}$$

w^μ と w^ν, あるいは w^μ と $M^{\lambda\mu}$ との交換関係は,

$$[M^{\lambda\mu}, w^\nu] = \mathrm{i}(g^{\mu\nu}w^\lambda - g^{\lambda\nu}w^\mu)$$

$$[w^\mu, w^\nu] = \mathrm{i}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\rho w_\sigma = \mathrm{i}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho'\sigma'}g_{\rho'\rho}g_{\sigma'\sigma}P^\rho w^\sigma \tag{2.3.9}$$

という公式によって定義される.

関係式 (2.3.8), (2.3.9) は交換関係 (2.3.1) のみから導かれ, 表現の選び方にはよらない[2].

問題 2.3.2 (2.3.7) と (2.3.8) を使って,

$$wP = g^{\mu\nu}w_\mu P_\nu = 0 \tag{2.3.10}$$

であることを示せ.

表現のすべての演算子と交換する多項式型の不変演算子で独立なものが二つ (そして二つだけ) 存在する. すなわち,

$$P^2 = (P^0)^2-(P^1)^2-(P^2)^2-(P^3)^2 \tag{2.3.11}$$

および

$$W = -w^2 = \frac{1}{2}g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}M^{\mu\nu}M^{\mu'\nu'}P^2 - g_{\mu\mu'}g_{\sigma\sigma'}g_{\nu\nu'}M^{\mu\sigma}M^{\nu\sigma'}P^{\mu'}P^{\nu'} \tag{2.3.12}$$

である.

このほか $P^2 \geqslant 0$ の場合にはエネルギーの符号という離散的な不変量

---

[1] 演算子 w^μ は Poincaré 群の Lie 代数の元ではない. 実際, Lie 代数とは, 定義によって生成演算子の張る実係数の線形空間である. 《Lie 代数における積》とは演算子の普通の積ではなく交換子積である. この反対称な積に対しては結合則が成り立たない. しかし与えられた群の Lie 代数とともに, 生成演算子のあらゆる可能な多項式からなる無限次元の結合的代数を考えることは実際上常に有益である. この代数における積は演算子の普通の積であって結合則をみたしており, 二つの多項式は, その一方から他方が, Lie 代数の与えられた交換関係を使って, 変形により求められるとき, 互いに等しいとみなされる. このように定義された結合的代数を, 与えられた Lie 代数の《包絡環 (universal enveloping algebra)》という. 演算子 w^μ やPoincaré群の多項式型不変量 (定義はすぐあとにでてくる) は包絡環の元である.

[2] (2.3.8) と (2.3.9) からわかるように, ベクトル w^μ の各成分のあらゆる可能な線形結合が張る線形空間は Poincaré 群に関して不変である.

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(P^0) \tag{2.3.13}$$

を導入することができる（$P^2<0$ の場合は，定義によって，$\varepsilon=0$ とすれば，任意の P に対して $\varepsilon=\theta(P^2)\,\varepsilon(P^0)$ と書くことができる．自己共役演算子の関数は，普通にはまずこの演算子が対角的となる表現で定義され，ついで任意の他の表現において定義される）．

斉次 Lorentz 群の Lie 代数の複素拡大を考えると便利なことが多い．そうすると Lie 代数のなかにベクトル $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ の代わりに，互いに可換なベクトル

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}+\mathrm{i}\boldsymbol{N}), \quad \boldsymbol{K}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}-\mathrm{i}\boldsymbol{N})$$

を導入することができる．これらのベクトルは，

$$[J^j, J^k]=\mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl}J^l, \qquad [K^j, K^k]=\mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl}K^l, \qquad [J^j, K^k]=0$$

という交換関係を満足する．

ベクトル $\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{K}$ は，それぞれ固有 Lorentz 群の互いに共役な三次元既約表現に従って変換する．$\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{K}$ を用いて四元ベクトル w を表わすために，三元あるいは四元のベクトルにそれぞれ対応して，行列

$$J^{\alpha}_{\beta}=\left(\sum_{k=1}^{3}J^k\sigma_k\right)^{\alpha}_{\beta}, \qquad K^{\dot\alpha}_{\dot\beta}=\left(\sum_{l=1}^{3}K^l\sigma_l\right)^{\dot\alpha}_{\dot\beta}, \qquad P^{\alpha\dot\beta}=(P^{\mu}\sigma_{\mu})^{\alpha\dot\beta}$$

を導入しよう．そうすると行列

$$w^{\alpha\dot\beta}=J^{\alpha}_{\tau}P^{\tau\dot\beta}+K^{\dot\beta}_{\dot\tau}P^{\alpha\dot\tau}$$

が四元ベクトル w (2.3.6) に対応する．この書き方は Poincaré 群のある種の多次元拡大を問題とするときに便利である (Kadyshevskii and Todorov (1966) 参照)．

問題　2.3.3　交換関係を用いて，P^2 と W の不変性を確かめよ．ε の不変性を証明せよ．

3.2.　$\mathcal{P}_0$ の既約表現の分類とスペクトルに関する要請

前節で述べたことからわかるように，Poincaré 群のどのような既約表現を具体化している空間においても，演算子 P^2, W, ε は単位演算子の定数倍であり，その空間におけるこれらの定数の値を，既約表現を数えあげる目的に役立てることができる．

不変量 P^2, ε の値に応じて群 $\mathcal{P}_0$ の表現を次のようなクラスに分類することができる：

1.　$P^2=m^2>0$.

1a.　$\varepsilon=1$（つまり $P^0>0$）．対応する表現は静止質量 m の実在する粒子の変換性を記述する．

1 b.　$\varepsilon = -1$ (つまり $P^0 < 0$). これらの表現はクラス **1 a** の表現の複素共役表現である.

2.　$P^2 = 0$, $P \neq 0$.

2 a.　$\varepsilon = 1$ ($P^0 > 0$ の場合). 対応する表現は静止質量ゼロの粒子（ニュートリノと光子）に関係している.

2 b.　$\varepsilon = -1$ ($P^0 < 0$ の場合). このクラスの表現はクラス **2 a** の表現の複素共役表現である.

3.　$P^2 = -m^2 < 0$ (つまり P が空間的ベクトルの場合).

相対論的量子論の基本原理からいえば，このようなエネルギー・運動量をもつ粒子は，現実には存在することができない．しかし，この表現は相互作用する場の変換性の記述に際して，役割を演ずることがありうる.

4.　$P = 0$ (つまり $p^0 = p^1 = p^2 = p^3 = 0$). このような固有値 p をもつすべての状態は並進に関して不変である．このクラスに属するすべてのユニタリ表現は恒等表現 ($U(\underset{\sim}{a}, A) = 1$) を別にすれば無限次元である．恒等表現はすべての Poincaré 変換に関して不変な状態に対応する．この状態はなにもない空間，すなわち《真空》に対応するとみなすことにしよう.

われわれの理論形式における第三の要請となるスペクトル条件は，状態ベクトルの変換性を記述するさいに，上に列挙された可能性のうちのいくつかを排除する．このスペクトル条件の定式化に話を進めよう．われわれはこの要請の互いに同値でない二つの定式化を与えよう．第一の，そして制限としてはゆるい方の定式化は，どのような物理の理論においても成り立たねばならない．二番目はそれよりもきつい条件で，強い相互作用をする粒子(π 中間子，K 粒子とバリオン）すなわち《ハドロン》とよばれる粒子の理論にかかわるものである：

Ⅲ a.　エネルギー・運動量の演算子 P^μ のスペクトルは，前方光円錐の閉包 $\overline{V}^+$ に含まれる.

言いかえると，状態ベクトルの空間 $\mathscr{H}$ において実現される群 $\mathscr{P}_0$ の表現は，上の定義にいうクラス **1a**，**2 a**，**4** に属する既約表現のみの直和になる．なお **4** に属する表現としては，トリヴィアルな表現，つまり真空に対応する表現のみを扱うことにしよう.

この弱い形のスペクトル条件は，第5章の基本的な諸結果 (Hall=Wightman の定理と TCP 定理）を得るのには十分である．しかしながら，クラスター分解性の証明（第3章

2.3節）のさいに，また一般に散乱理論の叙述にあたっては，要請 III a に加えて，強い相互作用をする粒子の理論に関係する次のような付加条件が必要となる：

III b. 点 $p=0$ は，演算子 P の離散的でかつ縮退していない固有値である．すなわち，空間 $\mathscr{H}$ には $P\Psi_0=0$ であるような状態 Ψ_0 がただひとつ存在する．この状態はまた Lorentz 変換（$SL(2)$ の元）に関して不変であり，まとめていえばすべての $\{\underset{\sim}{a}, A\} \in \mathscr{P}_0$ に対して $U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi_0=\Psi_0$ である．

このような状態 Ψ_0 は真空とよばれる．以下では真空の状態ベクトルを $|0\rangle$ という記号で表わすこともある．

III c. 質量演算子 $\sqrt{P^2}$ には有限個の離散的な正の固有値 $(0< m_1 < m_2 \cdots)$ が存在し，これらはそれぞれ一つの安定粒子に対応する．また $\sqrt{P^2} \geqslant 2m_1$ にはこの演算子の連続スペクトルが存在する．

一般に，演算子 $\sqrt{P^2}$ の連続スペトルは縮退している．n 粒子状態の領域では，$n \geqslant 3$ ならばその多重度が無限大となる．

スペクトル条件は簡単に次のような形に定式化されることも多い——〈$\mathscr{H}$ には正エネルギーの物理的状態からなる完全系が存在する〉．

3.3. 正質量の粒子に対応する表現の記述

スペクトル条件のおかげでクラス **1a** の表現のみに話を限ることができる．この場合の既約表現の記述をこれから大づかみに与えよう．

はじめに表現の演算子が作用する空間を定義する．そのため，群の生成演算子のエルミート関数のなかから互いに可換な演算子の完全な組[1] をひとつ選びだそう．この組のうちには，表現のすべての演算子と交換する Poincaré 群の Casimir 演算子 $P^2=m^2$ と W が常に入っている．ほかには運動量演算子 $P^\mu(\mu=0,1,2,3)$ とスピンの第3成分*)

[1] 互いに可換なエルミート演算子の集まりは，それらの演算子の同時固有値の組が，数因子を別にして，共通の固有ベクトルを一義的に定義するとき，言いかえると，それらの連合スペクトル**)（joint spectrum）が単純であるとき，完全な組をなすという（数学の言葉でいえば，極大Abel 集合である）．われわれの要請はもっと弱い．すなわち表現の生成演算子の任意の多項式で，完全な組 Π のすべての演算子と可換なものが常に，Π の演算子の関数であればよい．ただし，状態ベクトルの空間には，そのほかの演算子（たとえば，電荷とかバリオン数）も作用しうる．これらは Π の演算子と可換ではあるが，にもかかわらずそれらの演算子の関数ではない．

**) 互いに可換なエルミート演算子の集合が同時固有状態においてもつ固有値を並べたものを連合スペクトルという．

*) 本書では実際に観測される物理量を，たとえば運動量なら $\boldsymbol{P}$ と書き，その成分は P_j ではなく P^j であるというように使われている．スピン演算子に限って混用がみられるので，この訳ではすべて $S=(S^1,S^2,S^3)$ に統一した（問題 2.A.7 からも明らかなように，回転群だけなら S^j と S_j の区別は必要ない．四次元的な記法の枠に組み入れるときに問題となる）．念のため他の定義も書いておくと $\boldsymbol{M}=(M^1,M^2,M^3)=(M^{23},M^{31},M^{12})$，$\boldsymbol{N}=\{N^j\}=\{M^{0j}\}$．ただし $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ だけは例外として残した．

$$S^3 = \frac{1}{m}\left(w^3 - \frac{w^0 P^3}{m+P^0}\right) \tag{2.3.14}$$

を選ぶと都合がよい．

演算子 P^μ と S^3 が可換なことは (2.3.8) を参照すれば，容易にわかる．しかし S^3 の代わりに，ベクトル w の成分の任意の線形結合を選んだとしても P^μ とは可換である．それゆえ，スピン成分の定義として特に (2.3.14) を選んだ理由を説明しておかねばならない．

静止座標系 R では，$\boldsymbol{P}_R = 0$，$P_R^0 = m$，$w_R^0 = 0$ であり，スピン・ベクトルは，

$$\boldsymbol{S}_R = \frac{1}{m}\boldsymbol{w}_R \tag{2.3.15}$$

に等しい．任意の座標系の場合には，ベクトル $\boldsymbol{S}$ が w の成分の線形結合となること，その係数は四元運動量 P のみに依存することを要請しよう．さらに $\boldsymbol{S}$ は三次元のベクトルであること，すなわち，

$$[M^j,\ S^k] = \mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl} S^l \tag{2.3.16}$$

という性質をもつこと，および，スピン演算子に対する普通の交換関係

$$[S^j,\ S^k] = \mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl} S^l \tag{2.3.17}$$

が成り立つことを要求しよう．

演算子 w^μ の線形結合からなるギ・ベクトルで，(2.3.16)，(2.3.17) の条件をみたし，静止系でベクトル (2.3.15) と一致するものは，ただひとつに定まり

$$S^j = \frac{1}{m}\left(w^j - \frac{w^0 P^j}{m+P^0}\right) = \frac{1}{m}\left(P^0 M^j - (\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{N})^j - P^j \frac{(\boldsymbol{PM})}{m+P^0}\right) \tag{2.3.18}$$

という形になることを示そう（この式は，特に，(2.3.14) の形の第三成分の存在を意味している）．

証明． $\boldsymbol{S}$ がギ・ベクトルという条件から（これは (2.3.16) を考えに入れたのだが），

$$S^j = \frac{a}{m}(w^j - b w^0 P^j) \tag{2.3.19}$$

と書ける．ここで a, b は運動量 P の関数であり，三次元の Euclid 回転群に関して不変だから，P^0 と m のみに依存する（$\boldsymbol{P}^2 = (P^0)^2 - m^2$ である）．なおこの式では $\boldsymbol{P}$ と w^0 が空間反転で符号を変え，従ってその積は符号を変えないことが考慮されている．一方では $(\boldsymbol{wP})\boldsymbol{P}$ という形の項も同じ性質をもつのではないかと思われるだろうが，これは (2.3.10) によって $w^0 P^0 \boldsymbol{P}$ に等しく，従って，そのような項を別に加える必要はない．係数 a, b を求めるために，(2.3.19) を (2.3.17) に代入しよう．両辺をくらべることによ

って，a, b に対する二つの方程式

$$a[P^0-b((P^0)^2-m^2)] = m, \qquad a(1-bP^0) = mb$$

が得られる．この連立方程式には二組の解がある．すなわち $a=1$, $b=1/(m+P^0)$ および $a=-1$, $b=1/(P^0-m)$ である．第二の解は条件 (2.3.15) によって捨てる．こうして等式 (2.3.18) が証明された．

上に求めた線形結合 (2.3.18) は，ベクトル w をあらかじめ静止系へ変換しておいた場合の空間成分，すなわち

$$mS^j = (\Lambda_p^{-1}w)^j$$

にほかならぬことを注意しておく*)．ここで，Λ_p は時間軸をベクトル p の方向に変換する純 Lorentz 変換，つまり

$$\Lambda_p^{-1}p = (m, 0, 0, 0)$$

である．Λ_p^{-1} の行列としての具体的な形は，

$$(\Lambda_p^{-1})^0_{\ \mu} = (\Lambda_p^{-1})^\mu_{\ 0} = \frac{p_\mu}{m} = g_{\mu\nu}\frac{p^\nu}{m}$$

$$(\Lambda_p^{-1})^j_{\ k} = \delta^j_k + \frac{p^j p^k}{m(m+p^0)} \qquad (2.3.20)$$

となる．

エルミート演算子 S^j は，(2.3.17) により，三次元 Euclid 空間の回転群 O_3^+ の Lie 代数の生成演算子である（あるいは，同じことであるが，行列式が $+1$ の二次ユニタリ行列の群 $SU(2)$ の Lie 代数の生成演算子である）．この群を Poincaré 群の与えられた既約表現[1]に対応する《小さな群 (little group)》という．$SU(2)$ の既約表現は詳しく調べられている（たとえば [26] を見よ）．$SU(2)$ の既約表現はすべて有限次元であり，全スピ

---

*) p を $(m, \mathbf{0})$ にかえる一般の Lorentz 変換は，(2.3.20) と三次元回転とを組み合せたものである．そのどれをとっても，この式によってひとつのスピン表示を定義することができる．(2.3.14) のような S^3 をとる場合は正準表示とよばれ，S^3 を運動量の方向に選べばヘリシティ表示である．一般の場合には (2.3.15) を条件として置かない．大切なのは (2.3.16) と (2.3.17) である．

1) 実際，小さな群は，上に列挙した 4 クラスのすべての表現に対して定義することができ，その型は既約表現のクラスだけに依存する．小さな群の定義は次のとおり：——Γ を Poincaré群の表現 1～4 のうちの一つにおける演算子 P のスペクトルとする．点 $p\in\Gamma$ における小さな群とは，固有 Lorentz 変換のうちでベクトル p を不変にするものがつくる部分群 B_p のことをいう．Γ に属する任意の二点に対して小さな群は互いに同形であり，これが小さな群の型を特徴づける上で基本となる性質である．クラス 1 の場合には，すでに見たように，小さな群は三次元 Euclid 空間の回転群である．クラス 2 では Euclid 平面の運動群（並進まで含めて）であり，クラス 3 では三次元の擬 Euclid 空間（計量の符号が $+--$）の回転群である．以上については問題 2.3.7 を参照．クラス 4 の小さな群は Lorentz 群全体である．

ンの値

$$S^2 = j(j+1) \qquad (j = 0, 1/2, \cdots)$$

によって番号づけることができる.

問題 2.3.4 不変量 W (2.3.12) は S^2と m^2 の積に等しいこと，つまり

$$W = m^2S^2 = m^2j(j+1) \tag{2.3.21}$$

であることを示せ.

j という数は定義によって系の全角運動量である（その〈系〉が一粒子だけからなる場合には，粒子のスピンにほかならない）.

群 $\mathcal{P}_0$ のクラス **1a** に入る既約表現 $[m, j, +]$ を，演算子 P^μ と S^3 の固有値 p^μ と ζの関数からなる Gelfand の三つ組 $\mathcal{H}_{mj+}$ において具体的に表示しよう. 変数 ζ は $2j+1$ 個の値

$$\zeta = -j, -j+1, \cdots, j-1, j \tag{2.3.22}$$

をとり，四元ベクトル p^μ は〈上の双曲面〉V_m^+

$$p^0 = \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} \tag{2.3.23}$$

の上を動く. $\mathcal{H}_{mj+}$ におけるスカラー積は,

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{\zeta=-j}^{j} \int_{V_m^+} \overline{\Phi(p, \zeta)}\, \Psi(p, \zeta) \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0} \tag{2.3.24}$$

によって定義される.

問題 2.3.5 $(p^0)^{-1}d^3\boldsymbol{p}$ という式は V_m^+ 上の不変測度を与えること，すなわち p と q が Lorentz 変換で結びついているとき（$p^2 = q^2 = m^2$, $\varepsilon(p^0) = \varepsilon(q^0) = 1$),

$$\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0} = \frac{d^3\boldsymbol{q}}{q^0}$$

であることを示せ.

空間 $\mathcal{H}_{mj+}$ は普通のやり方で〈三つ組化〉することができる. $\mathcal{H}_{mj+}$ において稠密な核型部分空間としては，ζ を固定したときに $\mathcal{S}(V_m^+)$ に属する関数 $\Phi(p, \zeta)$，すなわち，双曲面 V_m^+ において無限回可微分で急減少な関数の全体からなる可算ノルム空間 Ω_{mj+} を選ぶとぐあいがよい.

演算子 P^μ は Ω_{mj+} においては単に p^μ という数をかける演算として定義され（S^3 も同様)，この定義のもとで Ω_{mj+} を不変にする. つまり $\Phi \in \Omega_{mj+}$ ならば $P^\mu\Phi \in \Omega_{mj+}$, あるいは記号的な書き方により

$$P^{\mu}\Omega_{mj+} \subset \Omega_{mj+} \qquad (S^3\Omega_{mj+} \subset \Omega_{mj+}) \tag{2.3.25}$$

が成り立つ．しかしながら P^{μ} という演算子は全空間 $\mathcal{H}_{mj+}$ の任意のベクトルに対して定義されているわけではない．なぜなら，関数 $\Phi(p,\zeta)$ が V_m^+ で二乗可積分だからといって，一般に，$P^{\mu}\Phi(p,\zeta)$ が二乗可積分とは限らぬからである．運動量演算子の固有関数は，非相対論的量子論の場合と同様に，一般状態であって Ω^*_{mj+} に属する．

特にスカラー粒子 $(j=0)$ の場合の核型空間 Ω とその共役空間を 5.1 節で詳しく検討することにしよう．

群 $\mathcal{P}_0$ の表現に属するユニタリ演算子 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ は，無限小演算子 P^{μ} や $M^{\mu\nu}$ とはちがって，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{mj+}$ 全体で定義されている．並進のつくる部分群の表現は特に簡単であり

$$(U(\underset{\sim}{a},1)\Psi)(p,\zeta) = e^{-ipa}\Psi(p,\zeta) \tag{2.3.26}$$

という形になる．斉次 Lorentz 群の表現 $U(0,A)$ を構成するには，次のようなやり方で進む．まず双曲面 (2.3.23) の上で静止系の運動量

$$p_R = (m, \mathbf{0}) \tag{2.3.27}$$

だけ抜き出しておく（このベクトルを選んだ理由はただ便利だからというだけである）．このベクトルを不変にする小さな群 $SU(2)_R$ の表現を，点 $p=p_R$ において，等式

$$(U(V)\Psi)(p_R,\zeta) = \sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)\Psi(p_R,\eta) \tag{2.3.28}$$

により与えよう．ここで $V\in SU(2)$，つまり V は2行2列のユニタリ行列であり，

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_2 & \bar{v}_1 \end{pmatrix}, \qquad \det V \equiv |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1 \tag{2.3.29}$$

という形に書くことができる．また $D^{(j)}_{\zeta\eta}(V)$ は $SU(2)$ のスピン j に対応する既約表現の行列要素で

$$D^{(j)}_{\zeta\eta}(V) = \sqrt{\frac{(j+\zeta)!\,(j-\zeta)!}{(j+\eta)!\,(j-\eta)!}}\, v_1{}^{\zeta+\eta} v_2{}^{\zeta-\eta} P^{(\zeta-\eta,\zeta+\eta)}_{j-\zeta}(v_1\bar{v}_1 - v_2\bar{v}_2) \tag{2.3.30}$$

によって与えられる．なお $P^{(a,b)}_n(x)$ は Jacobi の多項式

$$P^{(a,b)}_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{a+n}(1+x)^{b+n}]$$

である（たとえば [26] とか Joos (1962) を参照)．(2.3.29) の行列要素を $V_{\alpha\beta}$ と書き，α,β は 1, 2 という値をとるとすれば，$D^{(1/2)}_{\zeta\eta}(V) = V_{3/2-\zeta,\,3/2-\eta}$ であることを注意しておく．任意のユニモジュラ行列 $A\in SL(2)$ は，ユニタリ行列と正定値行列の積

$$A = V_A H_A, \qquad V_A = A\sqrt{A^{-1}A^{*-1}}, \qquad H_A = \sqrt{A^* A} \tag{2.3.31}$$

に一意的に分解される（問題2.2.2によれば V_A は回転，H_A は純 Lorentz 変換に対応する）．変換（2.3.31）の点 $p = p_R$ における表現は，

$$(U(0, A)\Psi)(p_R, \zeta) = \sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V_A)\Psi(\Lambda^{-1}(H_A)p_R, \eta) \tag{2.3.32}$$

となる．ここで，$\Lambda(H_A)$ は（2.2.15）によって行列 H_A に対応する Lorentz 変換，V_A は（2.3.31）で定義されたユニタリ行列である．点 p_R において純 Lorentz 変換は Ψ の変数 p にだけ作用することがわかる（$\Lambda(A^{-1})p_R = \Lambda(H_A^{-1})p_R$ に注意せよ）．スピン変数 ζ には，三次元回転だけが自明でないしかたで作用し，このほうはベクトル p_R を変えない．

次に（2.3.32）と，行列 A の積には演算子 U の積が対応する事実とを利用すれば，$U(0, A)$ が任意の点 p における Ψ に及ぼす作用を求めることができる．それには次のようなやり方で進む．ベクトル p_R（2.3.27）を同じ双曲面 V_m^+ 上の問題のベクトル p に変換する純 Lorentz 変換を Λ_p とする．すなわち，

$$(\Lambda_p x)^0 = \frac{p^0}{m}x^0 + \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}),$$

$$(\Lambda_p x)^j = x^j + \frac{p^j}{m}\left(\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}{p^0+m} + x^0\right). \tag{2.3.33}$$

この変換には $SL(2)$ に属する正定値行列

$$H_p = \frac{m+\underset{\sim}{p}}{\sqrt{2m(p^0+m)}} = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}}\begin{pmatrix} p^0+m+p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2 \\ p^1+\mathrm{i}p^2 & p^0+m-p^3 \end{pmatrix} \tag{2.3.34}$$

が一意的に対応し，

$$H_p \underset{\sim}{p}_R H_p = \underset{\sim}{p} \tag{2.3.35}$$

が成り立つ．（2.3.34）の行列が確かに（2.3.35）を満足することを納得するには，$p^2 = m^2$ ならば，

$$\underset{\sim}{p}^2 = 2p^0\underset{\sim}{p} - m^2$$

であり，従って，

$$(m+\underset{\sim}{p})^2 = 2(p^0+m)\underset{\sim}{p}$$

であることに注意するだけで十分である．

任意の行列 $A \in SL(2)$ は，

$$A = H_p B \tag{2.3.36}$$

の形に表現することができる．ここで $H_p^2 = \underset{\sim}{p}/m$，$\det B = 1$ である．（2.3.31），（2.3.

32), (2.3.36) によって

$$\begin{aligned}(U(0,A)\Psi)(p,\zeta) &= (U(0,H_p)U(0,B)\Psi)(p,\zeta)\\ &= \sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V_{H_p})(U(0,B)\Psi)(\Lambda_p^{-1}p,\eta)\\ &= (U(0,B)\Psi)(p_R,\zeta)\\ &= \sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V_B)\Psi(\Lambda^{-1}(B)p_R,\eta)\\ &= \sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(H_p^{-1}A\sqrt{A^{-1}H_p^2A^{*-1}})\Psi(\Lambda^{-1}(A)p,\eta) \qquad (2.3.37)\end{aligned}$$

が得られる (行列 Λ_p^{-1} は (2.3.20) に与えられている. なお $V_{H_p}=\mathbf{1}$).

問題 2.3.6 a) 行列 H_p (2.3.34) は行列 $\underset{\sim}{p}/m$ の〈正の〉根

$$H_p=\sqrt{\frac{\underset{\sim}{p}}{m}}, \qquad p\in V_m^+ \qquad (2.3.38)$$

であることを示せ.

b) $A=\underset{\sim}{a}$ をユニモジュラ行列とする ($(a^0)^2-\boldsymbol{a}^2=1$, 問題2.2.1参照).

$$A^{-1}\equiv \underset{\sim}{a}^{-1}=\tilde{a}\equiv a^0\sigma_0-\boldsymbol{a\sigma} \qquad (2.3.39)$$

であることを示せ.

c) 表現 $D^{(j)}$ (2.3.37) の変数として出てくる行列

$$V(A,p)=H_p^{-1}A\sqrt{A^{-1}H_p^2A^{*-1}}=\sqrt{\underset{\sim}{p}^{-1}}A\sqrt{A^{-1}\underset{\sim}{p}A^{*-1}} \qquad (2.3.40)$$

がユニタリであることを直接に確かめよ.

d) いま考えている表現では, 演算子 S^k (2.3.18) が $D^{(j)}(V(A,p))$ の生成演算子であることを示せ ((2.3.3) 参照). すなわち

$$S^k=-\mathrm{i}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}D^{(j)}(V(e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\sigma_k},p))\right]_{\theta=0}.$$

e) 表現 $[m,j,+]$ の無限小演算子は次の公式に従って関数 $\Psi(p,\zeta)$ に作用することを示せ：

$$\begin{aligned}P^\mu &= p^\mu,\\ \boldsymbol{M} &= -\mathrm{i}\boldsymbol{p}\times\nabla_{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{S}, \qquad (2.3.41)\\ \boldsymbol{N} &= -\mathrm{i}p^0\nabla_{\boldsymbol{p}}-\frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{S}}{m+p^0}.\end{aligned}$$

ただし, (2.3.23) によって

$$\nabla_{p^j}\Psi(p,\zeta)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial p^j}+\frac{\partial p^0}{\partial p^j}\frac{\partial}{\partial p^0}\right)\Psi=\left(\frac{\partial}{\partial p^j}+\frac{p^j}{p^0}\frac{\partial}{\partial p^0}\right)\Psi(p,\zeta)$$

である. なお (2.3.18) を (2.3.41) に代入すると, あとの二つは恒等式になってしまうことを示せ.

これまでに得られた結果は次のように要約することができる.

群 $\mathcal{P}_0$ の既約ユニタリ表現 $[m,j,+]$ の演算子 $U(\underset{\sim}{a},A)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{mj+}$ において,

$$(U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi)(p, \zeta) = e^{-ipa}\sum_{\eta=-j}^{j} D^{(j)}_{\zeta\eta}(V(A, p))\Psi(\Lambda^{-1}(A)p, \eta) \qquad (2.3.42)$$

という公式に従って作用する．ここで $D^{(j)}$ は群 $SU(2)$ の既約表現 (j) の行列 (2.3.30) であり，ユニタリ・ユニモジュラ行列 $V(A, p)$ は等式 (2.3.40) によって定義されている．

j の整数値に対応する表現は固有 Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ の一価表現になっているが，j が半整数の表現はこの群の二価表現である．いずれの表現もスピノル群 $\mathcal{P}_0$ の普通の一価表現である．後に (4.3節で) Dirac スピノルという特別な場合 ($j = 1/2$) に，群 $\mathcal{P}_0$ の表現の別の形にお目にかかることとなろう．

問題　2.3.7　a)　クラス **2a** の場合に $p^{(0)} = (1, 0, 0, 1)$ として，群 $\mathcal{P}_0$ の小さな群 $L_{p^{(0)}}$ が

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}}z \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \qquad z = x + iy$$

という形の行列からなることを示せ．ここで θ は p^3 軸のまわりの回転角という意味をもつ．群 $L_{p^{(0)}}$ は Euclid 平面の運動群（回転および並進）と準同形であることを示せ (Wightman (1960 b) あるいは Wigner (1962 b) を参照)．この群は生成演算子 M^1, $-N^2$, M^2, $+N^1$, M^3 によって生成される．

b)　クラス **3** の場合に $p^{(0)} = (0, 0, 0, m)$ として，小さな群 $L_{p^{(0)}}$ は3次元空間の Lorentz 群（計量の符号が $+--$ となるもの）と準同形であることを示せ．この群は生成演算子 N^1, N^2, M^3 によって生成される．

状態ベクトルの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の全体は既約不変部分空間 $\mathcal{H}_{mj+}$ の直和（および直積分）である．ただし，これらの部分空間はそれぞれ有限あるいは無限の多重度 $\nu = \nu(m^2, j)$ だけ繰り返してとるものとする．スペクトル条件の強い形の定式化をとれば，要請 I と II も同時にみたされているとして，

$$\mathcal{H} = \{c\Psi_0\} \oplus \int_{m_1^2}^{\oplus} d\rho(m^2) \sum_{j=0, \frac{1}{2}, 1, \cdots}^{\oplus} \nu(m^2, j)\mathcal{H}_{mj+} \qquad (2.3.43)$$

となる．ここで Ψ_0 は真空の状態ベクトル，$\{c\Psi_0\}$ は真空ベクトルと同一直線上にあるベクトルのつくる一次元空間であり，$\rho(m^2)$ は単調非減少関数である．状態ベクトル空間のより具体的な表示は，ある種の特別な場合について §5 で扱うことになろう．

すでに述べたように，空間 $\mathcal{H}$ のコヒーレントな部分空間は j の値が整数のもののみ，あるいは半整数のもののみの和である．部分空間のあるものは多重度がゼロとなることも認めるなら，コヒーレントな空間の場合も公式 (2.3.43) に含めることができる．

3.4. 空間反転・時間反転と一般 Poincaré 群の表現

群 $\mathcal{P}_0$ に属する連続な変換とともに空間反転や時間反転という不連続変換[1]

$$I_s x = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$
$$I_t x = (-x^0, x^1, x^2, x^3),$$
$$I_{st} x = I_s I_t x = (-x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \tag{2.3.44}$$

もまた量子論においては重要な役割を果たしている.

行列 $\underset{\sim}{x}$ (2.2.10) に対する演算子 I の作用は,

$$\underset{\sim}{I_s x} = \varepsilon \bar{\underset{\sim}{x}} \varepsilon^{-1} \equiv \tilde{x} = x^0\sigma_0 - \boldsymbol{x\sigma}$$
$$\underset{\sim}{I_t x} = -\varepsilon \bar{\underset{\sim}{x}} \varepsilon^{-1}, \qquad \underset{\sim}{I_{st} x} = -\underset{\sim}{x} \tag{2.3.45}$$

という式で表わされる. ここで文字の上の横棒は複素共役を示し, ε は,

$$\varepsilon = \mathrm{i}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.46}$$

まえと同様に, こんどは一般 Poincaré 群 $\mathcal{P}$ のあらゆる可能な射線表現, すなわち一般群 $\mathcal{P}$ の元 g とユニタリあるいは反ユニタリな演算子 U とのあいだの

$$U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1 g_2) \tag{2.3.47}$$

をみたすような対応関係を求めよう.

[定理 2.3.1] スペクトルに関する要請のみたされているような相対論的量子論においては, $U(I_s)$ はユニタリ演算子, $U(I_t)$ は反ユニタリ演算子である.

証明. 定理 2.2.1 によれば演算子 $U(I_\lambda)$ ($\lambda = s, t, st$) はそれぞれユニタリか反ユニタリである. $U(I_\lambda)$ がユニタリならば $U(I_\lambda)$ の位相因子を適当にとって

$$U^2(I_\lambda) = \omega(I_\lambda, I_\lambda) = 1$$

とすることができる. $U(I_\lambda)$ が反ユニタリならば,

$$U^2(I_\lambda) = \pm 1 \tag{2.3.48}$$

とすることができる. 実際, 第一の場合には, ある位相の選び方で $U^2(I_\lambda) = e^{2\mathrm{i}\alpha}$ ならば, $U_1(I_\lambda) = e^{-\mathrm{i}\alpha}U(I_\lambda)$ が望みの性質をもつことになろう. $U(I_\lambda)$ が反ユニタリならば, 位相をずらしても

$$(e^{\mathrm{i}\beta}U(I_\lambda))^2 = e^{\mathrm{i}\beta}U(I_\lambda)e^{\mathrm{i}\beta}U(I_\lambda) = e^{+\mathrm{i}\beta}e^{-\mathrm{i}\beta}U(I_\lambda)U(I_\lambda) = U^2(I_\lambda)$$

---

1) 文献においては, I_s (ついでながら s とは英語の space からきている) と I_t の代わりに P と T という記号が使われることも多い. この本ではエネルギー・運動量の演算子を P と書くから, (2.3.44) のような記法をとった.

となって演算子の二乗は変らない．しかし，この場合，$U^2 = e^{i\alpha}$ (α は実数で U は反ユニタリ) ならば，$U^2 = \pm 1$ (つまり $\alpha = 0, \pi$) という命題が成り立つ．

問題 2.3.8 この命題を証明せよ (ヒント：任意の反ユニタリ演算子は，V をユニタリ演算子，複素共役に移す演算子を K として，$U = VK$ の形に表現することができる．これから $U^2 = V\overline{V}$ が得られる．ここで，上の横棒は複素共役を表わす．U^2 は単位演算子の定数倍であることを利用し，また恒等式 $V^T\overline{V} = 1$ を念頭において，$e^{-i\alpha} = \overline{V}V = V^T(\overline{V}V)\overline{V} = V\overline{V} = e^{i\alpha}$ つまり $U^4 = e^{2i\alpha} = 1$ であることを示せ).

問題 2.3.9 ユニタリ演算子に対しても，反ユニタリ演算子に対しても成り立つ公式 (2.3.48)を使って，

$$U(I_\lambda)U(a,1)U^{-1}(I_\lambda) = U(I_\lambda a, 1) \tag{2.3.49}$$

となることを示せ (この (2.3.49) を導くときに，Poincaré 群の一次元ユニタリ表現は恒等表現に限るという事実 (Wightman (1960 b)) が利用される).

(2.3.49) は証明されたとし，さらに，エネルギー・運動量を表わす生成演算子 P を用いて

$$U(a,1) = e^{-iPa} \tag{2.3.50}$$

と書けることを考慮すると，

$$U(I_\lambda) \text{ がユニタリなら } U(I_\lambda)P^\mu U^{-1}(I_\lambda) = I_\lambda P^\mu,$$
$$U(I_\lambda) \text{ が反ユニタリなら } U(I_\lambda)P^\mu U^{-1}(I_\lambda) = -I_\lambda P^\mu \tag{2.3.51}$$

という関係を容易に導くことができる．

他方において，スペクトル条件からエネルギーの符号は常に正である．従って(2.3.51)の第一の可能性が実現されるのは $I_\lambda = I_s$ の場合，第二の可能性が実現されるのは $I_\lambda = I_t$ あるいは I_{st} の場合でなければならない．こうして定理 2.3.1 は証明された．

演算子 $U(gI_\lambda)$，$g \in \widetilde{\mathscr{P}}$，の位相因子はまだ自由であるから，それを

$$U(g)U(I_\lambda) = U(gI_\lambda) \qquad (g \in \widetilde{\mathscr{P}}, \lambda = s, t, st) \tag{2.3.52}$$

が成り立つように定めよう．また $U(I_t)$ と $U(I_{st})$ の位相を適当に選んで

$$U(I_s)U(I_t) = U(I_{st}) \tag{2.3.53}$$

とすることができる．さらに，$U(I_s)$ はユニタリ演算子だから，すでに注意したように，等式

$$U^2(I_s) = 1 \tag{2.3.54}$$

がみたされるようにすることができる．

問題 2.3.10 (2.3.53) と (2.3.54) を使って

$$\omega(I_t, I_s) = \omega(I_t, I_t)\omega(I_{st}, I_{st}),$$

$$\omega(I_{st}, I_t) = \omega(I_t, I_t),$$
$$\omega(I_s, I_{st}) = 1,$$
$$\omega(I_t, I_{st}) = \omega(I_{st}, I_{st}),$$
$$\omega(I_{st}, I_s) = \omega(I_t, I_t)\omega(I_{st}, I_{st}) \tag{2.3.55}$$

が成り立つことを示せ.

反転の群の射線表現は $U^2(I_t), U^2(I_{st})$ の値によって特徴づけられる．これらの値には四通りの組み合せ (1, 1)，(1, −1)，(−1, 1)，(−1, −1) があり，これによって表現の型が決定される.

§ 4. Dirac 方程式と四成分スピノル

この§4ではひとつの例題として，群 $SL(2)$ のトリヴィアルでない最低次表現（これはユニタリでない）およびそれに関連して群 $\tilde{\mathfrak{P}}$ のユニタリ表現を検討しよう．これらの表現には後の章で繰り返し出会うことになるだろう.

4.1. 群 $SL(2)$ のスピノル表現と空間反転

群 $SL(2)$ の自明でない最低次の表現（〈基本表現〉）は二次元である．この表現に従って変換する量をスピノルという．群 $SL(2)$ には同値でない二次元表現が二つあるから，それに応じてスピノルにも二つの型がある．それぞれ ξ^α, $\chi_{\dot\alpha}$ で表わすことにしよう．点のない上つき添え字をもつスピノルが行列 A によって $\xi^{\alpha\prime} = A^\alpha_\beta \xi^\beta$ と変換するとき，点のある下つき添え字をもつスピノルは行列 A^{*-1} によって $\chi'_{\dot\alpha} = (A^{*-1})^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\chi_{\dot\beta}$ と変換することになる．さらに点のある添え字が上についたときには複素行列 $\bar{A}$ に従って変換し，点のない添え字が下についたときは〈双対行列〉 $\hat{A} = A^{T-1}$ に従うと考えることにしよう．このことから，変換法則 (2.2.14) に従って変換する〈スピン・テンソル〉 $\underset{\sim}{x}$ は $\underset{\sim}{x}^{\alpha\dot\beta}$ という型のテンソルであることがわかる.

問題 2.4.1
$$A^{*-1} = \varepsilon\bar{A}\varepsilon^{-1}, \quad \hat{A} = \varepsilon A\varepsilon^{-1} \tag{2.4.1}$$
が成り立つこと，従って表現 A と $\hat{A}$ ($\bar{A}$ と A^{*-1}) は同値であることを示せ．ここで $\varepsilon = i\sigma_2$ は2行2列の行列 (2.3.46) である．このように，反対称テンソル ε はテンソルの添え字を上げ下げするために利用することができる（ヒント：等式 (2.3.39) を用いよ).

スピノル ξ が行列 A に従って変換するなら，ξ に複素共役なスピノルが複素共役表現 $\bar{A}$ に従って変換することは明らかである．それゆえ，上述の約束によれば，その成分は $\bar{\xi}^{\dot\alpha}$ のように点のある添え字によって番号づけられることになる.

次に空間反転 I_s のスピノル表現を定義しよう.

(2.3.45) によれば，三つの空間軸の反転のさいにスピン・テンソル $\underset{\sim}{x}^{\alpha\dot{\beta}}$ は，

$$\underset{\sim}{x}_{\dot{\alpha}\beta} = (\varepsilon\underset{\sim}{\overline{x}}\varepsilon^{-1})_{\dot{\alpha}\beta}$$

というテンソルに変わる．このことから，空間反転のさいに，点のない上つき添え字をもつスピノルから点のある下つき添え字をもつスピノルへの変換，およびその逆の変換が起こると考えることは自然である．このような性質をもつ変換を線形変換の形に書くには，スピノル表現の次元数を2倍にして四成分の Dirac スピノル（あるいは〈双スピノル〉）

$$v = \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \chi_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

を考えなければならない．群 $SL(2)$ に属する固有変換のさいには，スピノル v は可約表現

$$V(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

に従って変換する．空間反転の演算を公式

$$V(I_s)v = \eta_s\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}v = \eta_s\begin{pmatrix} \chi_{\dot{\alpha}} \\ \xi^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{2.4.4}$$

によって定義しよう．ここで η_s は $\eta_s^4=1$ という条件をみたす位相因子である（なぜ $\eta_s^4=1$ かというと，2回の反転は恒等変換であるか，あるいは 2π だけの回転であると考えられ，$\eta_s^2=\pm1$ となるからである）．普通は $\eta_s^2=-1$ をとっている（問題2.4.7と，それに [6] を参照）．

4.2.　双スピノル表現の不変な書き方とγ 行列の代数

双スピノルの特定の形 (2.4.2) やそれに応じた双スピノル表現の形 (2.4.3) は，四次元スピノル空間に特定の基底を選んだときにだけ成り立つ式である．任意の基底における双スピノルの変換法則を書き下すには，γ 行列を用いる理論形式を採用したほうがよい．

基礎的な定義を思い出しておこう．Minkowski 空間の各四元ベクトル p に Dirac スピノルの四次元複素空間のある線形演算子 $\hat{p}$ を対応させる．そのさいに，

$$\widehat{p+q} = \hat{p}+\hat{q}, \qquad \widehat{\alpha p} = \alpha\hat{p},$$
$$\hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p} = 2(pq)\mathbf{1} \equiv 2(p^0q^0-\boldsymbol{pq})\mathbf{1} \tag{2.4.5}$$

が成り立つように対応を定めるのである．ここで $\mathbf{1}$ は 4×4 の単位行列で α は複素数である．

e_μ を四次元の擬 Euclid 空間における正規直交基底とする．すなわち

$$e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}, \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

任意の四元ベクトルはこれらの基底ベクトルの線形結合

$$p = p^\mu e_\mu,$$

の形に書くことができる．対応 $p \to \hat{p}$ の線形性から，演算子 $\hat{p}$ を，

$$\hat{p} = p^\mu \hat{e}_\mu \equiv p^\mu \gamma_\mu$$

の形に表現することができる．ここに γ_μ はある標準的な 4×4 の行列であり，(2.4.5) のおかげで

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{2.4.6}$$

という交換関係を満足する[1]（$g_{\mu\nu}$ は Minkowski 空間の計量テンソル）．行列 γ_μ とともに，添え字が上についた行列

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\nu$$

もこれからしばしば利用することになろう．γ^μ も (2.4.6) と同じ反交換の関係式を満足する．なお，

$$\hat{p} = p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu \gamma^\nu \tag{2.4.7}$$

という等式が成り立つ．以下では (2.4.6) に加えて，行列 γ^0 はエルミート，行列 γ^j ($j = 1, 2, 3$) は反エルミート，すなわち，

$$\gamma^{\mu *} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu$$

となることを常に仮定することにしよう．すると (2.4.6) から，任意の γ^μ が，従ってそれらの積がまた，ユニタリとなる．

反交換関係 (2.4.6) は，$L(4, C)$ の任意の元によるすべての相似変換で保存されるが，γ 行列の（反）エルミート性はユニタリ行列による相似変換 $\gamma^\mu \to V\gamma^\mu V^*$ ($VV^* = 1$) を行なったときにだけ保存される．

γ 行列の理論において，重要な役割を演ずるのは Pauli の補題である：

[Pauli の補題] 反交換関係 (2.4.6) を満足する二組の 4×4 行列を γ_μ, γ'_μ とすれば，それらは相似変換

$$\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1},$$

によって結びつけられる．ただし S は 4 行 4 列の正則行列であり，γ_μ と γ'_μ によって数因子をのぞいて一意的に決定される．

---

[1] 行列 γ_μ がエルミートで，反交換関係が $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$ となるもうひとつの定義が用いられることもある（たとえば [28]，[29] を見よ）．ここでは [4]，[6] で採用した記法をひきつづき用いる．

この補題の初等的な証明は Good の綜合報告 (1955) や [6] に見られる．それをここに再録することはやめておこう．

γ 行列のあらゆる可能な積（単位行列を含む）は16個の独立な元をもつひとつの代数を生成する．そのなかでも特別な役割を演ずるのは4個の γ 行列の積

$$\gamma^5 = -\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{2.4.8}$$

である．行列 γ^5 は反エルミートで，行列 γ^μ と反交換する：

$$[\gamma^5, \gamma^\mu]_+ = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad (\gamma^5)^2 = -1. \tag{2.4.9}$$

問題　2.4.2　反交換関係 (2.4.6) と，(2.4.9) を満足する行列 γ^5 の存在とを用いて，奇数個の行列 γ^μ の積の対角和はゼロに等しいこと，および

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

であることを示せ．

演算子 $\hat{p}$ の作用がスピノル空間の基底の選び方によらない[1]ためには，基底を V で変換するさいに $\hat{p}$ が混合テンソル $\hat{p}^\alpha_\beta\,(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ のように振舞うことが必要なのである．このことから群 $SL(2)$ の双スピノル表現 $V(A)$ とこの群の四次元 (Lorentz) 表現 $\Lambda(A)$ とを結びつける次の関係が求められる——

$$V(A)\,\hat{p}V^{-1}(A) = \Lambda\widehat{(Ap)} = \gamma_\mu\Lambda(A)^\mu_{\ \nu}p^\nu.$$

この等式は任意の p に対して成り立つから，

$$V(A)\gamma_\nu V^{-1}(A) = \gamma_\mu\Lambda(A)^\mu_{\ \nu}, \tag{2.4.10}$$

あるいは

$$V(A)\gamma^\nu V^{-1}(A) = \Lambda\,(A^{-1})^\nu_{\ \mu}\gamma^\mu \tag{2.4.10 a}$$

が成り立つ．

問題　2.4.3　a)　(2.4.6) のみを用いて，行列

$$s^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{2.4.11}$$

は角運動量演算子 $M^{\mu\nu}$ の交換関係 (2.3.1) を満足することを示せ．

b)　$s^{\mu\nu}$ という量は Lorentz 群の双スピノル表現 $V(A)$ の無限小演算子であることを確かめよ[2]（ヒント：$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_{\ \nu}$ として Lorentz 群に無限小パラメータ $\omega^\mu_{\ \nu}$ を導入する．(2.4.10) と恒等式

$$[s^{\lambda\mu}, \gamma^\nu] = \mathrm{i}\,(g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu) \tag{2.4.12}$$

とを用いてこの場合に　$V(A) = 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}s^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$ であることを示せ）.

---

1) Rashevskii (1955), (1958) の用語では，こういう演算子をスピン・アフィノールという．

2) 演算子 $s^{\mu\nu}$ のことを，対応するスピン 1/2 の粒子の固有(あるいはスピン)角運動量という．

なお，演算子 M, N (2.3.4) のスピノル表現 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ は，

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \quad . \tag{2.4.13}$$

となる．

問題　2.4.4　a を複素単位ベクトル (問題2.2.1参照) とし，$A = \underset{\sim}{a} = a^0\sigma^0 + a^j\sigma^j$ と置く．任意の基底において群 $SL(2)$ の双スピノル表現行列は，

$$V(A) = \hat{a}\gamma^0\frac{1+\mathrm{i}\gamma^5}{2} + \hat{\tilde{a}}\gamma^0\frac{1-\mathrm{i}\gamma^5}{2} \tag{2.4.14}$$

によって与えられることを示せ．ここで $\hat{a}$ は等式 (2.4.7) で与えられている(ヒント：行列 $A = \underset{\sim}{a}$ を (2.3.2), (2.3.3) のようなパラメータで表わし，表現 (2.4.14) の生成演算子が (2.4.11) の行列 $s^{\mu\nu}$ と一致することを示せ)．

スピノル表現 $V(A)$ の特定の形 (2.4.3) は γ 行列として

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & g^{\mu\mu}\sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \tag{2.4.15}$$

を選んだ場合にあたる．この基底では行列 $\hat{p}$ (2.4.7) は，

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{p} \\ \tilde{p} & 0 \end{pmatrix}$$

の形になる．

4.3.　スピノルの不連続変換と不変双一次形式

この節では演算 I_s と I_t のスピノル表現を調べ，また荷電共役という演算を導入しよう．

γ 行列の言葉でいえば，空間反転の演算は，スピノル空間における線形演算子

$$V(I_s) = \eta_s\gamma^0 \tag{2.4.16}$$

によって与えられ，

$$V(I_s)\,\hat{p}V^{-1}(I_s) = p^0\gamma^0 + p^j\gamma^j = p_0\gamma^0 - p_j\gamma^j = \hat{p}^* \tag{2.4.17}$$

という性質をもつ．ここで η_s はある数因子で，$|\eta_s| = 1$ である (反転の演算を二回行なうことは，単に位相因子をかけるだけになるはずだから)．

時間反転の演算に移るまえに，スピノル空間に演算子 C を導入しておこう．C とはこれを用いて反対称な不変双一次形式

$$vCu = -uCv = v^\alpha C_{\alpha\beta}u^\beta \tag{2.4.18}$$

を与えることができるような行列である．演算子 C の存在は，表現 $V(A)$ と $V^{T-1}(A)$ が同値であることから導かれる．この同値性をもっとも手軽に確かめるには $V(A)$ の具体的表示 (2.4.3) と等式 (2.4.1) を利用すればよい．

普通，行列 C は等式

$$C\gamma^{\mu}C^{-1} = -\gamma^{\mu T} \tag{2.4.19}$$

および規格化の条件

$$C^2 = -1 \quad \text{あるいは} \quad C^T = -C = C^{-1} \tag{2.4.20}$$

によって定義される．行列 $\gamma^{\mu T}$ は γ^{μ} と同じ反交換関係を満足するから，Pauli の補題によって，(2.4.19) を満足する演算子 C は確かに存在する．規格化条件 (2.4.20) により C は符号の不定性を除いて決定される．行列 C の反対称性は (2.4.19) の帰結にほかならない．

問題　2.4.5　演算子 C が (2.4.19) の条件を満足するならば，C は表現 $V(A)$ と $V^{T-1}(A)$ とを同値にする変換を与えること，すなわち，

$$V^{T-1}(A) = CV(A)C^{-1}$$

であることを示せ（ヒント：(2.4.19) と (2.4.11) から

$$Cs^{\mu\nu}C^{-1} = -s^{\mu\nu T}$$

が導かれることを示し，ついで $s^{\mu\nu}$ が表現 $V(A)$ の生成演算子ならば $-s^{\mu\nu T}$ は表現 $V^{T-1}(A)$ の生成演算子であることを利用せよ）.

上の問から，双一次形式 (2.4.18) が $SL(2)$ に属する固有変換に関して不変であることが導かれる．空間反転のさいには，(2.4.18) には $-\eta_s^2$ がかかり，この式は位相因子が $\eta_s = \pm \mathrm{i}$ の場合に限って不変になる．

さて，いよいよ《時間の物理的反転》の演算子 $V(I_t)$ を定義することができる．定理 2.3.1 および (2.3.51) の二番目の式にあうように，この演算子は反線形で，エネルギーを不変にし，三次元運動量の符号を変えることを要求しよう．このことから (2.4.17) を使って

$$V(I_t)\hat{p}V^{-1}(I_t) = \bar{\hat{p}}^* = \hat{p}^T \tag{2.4.21}$$

が得られる．(2.4.19) と (2.4.9) を使って，反ユニタリ演算子

$$V(I_t)u = \mathrm{i}\eta_t\gamma^5 C\bar{u} \tag{2.4.22}$$

がこの性質をもつことは容易に確かめられる．ただし $\eta_t^4 = 1$ である．

時間の物理的反転とともに，時間軸の幾何学的反転を導入することもできる．この演算のスピノル表現は $V = \eta\gamma^0\gamma^5$ というユニタリ演算子になるが，これから先でこの概念を利用することはないだろう．

次にスピノルの《Dirac 共役》を

$$\tilde{u} = \gamma^0\bar{u} \tag{2.4.23}$$

という式で定義しよう．

問題 2.4.6 次のことを示せ：

a) 二次形式 $\tilde{u}u$ は任意の固有あるいは固有でない Lorentz 変換に関して不変である.

b) $\tilde{u}\gamma^5 u$ という量は群 $SL(2)$ に属する固有変換に関しては不変であるが，空間反転，時間反転では符号をかえる.

c) $\tilde{u}\gamma^\mu u$ は反転にさいして普通の四元ベクトルのように変換する．従って，空間成分は符号を変える.

d) $\tilde{u}\gamma^5\gamma^\mu u$ はギ・ベクトルのように変換する．つまり空間反転のさいには時間成分だけが符号を変え，時間反転のさいには三つの空間成分が符号を変える（ヒント：(2.4.10)，(2.4.16)，(2.4.22) および恒等式

$$(s^{\mu\nu})^* = \gamma^0 s^{\mu\nu}\gamma^0, \qquad [s^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$$

を利用せよ).

定数のスピノル u の代わりに，古典スピノル場 $\psi(x)$ を考えるなら，任意の Lorentz 変換 $\Lambda = \Lambda(A)$ にさいして，ψ の変数もそれに応じた変換をうけることを特に注意しておく．すなわち，

$$[U(A)\psi](x) = V(A)\psi(\Lambda^{-1}(A)x) \tag{2.4.24}$$

である．無限次元表現 (2.4.24) がユニタリとなるように，$\psi(x)$ の空間にスカラー積を定義できることはあとで示されるだろう.

さらに荷電共役の概念を導入しておこう．これは，

$$u^C = C\tilde{u} \tag{2.4.25}$$

によって定義される．荷電共役という言葉の意味は，のちにスピノル粒子の状態ベクトル空間 (5.3 節) や演算子としてのスピノル場（第 3 章 4.3 節）を扱うときに明らかとなるだろう．ここでは荷電共役スピノル u^C を使うことにより，時間反転による変換 (2.4.22) が，

$$V(I_t)u = \mathrm{i}\eta_t\gamma^0\gamma^5 u^C \tag{2.4.26}$$

の形に書けることを注意しておくにとどめよう.

問題 2.4.7 a) 固有 Lorentz 変換のさいに，スピノル u^C は u とまったく同じ表現に従って変換することを示せ.

b) 空間反転のさいには，

$$V(I_s)u^C = -\bar{\eta}_s\gamma^0 u^C \tag{2.4.27}$$

であり，変換法則 (2.4.27) が (2.4.16) と一致するのは $\eta_s = -\bar{\eta}_s$，つまり η_s が純虚数の場合に限られることを示せ

c) 時間反転のさいには，

$$V(I_t)u^C = \mathrm{i}\bar{\eta}_t\gamma^5\gamma^2\gamma^0\bar{u}^C = \mathrm{i}\bar{\eta}_t\gamma^0\gamma^5 u \tag{2.4.28}$$

であり，これが形の上で (2.4.22) あるいは (2.4.26) と一致するのは位相因子 η_t が実数（つまり $\eta_t = \pm 1$）の場合に限られることを示せ（以下では位相因子 η_s, η_t に関して，u と u^C で形が一致す

るようにとるという約束を守ってゆくことにしよう).

4.4. γ 行列のいろいろな表示

これまでの4.2節，4.3節の結果は γ 行列の特定の形とは無関係に成り立つが，時によっては具体的な表示を用いたほうが都合のよいこともある．その場合，問題に応じて便利な表示がちがう．

ここでは γ 行列の表示として二つの種類を考えよう．第一種とは $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^3$ の行列要素を実数，γ^2 を純虚数とする表示の総称である．エルミート共役をとったときの γ 行列の振舞いおよび以上の約束から，転置行列に対する次のような簡単な関係式が導かれる：

(I)　$$\gamma^{\mu T} = (-1)^{\mu}\gamma^{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{2.4.29}$$

左端に（I）と書いたのは，(2.4.29) が γ 行列の一般的性質ではなく，第一種の表示においてのみ成り立つことを忘れないためである．この場合，演算子 C の定義式 (2.4.19) は，

(I)　$$C\gamma^{\mu}C^{-1} = (-1)^{\mu+1}\gamma^{\mu} \tag{2.4.19 a}$$

という形になる．

(2.4.19 a) と規格化条件 (2.4.20) を満足する行列 C は，

(I)　$$C = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 \tag{2.4.30}$$

になる．これが実行列で反対称であり，γ^5 と可換であることは容易にわかる．

第一種の表示に属するものとしては基底 (2.4.15) がある．このときには $SL(2)$ の双スピノル表現が準対角型 (2.4.3) に書ける (γ^5 が対角行列となる任意の基底において，表現 $V(A)$ は準対角型となる)．

第一種に属する基底のもう一つの例は Pauli 表示で，この表示では γ^0 が対角行列である．この表示の γ 行列には P を添えることにすれば，

$$\gamma_P^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_P^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_P^5 = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.31}$$

この表示はたとえば Dirac 方程式の正エネルギー解と負エネルギー解とを分離することが必要な場合には便利である (4.5節を見よ)．容易にわかるように，二つの基底 (2.4.15) と (2.4.31) は対称直交変換 S によって結びついている——$\gamma_P^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}$．ただし

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} = S^T = S^{-1}.$$

(2.4.15) と (2.4.31) のいずれの基底においても，$SL(2)$ の部分群 $SU(2)$ の生成演

算子 m^j (2.4.13) は (2.3.4) の最初の式の M^j とまったく同じ形になることを注意しておくのも無駄ではなかろう.

第二種とは，すべての γ^μ が純虚数行列となる表示を総称する．いわゆる《Majorana 表示》である．この表示のすぐれた点は，群 $SL(2)$ の双スピノル表現の生成演算子 $s^{\mu\nu}$ (2.4.11) も純虚数行列となり，従って表現 $V(A)$ の行列要素が実数となること，γ^5 もまた実行列となることである．われわれは，このような表示をスピンと統計との関係を議論するさいに利用するであろう（第5章 §3）．Majorana 表示では γ^0 が反対称，γ^j が対称な行列となる．すなわち，

$$\text{(II)} \qquad \gamma^{\mu T} = -g^{\mu\mu}\gamma^\mu = -\gamma^{\mu *} \tag{2.4.32}$$

であり，(2.4.19) と組み合わせると，

$$\text{(II)} \qquad C\gamma^\mu C^{-1} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu = \gamma^{\mu *} \tag{2.4.19 b}$$

を与える．この条件と規格化条件 (2.4.20) を満足する行列 C は，

$$\text{(II)} \qquad C = \mathrm{i}\gamma^0 \tag{2.4.33}$$

になる．この表示では荷電共役は (2.4.25) により単なる複素共役に帰着される．

Majorana 表示の例をあげよう．この表示の行列には M を添えることにして，

$$\begin{aligned}
&\gamma_M^0 = \mathrm{i}\gamma_P^1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma_1 \\ -\mathrm{i}\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_M^1 = \mathrm{i}\gamma_P^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma_0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma_0 \end{pmatrix}, \\
&\gamma_M^2 = \gamma_P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_M^3 = -\gamma_P^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma_0 \\ \mathrm{i}\sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\gamma_M^5 = \gamma_P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

Pauli の補題によって γ_P^μ と γ_M^μ は相似変換 $\gamma_M^\mu = S\gamma_P^\mu S^{-1}$ によって結びつけられており，容易にわかるように，S は対称ユニタリ行列

$$\begin{aligned}
&S = \frac{1+\mathrm{i}\gamma_P^2}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}\gamma_P^3\gamma_P^5 - \gamma_P^0\gamma_P^1}{2}, \\
&S^{-1} = S^* = \frac{1+\mathrm{i}\gamma_P^2}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}\gamma_P^3\gamma_P^5 - \gamma_P^0\gamma_P^1}{2} = \overline{S}, \\
&S^4 = 1
\end{aligned}$$

である．

交換関係 (2.4.6) と（反）エルミート性の条件 $\gamma^{\mu *} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu$ をあわせたものは，すべてのユニタリな相似変換 ($S \in U(4)$) に関して不変であるが，(I)，(II) という種類を

それぞれ不変にするのは，実直交群の行列による相似変換（$S\in O(4)$）だけである．

4.5. Dirac 方程式

四成分スピノルに対する最も簡単な不変方程式が Dirac 方程式

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-m\right)\psi(x)=0, \tag{2.4.35}$$

であり，これは運動量空間で書くと

$$(\hat{p}-m)u(p)=0 \tag{2.4.36}$$

となる．

問題 2.4.8 a）並進がスピノル添え字には作用しないこと，つまり $U_a\Psi(x)=\Psi(x-a)$ を仮定するならば，Dirac 方程式は Poincaré 群に属する任意の（反転を含む）変換に関して不変であることを示せ．

b）スピノル $u(p)$ が (2.4.36) を満足するなら，Dirac 共役スピノル $\tilde{u}(p)$ は方程式

$$\tilde{u}(p)(\hat{p}-m)\equiv(\hat{p}^{T}-m)\tilde{u}(p)=0 \tag{2.4.37}$$

を満足し，一方，荷電共役スピノル u^{C} は方程式

$$(\hat{p}+m)u^{C}=0 \tag{2.4.38}$$

を満足することを示せ（ヒント：等式

$$\gamma^{0}\hat{p}\gamma^{0}=\hat{p}^{*} \tag{2.4.39}$$

を利用せよ）．

方程式 (2.4.36) は，普通はエネルギー固有値 p^0 に対する方程式と考えられている．p^0 のとりうる値は条件

$$\det(\hat{p}-m)\equiv(p^2-m^2)^2=0$$

から定められる．この方程式は二つの二重根

$$p^0=\pm\omega \qquad (\omega\equiv\omega_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}) \tag{2.4.40}$$

をもっている．縮退を除くために，Dirac 方程式の解 $u(p)$ は，スピンの第三成分の演算子 S^3 の固有関数となることを要求しよう．S^3 は $\hat{p}$ と可換である．

スピン演算子 $\boldsymbol{S}$ は静止系における表現

$$S_0^j\equiv S_{\boldsymbol{p}=0}^j=m^j=\frac{i}{2}\gamma^5\gamma^0\gamma^j \tag{2.4.41}$$

から Lorentz 変換を用いて定義しよう．

それには $\omega=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ として，静止した粒子の運動量 $(m,\boldsymbol{0})$ を任意の運動量 $(\omega,\boldsymbol{p})$ に変える純 Lorentz 変換のスピノル表現 V を求めなければならない．

問題 2.4.9 求める表現はエルミート行列

$$V = \hat{a}\gamma^0 \tag{2.4.42}$$

によって与えられることを示せ．ただし $\boldsymbol{a}$ は長さ1の実四元ベクトルで，その成分は，

$$a^0 = \frac{p^0+m}{\sqrt{2m(p^0+m)}}, \qquad a^j = \frac{p^j}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \tag{2.4.43}$$

である（ヒント：(2.4.14) および次のことを利用せよ．すなわち V の定義により

$$\hat{p} = mV\gamma^0V^{-1} = mVV^*\gamma^0 \tag{2.4.44}$$

および

$$\hat{a}\hat{a}^*\gamma^0 = ((a^0)^2+\boldsymbol{a}^2)\gamma^0 - 2a^0a^j\gamma^j \tag{2.4.45}$$

である（問題 2.3.6 と対比せよ））．

(2.4.42) を利用すれば，スピン演算子に対する表現

$$\begin{aligned} S^j = VS_0^jV^{-1} = \hat{a}S_0^j\hat{a} &= ((a^0)^2+\boldsymbol{a}^2)m^j - 2a^0(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})^j - 2a^j(\boldsymbol{am}) \\ &= \frac{1}{m}\left\{p^0m^j - (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})^j - \frac{p^j}{p^0+m}(\boldsymbol{pm})\right\} \\ &= \frac{1}{m}\left(w^j - \frac{w^0p^j}{p^0+m}\right) \qquad (p^0 = \omega) \end{aligned} \tag{2.4.46}$$

を得る．ここで行列 m^j と n^k は (2.4.13) によって与えられ，w^μ は (2.3.7) により $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ と結びついている．当然予想されたように，(2.4.46) の最後の等式は小さな群のスピン演算子の表現 (2.3.18) と一致することに注意しよう．

同様にして，負エネルギー解に対しては，四元運動量 $(-m, \boldsymbol{0})$ を $(-\omega, \boldsymbol{p})$ に変える純 Lorentz 変換の表現 V が反エルミート行列

$$V = \mathrm{i}\hat{a}\gamma^0\gamma^5 \tag{2.4.47}$$

によって与えられる．ここで，純虚数の単位四元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分は，$p^0 = -\omega$ としてやはり (2.4.43) で与えられる．スピン演算子に対する表現も $p^0 = -\omega$ とすれば，もとのままの形 (2.4.46) でよい．

問題 2.4.10 行列 S^j はいずれも $\hat{p}$ と可換であることを示せ．

スピノル u がスピンの第三成分 S^3 の固有ベクトル，すなわち

$$S^3u(p) = \zeta u(p) \tag{2.4.48}$$

であるとしよう．与えられた $p^0 = \pm\omega$ と $\zeta = \pm 1/2$ に対し，連立方程式 (2.4.36) と (2.4.48) は，定数因子の不定性を別にして，一意的な解をもつ．この連立方程式の解に規格化条件

$$\bar{u}u = \frac{\omega}{m} \tag{2.4.49}$$

を課することにしよう．これは Dirac 共役 $\tilde{u}$ と u の積で書けば，

$$\tilde{u}u = \epsilon(p^0) = \frac{p^0}{\omega} \tag{2.4.50}$$

となる．

連立方程式 (2.4.36) と (2.4.48) の四個の独立解を $u^{r(\pm)}(\boldsymbol{p})$ と記そう．ここに，$r=1,2$ で (+) は正エネルギー解 ($p^0=\omega$)，(−) は負エネルギー解 ($p^0=-\omega$) に対応する．ζ は $r=1$ のとき 1/2，$r=2$ のとき −1/2 である．スピノル $u^{r(\pm)}$ は二つのエルミート行列，つまり行列

$$H = m\gamma^0 + \boldsymbol{p}\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \tag{2.4.51}$$

と行列 (2.4.46) の同時固有ベクトルであるが，異なる固有値に属するから，互いに直交する．すなわち

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}^{r(\pm)}(\boldsymbol{p})u^{s(\pm)}(\boldsymbol{p}) = \frac{\omega}{m}\delta_{rs},\\
&\tilde{u}^{r(+)}(\boldsymbol{p})u^{s(-)}(\boldsymbol{p}) = \tilde{u}^{r(-)}(\boldsymbol{p})u^{s(+)}(\boldsymbol{p}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.52}$$

上つき添え字(つまりスピン成分とエネルギーの符号)について和をとっても，正規直交関係

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2}\{u_\alpha^{r(+)}(\boldsymbol{p})\tilde{u}_\beta^{r(+)}(\boldsymbol{p}) + u_\alpha^{r(-)}(\boldsymbol{p})\tilde{u}_\beta^{r(-)}(\boldsymbol{p})\} = \frac{\omega}{m}\delta_{\alpha\beta},\\
&\sum_{r=1}^{2}\{u_\alpha^{r(+)}(\boldsymbol{p})\tilde{u}_\beta^{r(+)}(\boldsymbol{p}) - u_\alpha^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\tilde{u}_\beta^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\} = \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.4.53}$$

が成り立つ．また次のような和の公式も後で使うことがあろう：

$$\sum_{r=1}^{2}\{u_\alpha^{r(+)}(\boldsymbol{p})\tilde{u}_\beta^{r(+)}(\boldsymbol{p}) + u_\alpha^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\tilde{u}_\beta^{r(-)}(-\boldsymbol{p})\} = \left(\frac{\hat{p}}{m}\right)_{\alpha\beta}. \tag{2.4.54}$$

公式 (2.4.53) と (2.4.54) を導くことは読者におまかせする ([4] を参照)．

Dirac 方程式の四個の解を，γ^0 が対角行列となる表示 (2.4.31) であらわな形に書き下しておこう——

$$\begin{aligned}
u^{r(+)}(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2m(\omega+m)}}\begin{pmatrix}(\omega+m)e_r\\ (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})e_r\end{pmatrix},\\
u^{r(-)}(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2m(\omega+m)}}\begin{pmatrix}-(\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})e_r\\ (\omega+m)e_r\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.4.55}$$

ここで，

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

である．

問題 2.4.11 a) γ 行列の形が (2.4.15) あるいは (2.4.34) となるような表示において，スピノル $u^{r(\pm)}(\boldsymbol{p})$ のあらわな形を書いてみよ．
b) 表示の選び方によることなく，次の等式が成り立つことを示せ：

$$C\tilde{u}^{1(+)}(\boldsymbol{p}) = -u^{2(-)}(-\boldsymbol{p}), \qquad C\tilde{u}^{2(+)}(\boldsymbol{p}) = u^{1(-)}(-\boldsymbol{p}),$$
$$C\tilde{u}^{1(-)}(\boldsymbol{p}) = u^{2(+)}(-\boldsymbol{p}), \qquad C\tilde{u}^{2(-)}(\boldsymbol{p}) = -u^{1(+)}(-\boldsymbol{p}).$$

4.6. Poincaré 群のスピノル表現

Poincaré 群のスピノル表現 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ は，4.1 節で扱った Lorentz 群のスピノル表現とはちがって，ユニタリで，また無限次元である．しかしながら，これら二つの群の表現のあいだには密接な関係がある．形式的にいえば，群 $\tilde{\mathcal{P}}$ のスピノル表現と群 $SL(2)$ の対応する有限次元表現とのちがいは，表現 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ の作用するスピノルが連続なベクトル変数 p の関数であり，スピノル添え字だけでなくこの p もまた変換を受ける点にある．

われわれはすでに (3.3 節)，三次元回転群の対応する変換と関係づけることによって，群 $\mathcal{P}_0$ の $[m, j, +]$ 型のすべての既約表現の記述を与えた．この節では群 $SL(2)$ の双スピノル表現 $V(A)$ と結びつけて，上の表現（ただし $j = 1/2$ という特定の場合）のもうひとつの具体的表示を与えよう．この表示では，スピノル添え字の変換はベクトル変数 p に依存しない．これら二つの具体的表示は，演算子 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ が作用する空間 $\mathcal{H}_{m1/2}$ において二つの異なった基底を選ぶことに対応する．二つの基底の関係は後であらわな形に書き下すことにしよう．

まず，空間 $\mathcal{H}_{m1/2}$ を考えてみよう．これは双曲面 V_m^+ を定義域とする四成分スピノル関数 $\Psi = \Psi^\alpha(p)$ で不変積分

$$(\Psi, \Psi) = \int_{V_m^+} \tilde{\Psi} \frac{1}{m} \hat{p} \Psi \frac{d^3p}{p^0} \tag{2.4.56}$$

が収束するもの全体からなる空間である．

問題 2.4.12 (2.4.56) はスカラー積を定義すること，つまり，スピノル関数 Ψ が恒等的にゼロとはならないとき，$(\Psi, \Psi) > 0$ であることを示せ（ヒント：$p \in V_m^+$ ならば，$\gamma^0 \hat{p}$ は正定値行列となることを示せ）．

群 $\mathcal{P}_0$ のスピノル表現は $\mathcal{H}_{m1/2}$ において，

$$[U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi](p) = e^{-ipa} V(A) \Psi(\Lambda^{-1}(A)p) \tag{2.4.57}$$

という法則に従って作用する．ここで $V(A)$ は$SL(2)$の双スピノル表現 (2.4.3) の 4 行

4列の行列である．

問題　2.4.13　変換 (2.4.57) がスカラー積 (2.4.56) を保存する，つまり

$$(U(\underset{\sim}{a}, A)\Phi, U(\underset{\sim}{a}, A)\Psi) = (\Phi, \Psi) \tag{2.4.58}$$

であること，従って表現 (2.4.57) はユニタリであることを示せ（ヒント：等式 (2.4.15) および

$$V^*(A)\gamma^0 = \gamma^0 V^{-1}(A) \tag{2.4.59}$$

という関係を利用せよ．なお問題2.4.5も参照)．

表現 (2.4.57) の生成演算子は，

$$P^\mu = p^\mu, \qquad M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}; \qquad s^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{2.4.60}$$

となる．ここで $L^{\mu\nu}$ は軌道角運動量であり，その定義は，

$$L^{ij} = i\left(p^i \frac{\partial}{\partial p^j} - p^j \frac{\partial}{\partial p^i}\right), \qquad L^{0j} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p^j},$$

$$[L^{\mu\nu}, s^{\kappa\lambda}] = 0$$

である．角運動量の軌道部分 ($L^{\mu\nu}$) とスピン部分 ($s^{\mu\nu}$) が可換であることは大切である．この点が，この表示と Wigner の表示 (2.3.41) とのちがいであり，また，この表示を局所場の記述（第3章 §4）に有用なものにしている．

表現 (2.4.57) は $\mathcal{H}_{m1/2}$ において可約である．それを見るために，まず演算子 $\hat{P}$ が表現のすべての演算子と可換であること，すなわち

$$U(\underset{\sim}{a}, A)\hat{P}U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A) = \hat{P} \tag{2.4.61}$$

となることを示そう．(2.4.61) を確かめるには，この式の両辺を $\mathcal{H}_{m\,1/2}$ の任意のベクトル Ψ に作用させ，等式 (2.4.57) と (2.4.15) を用い，さらに (2.2.19) から

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A) = U(-A^{-1}\underset{\sim}{a}A^{*-1}, A^{-1})$$

となることを使えば十分である．

行列 $\hat{p}$ はエルミートではないが，それにもかかわらず，$\mathcal{H}_{m1/2}$ においては $\hat{p}$ をかけるという演算はスカラー積(2.4.56)に関してエルミートであることに注意しよう．すなわち

$$(\Phi, \hat{p}\Psi) = (\hat{p}\Phi, \Psi) \tag{2.4.62}$$

となっている．

問題　2.4.14　行列 $\hat{p}$ がエルミート形式 $\langle u, v\rangle = \tilde{u}v$ に関しエルミートであることを使って，(2.4.62) が成り立つことを証明せよ．

演算子 $\hat{P}$ は $\mathcal{H}_{m1/2}$ においてそれぞれ無限に縮退している二つの固有値 $+m$ と $-m$

をもつ．これに応じて，空間 $\mathscr{H}_{m1/2}$ は二つの直交部分空間 $\mathscr{H}^{+}_{m1/2}$ と $\mathscr{H}^{-}_{m1/2}$ に分解し，その各々は演算子 $\hat{P}$ の固有部分空間であって，変換 (2.4.57) に関して不変である．$\mathscr{H}^{\pm}_{m1/2}$ に対する射影演算子 $\Pi^{\pm}_{m}$ は，

$$\Pi^{\pm}_{m} = \frac{m \pm \hat{P}}{2m} \tag{2.4.63}$$

である．

問題 2.4.15 a) 演算子 (2.4.63) が確かに $\mathscr{H}_{m1/2}$ における正射影演算子であること，すなわち $(\Pi^{\pm}_{m})^2 = \Pi^{\pm}_{m}$, $\Pi^{+}_{m}\Pi^{-}_{m} = 0$ であることを確かめよ．
b) $\hat{P}\Pi^{\pm}_{m}\Psi = \pm m\Pi^{\pm}_{m}\Psi$ であることを示せ．

空間 $\mathscr{H}^{\pm}_{m\,1/2}$ はすでに既約な部分空間，すなわち，その各々において表現(2.4.57)が既約となる空間である．$\mathscr{H}^{+}_{m1/2}$ はDirac方程式の正エネルギー解の全体がつくる空間にほかならない．後に(5.3節および第3章 4.3節)，空間 $\mathscr{H}^{-}_{m1/2}$ をどのようにして反粒子と関係づけることができるかを見るであろう．空間 $\mathscr{H}^{\pm}_{m1/2}$ においてスカラー積 (2.4.56) の形が，

$$(\Phi, \Psi) = \pm\int_{V^{+}_{m}} \widetilde{\Phi}\Psi \frac{d^3p}{p^0} \quad (\Phi, \Psi \in \mathscr{H}^{\pm}_{m1/2}) \tag{2.4.64}$$

となることを注意しておく．

さらに，群 $\mathscr{P}_0$ のひとつの既約部分空間，たとえば $\mathscr{H}^{+}_{m\,1/2}$において，群 $SL(2)$の二つの既約部分空間がいわば混在していることに注意しよう．すなわち，Dirac 方程式を満足する四成分スピノル $\Psi^{(+)}$ は点のある添え字と点のない添え字をもつ二種類の二成分スピノルを含む．しかし，Dirac 方程式の正振動数解 $u^{r(+)}(p)$ (4.5節) を使って，$\mathscr{H}^{+}_{m1/2}$ に p の二成分関数による独立基底を与えることもできる．この基底 $\Psi(p,\zeta)$ とスピノル基底 $\Psi^{(+)\alpha}(p)$ とは次の等式で結ばれている：

$$\Psi^{(+)\,\alpha}(p) = \Psi\left(p, \frac{1}{2}\right)u^{1(+)\alpha}(p) + \Psi\left(p, -\frac{1}{2}\right)u^{2(+)\alpha}(p),$$
$$\Psi(p,\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{4} \tilde{u}_{\alpha}{}^{(\frac{3}{2}-\zeta)\,(+)}(p)\Psi^{(+)\alpha}(p) \tag{2.4.65}$$

(ここでスピノル u の正規直交性 (2.4.50) と (2.4.52) を利用した)．関数 $\Psi(p,\zeta)$ は，われわれが3.3節で群 $\mathscr{P}_0$ の任意の既約表現 $[m, j, +]$ を記述するさいに用いた基底を与えている．

ここで反転 I_s, I_t や荷電共役 I_c という不連続演算が空間 $\mathscr{H}_{m\,1/2}$ でどう働くかについて

簡単に触れておこう．この空間は $\mathcal{P}_0$ に属する固有変換に関して不変なだけでなく，空間反転や時間反転という変換に関しても不変であることがわかる．

実際，空間反転にはユニタリ演算子 $U(I_s)$ が対応し，さらにその作用は (2.4.16) によって，

$$[U(I_s)\Psi](p^0, \boldsymbol{p}) = \eta_s \gamma^0 \Psi(p^0, -\boldsymbol{p}) \tag{2.4.66}$$

である．容易に確かめられるように，$\Psi(p^0, \boldsymbol{p})$ が Dirac 方程式 (2.4.36) を満足するならば，変換されたスピノル (2.4.66) もまた同じ方程式を満足する．従って $U(I_s)$ は空間 $\mathcal{H}^{\pm}_{m1/2}$ をそれぞれ自身のなかに写像する．斉次群 $SL(2)$ のスピノル表現の場合には，空間反転を含めるために空間の次元数を2倍にしなければならなかったことを思い起こそう．群 $\mathcal{P}_0$ のユニタリ表現 $[m, 1/2, +]$ では，スピノルのつくる空間 $\mathcal{H}^{+}_{m1/2}$ は $\mathcal{P}_0$ に関しても，空間反転を含む群に関しても既約である．

時間反転 I_t には (2.4.22) によって反ユニタリ演算子

(I)
$$[U(I_t)\Psi](p^0, \boldsymbol{p}) = \eta_t \gamma^5 \gamma^2 \widetilde{\Psi}(p^0, -\boldsymbol{p}) \tag{2.4.67}$$

が対応する．(2.4.37) を使えば，$\Psi(p^0, \boldsymbol{p})$ が Dirac 方程式を満足するとき，変換されたスピノル (2.4.67) も同じ方程式を満足することは容易にわかる．このようにして，空間反転と時間反転を含む一般群 $\widetilde{\mathcal{P}}$ の同じ一つの既約表現が，$\mathcal{H}^{\pm}_{m1/2}$ の各々において，具体的に表示されることがわかる．

$U(I_s)$ や $U(I_t)$ という演算とちがって (2.4.25) なる荷電共役の反ユニタリ演算子 $U(I_c)$ は，空間 $\mathcal{H}^{+}_{m\,1/2}$ と $\mathcal{H}^{-}_{m\,1/2}$ を互いに入れかえる写像になっている．実際，$\Psi(p) \in \mathcal{H}^{+}_{m1/2}$，つまり Dirac 方程式 (2.4.36) を満足するならば，荷電共役スピノル $\Psi^C(p)$ は問題2.4.8により方程式 (2.4.38) を満足し，空間 $\mathcal{H}^{-}_{m\,1/2}$ に属する．このようなわけで，スピノル関数の状態ベクトル空間で，一般 Poincaré 群だけでなく荷電共役の演算も含めた表現を具体的に表示しようとするならば，$\widetilde{\mathcal{P}}$ に関して既約な部分空間 $\mathcal{H}^{\pm}_{m1/2}$ を別々に考えるのではなく，全空間 $\mathcal{H}_{m\,1/2}$ を考えねばならない（演算 $U(I_c)$ の物理的解釈については5.3節を見よ）．

§5.　例：スカラー粒子とスピノル粒子の空間

5.1.　Gelfand の三つ組の定義——束縛状態のない中性スカラー粒子の場合

最も簡単な例として，スピン0，質量 m の中性の中間子の理論で，束縛状態がないという場合をとりあげよう．こういう理論における状態ベクトルは関数列

$$\Psi = \{\Psi_0, \Psi_1(p_1), \Psi_2(p_1, p_2), \cdots, \Psi_n(p_1, \cdots, p_n), \cdots\} \tag{2.5.1}$$

の形に表わすことができる[1]．$\Psi_n(p_1, \cdots, p_n)$ は，V_m^+ の積空間

$$\begin{aligned} V_m^{+(n)} &= V_m^+ \times V_m^+ \times \cdots \\ &= \{(p_j) | p_j^2 \equiv (p_j^0)^2 - \boldsymbol{p}_j^2 = m^2,\ p_j^0 > 0,\ j = 1, 2, \cdots, n\} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

において定義されている．ベクトル

$$\Psi_0 = \{\Psi_0, 0, \cdots, 0, \cdots\} \tag{2.5.3}$$

は真空を記述し，ベクトル

$$\Psi_n = \{0, \cdots, 0, \Psi_n(p_1, \cdots, p_n), 0, \cdots, 0, \cdots\}$$

は n 粒子状態を記述する．中間子は，すべて互いに区別できないと考えるなら，整数スピンの粒子として Bose=Einstein の統計に従わねばならず，従って $\Psi_n(p_1, \cdots, p_n)$ は変数の任意の置換に関して対称な関数

$$\Psi_n(p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_n) = \Psi_n(p_{n1}, \cdots, p_{ni}, \cdots, p_{nj}, \cdots, p_{nn}) \tag{2.5.4}$$

でなければならない．

区別できないスカラー粒子は Bose 統計に従う——この要請は（非相対論的な理論においてもこういう要請をおくが），相対論的量子論の他の諸要請と無関係ではない．スピンと統計の関係という問題は第5章で扱おう．

ベクトル Ψ からなる空間 $\mathscr{H}$ のスカラー積は，

$$(\Psi, \Phi) = \bar{\Psi}_0 \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{V_m^+} \frac{d^3\boldsymbol{p}}{p_1^0} \cdots \int_{V_m^+} \frac{d^3\boldsymbol{p}_n}{p_n^0} \bar{\Psi}_n(p_1, \cdots, p_n) \Phi_n(p_1, \cdots, p_n) \tag{2.5.5}$$

によって与えられる．ここで $p_i^0 = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}_i^2}$ である．この定義からわかるように，空間 $\mathscr{H}$ は互いに直交する n 粒子状態の Hilbert 空間 $\mathscr{H}_n$（ここで，$n = 0, 1, \cdots$）の直和である．

まえに有限自由度の量子力学の場合に Gelfand の三つ組を構成した (1.2節) のと同じようにして，$\mathscr{H}$ を自然なやり方で三つ組にすることができる．

まず始めに，正則な一粒子状態のつくる核型部分空間 Ω_1 を，位置と運動量の演算子およびそれらの任意の多項式が連続となるような（空間 $\mathscr{H}_1$ の）極大核型部分空間と定義しよう．
相対論的な位置演算子は，

$$\boldsymbol{q} = \sqrt{p^0}\, \mathrm{i} \nabla_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{p^0}} = \mathrm{i} \nabla_{\boldsymbol{p}} - \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{\boldsymbol{p}}{m^2 + \boldsymbol{p}^2} \qquad (p^0 = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}) \tag{2.5.6}$$

---

[1] 状態ベクトルのこのような表わし方は，非相対論の場合に Fock (1932) によって導入された．関数列 (2.5.1) は《タテ》に並べて書かれることが多いので《Fock のタテ・ベクトル》とよばれるのが普通である．

となる．この演算子は正準交換関係 (2.1.8) とエルミート性の条件から定められたものである．

問題 2.5.1　演算子 q^j と p^j $(j=1,2,3)$ が確かに正準交換関係 (2.1.8) を満足すること，演算子 q^j (2.5.6) は演算子 $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial p^j}$ とはちがって，$\mathcal{H}_1$ におけるスカラー積

$$(\Phi_1, \Psi_1) = \int \overline{\Phi}_1(p)\Psi_1(p)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0} \qquad (2.5.7)$$

に関してエルミートであることを示せ．

次に互いに共役な演算子の組[1)]

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p^j - \mathrm{i}q^j) \\ b_j^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p^j + \mathrm{i}q^j) \end{aligned} \qquad (j=1,2,3) \qquad (2.5.8)$$

を用い，1.2節にならって $\mathcal{H}_1$ における正準基底を定義しよう．Φ_0 を

$$b_k\Phi_0 = 0 \qquad (k=1,2,3) \qquad (2.5.9)$$

を満足する規格化されたベクトルとしよう．いま問題としている運動量表示では（演算子 p^k は独立変数 p^k をかけるという演算だから）

$$\Phi_0(p) = \frac{(m^2+\boldsymbol{p}^2)^{1/4}}{\pi^{3/4}}e^{-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2}} \qquad (2.5.10)$$

と表わされる．$\mathcal{H}_1$ における正規直交基底を

$$\Phi_\nu = \Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{(b_1^*)^{\nu_1}(b_2^*)^{\nu_2}(b_3^*)^{\nu_3}}{\sqrt{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3!}}\Phi_0 \qquad (\nu_i = 0,1,\cdots) \qquad (2.5.11)$$

によって定義しよう．

問題 2.5.2　運動量表示において基底ベクトル Φ_ν を表わす関数を求めよ（1.2節参照）．

さらに1.2節にならって，次のようなノルム $\|\Phi\|_r$ がすべて有限となるベクトル Φ の全体として核型空間 Ω_1 を定義しよう．ノルムの定義は，

$$\|\Phi\|_r^2 = (\Phi, h^r\Phi), \qquad (r=0,1,2,\cdots) \qquad (2.5.12)$$

$$h = b_1^*b_1 + b_2^*b_2 + b_3^*b_3 + 1 \qquad (2.5.13)$$

である．1.2節でも注意しておいたが，ノルムの有界性という条件は，ベクトルを基底(2.5.11)で展開したときの係数 $c_\nu(\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3))$ が急減少の三重数列をなすという条件と同値である．ノルム(2.5.12)をもつ可算ノルム空間 Ω_1 は，双曲面 V_m^+ 上の無限に滑らかな急減少関数の空間 $\mathcal{S}(V_m^+)$ と一致する．あるいは，同じことであるが，第1章1.3節で定義した関数 $\Phi(\boldsymbol{p}) = \Phi(p_1, p_2, p_3)$ の空間 $\mathcal{S}(R_3)$ と一致する．

空間 Ω_1 が得られれば，この空間の《対称テンソル積》として Ω_n を定義することができる：

$$\Omega_n = \mathrm{sym}\,\Omega_1^{\otimes n}. \qquad (2.5.14)$$

---

1)　一粒子状態の空間 $\mathcal{H}_1$ で作用する演算子 b^*, b (2.5.8) と粒子数 n を変化させる《第二量子化》された生成・消滅の演算子 $a^*(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{p})$ とを混同してはならない．

この意味は次の通り——双曲面の積空間 $V_m^+\times\cdots\times V_m^+$ を定義域とする n ベクトル変数 $p_1,\cdots,p_n$ の関数で，無限に滑らかで急減少，さらに変数の任意の置換に関して対称なものの全体が空間 Ω_n を構成する．Ω_n における位相は可算ノルム系

$$\|\Phi_n\|_r^2=(\Phi_n,\ (h_1^r+\cdots+h_n^r)\Phi_n)\qquad (r=0,1,\cdots)\tag{2.5.15}$$

によって与えられ，(2.5.13) と同じように

$$h_k=1+b_kb_k^*,\qquad b_k=\frac{1}{\sqrt{2}}(p_k-\mathrm{i}q_k)\qquad (k=1,\cdots,n)\tag{2.5.16}$$

である．

《テンソル積》というよび方は（いまの場合は〈テンソル・ベキ〉であるが），Ω_n を代数的に構成することができるという事実に結びついている．そのため $\Phi_j^{(k)},\ \Psi_i^{(k)}\in\Omega_1$ として，あらゆる可能な有限個の線形結合

$$\Phi_n=\sum_{j=1}^{N_1}\lambda_j\Phi_j^{(1)}\cdots\Phi_j^{(n)},$$

$$\Psi_n=\sum_{i=1}^{N_2}\mu_i\Psi_i^{(1)}\cdots\Psi_i^{(n)}$$

からなる集合 $\mathcal{L}$ を考えよう．$\mathcal{L}$ におけるスカラー積を

$$(\Phi_n,\Psi_n)=\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N_2}\bar{\lambda}_j\mu_i(\Phi_j^{(1)},\ \Psi_i^{(1)})\cdots(\Phi_j^{(n)},\ \Psi_i^{(n)})$$

によって定義し，ノルム $\|\Phi_n\|_r$ は (2.5.15) によって定義されるとしよう．そのとき，空間 $\Omega_1^{\otimes n}$ は可算ノルム系 (2.5.15) によって定義される収束に関して $\mathcal{L}$ を完備化した空間として定義され，Hilbert ノルム $\|\Phi_n\|^2=\|\Phi_n\|_0^2=(\Phi_n,\Phi_n)$ に関して $\mathcal{L}$ を完備化すれば $\mathcal{H}_1^{\otimes n}$ となる．空間 Ω_n と $\mathcal{H}_n$ は，それぞれ空間 $\Omega_1^{\otimes n}$ と $\mathcal{H}_1^{\otimes n}$ のなかの対称な元の全体からなる．対称化演算子は $\mathcal{L}$ においては

$$\mathrm{sym}\,\Phi_n=\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\sum_{\pi}\Phi_j^{(\pi 1)}\cdots\Phi_j^{(\pi n)}$$

という式で定義することができる．ここで π は1から n までの数字の置換を示し，和は $n!$ 個の置換のすべてにわたる．ついで連続性を保つよう拡張して $\mathcal{H}_1^{\otimes n}$ における対称化演算子が得られる．

すべての Ω_n を含む極小の核型空間 Ω は可算ノルム空間の帰納的極限として定義される（第1章1.3節 定義3を見よ)．すなわち Ω はあるところから先はゼロとなる列

$$\Phi=(\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_n,0,\cdots,0\cdots)$$

の全体からなる．ここで n は Φ ごとに変わってよく，$\Phi_j\in\Omega_j$，Ω_0 は複素平面である．Ω のなかのベクトル列 $\Phi^{(n)}$ が Ω において収束するとは，n に無関係な数 N が存在して，$k>N$ ならば $\Phi_k^{(n)}\equiv 0$ であり，かつ Ω_j の位相に関して $\Phi_j^{(n)}\to\Phi_j$ が成り立つことである．

正則状態の空間としては，上に述べた Ω より広い空間を考えることもできる．それは，より狭い一般状態の空間に対応するものである．空間 $\mathcal{H}$ の（いま問題にしている観点から見て）極大の核型空

間を定めよう．やがてわかるように，これは基礎関数の空間 $\mathcal{S}$ を無限次元の場合にある意味で拡張したものにあたるので，この空間を $\mathcal{S}_\infty$ と記すことにしよう．

Ω に作用する演算子 K が，Ω_1 で定義されている連続演算子 k によって，

$$K\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} k^{(n)}\Psi_n(p_1, \cdots, p_n)$$

と書ける場合に，K は k を第二量子化したものであるということにしよう．ただし

$$k^{(0)} = 0, \qquad k^{(1)} = k_1, \cdot\cdot\cdot, k^{(n)} = k_1 + \cdots + k_n$$

であり，k_j とは Ψ_n の j 番目の変数に作用する演算子 k のことである．

空間 Ω_n を代数的に定義する場合には，k_j は $\mathcal{L}$ における等式

$$k_j\Phi_n = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Phi_i^{(1)} \cdots k\Phi_i^{(j)} \cdots \Phi_i^{(n)}$$

によって定義される．

問題 2.5.3

$$N\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} n\Psi_n \tag{2.5.17}$$

によって定義される粒子数の演算子 N は，Ω_1 の単位演算子を第二量子化したものであることを示せ．

空間 Ω_1 を定義するさいに，演算子 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$（あるいは同じことだが，演算子 $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}^*$）のすべての多項式が Ω_1 を不変にし[1]，Ω_1 で連続であることを要求した．これにならって，$\mathcal{S}_\infty$ も，演算子 $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}^*$ のあらゆる可能な多項式を第二量子化したものに関して不変となるような，$\mathcal{H}$ の極大核型部分空間と定義しよう．

空間 $\mathcal{S}_\infty$ は，

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_0 &= \|\Psi\| = \sqrt{(\Psi, \Psi)} \\ \|\Psi\|_r^2 &= (\Psi, H^r\Psi) \end{aligned} \qquad (r=1, 2, \cdots) \tag{2.5.18}$$

によって与えられるノルムをもつ可算ノルム空間として求められる．ここで H は (2.5.13) の演算子 h を第二量子化したものである．

$\mathcal{H}$ に正規直交基底

$$\Phi_{n\nu} = \Phi_{n\nu^{(1)}\nu^{(2)}\cdots\nu^{(n)}}, \qquad \nu^{(j)} = (\nu_1^{(j)}, \nu_2^{(j)}, \nu_3^{(j)}) \tag{2.5.19}$$

を定義すれば（ただし $\Phi_{1\nu}$ は (2.5.11) で定義され，$\Phi_{n\nu}$ は $\Phi_{1\nu}$ の規格化された対称積である），

$$H\sum_{n,\nu} c_{n\nu}\Phi_{n\nu} = \sum_{n,\nu}\left(n + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{3}\nu_i^{(j)}\right)c_{n\nu}\Phi_{n\nu} \tag{2.5.20}$$

が成り立つ．従って，ノルム (2.5.18) の有界性とは $c_{n\nu}$ が急減少の無限多重数列をなすことを意味している．

一般状態のなかで，すべての粒子が確定した運動量をもつ状態は重要な役割を果たしている[2]．これらの状態は以下でもしばしば使われるだろう．状態の記法としては，

---

[1] 空間 Ω が演算子 A のもとで不変であるとは，$A\Omega \subset \Omega$ のことである．

[2] これらの状態は空間 $\mathcal{S}_\infty^*$，従って空間 Ω^* には入っているが，規格化できないから Hilbert空間$\mathcal{H}$には属さない．

$$|p_1, \cdots, p_n\rangle = \frac{\sqrt{p_1^0 \cdots p_n^0}}{\sqrt{n!}} \sum_{\{i\}} \delta(q_1 - p_{i_1}) \cdots \delta(q_n - p_{i_n}) \qquad (2.5.21)$$

を用いる．ここで $\{i\} = (i_1, \cdots, i_n)$ は1から n までの数字の置換で，和は $n!$ 個の置換の全体にわたる．なお，$p_j^0 = \sqrt{m^2 + p_j^2}$ である．(2.5.21) 型の二つのベクトルの〈スカラー積〉は，

$$\langle p'_1, \cdots, p'_r \,|\, p_1, \cdots, p_n\rangle = \delta_{rn} p_1^0 \cdots p_n^0 \sum_{\{i\}} \delta(p_1 - p'_{i_1}) \cdots (p_n \delta - p'_{i_n}) \qquad (2.5.22)$$

に等しい．

問題 2.5.4 一般関数

$$p_1^0 \cdots p_n^0 \sum_{\{i\}} \delta(p_1 - p'_{i_n}) \cdots \delta(p_n - p'_{i_n})$$

はすべての変数 p_i, p'_j に対して同時に順時 Lorentz 変換を行なっても不変であることを示せ（ヒント：等式 (1.2.10) および $p_i^2 = p_j'^2 = m^2$, $p_i^0 > 0$, $p_j'^0 > 0$ であることを利用せよ）．

5.2. 空間 $\mathscr{H}$ における Poincaré 群の表現．空間 $\mathscr{H}_2$ の既約不変空間の直和への分解

固有 Poincaré 群に属する変換 $\{a, \Lambda\}$ に対して，状態ベクトル Ψ の変換法則を

$$U(a, \Lambda)\Psi = \{\Psi_0, e^{-ip_1 a}\Psi_1(\Lambda^{-1}p_1), \cdots$$
$$\cdots, e^{-i(p_1 + \cdots + p_n)a}\Psi_n(\Lambda^{-1}p_1, \cdots, \Lambda^{-1}p_n), \cdots\} \qquad (2.5.23)$$

という式で定義しよう．

表現 (2.5.23) は明らかに可約である．というのは，たとえば不変演算子 P^2 が $\mathscr{H}$ において定数（単位演算子の定数倍）とはならないからである．次に $\mathscr{H}$ をこれ以上分解できない部分空間の和に分解し，それに応じて，表現 (2.5.23) を既約表現に分解する方法をざっと述べよう．

はじめに真空だけからなる部分空間 $\mathscr{H}_0$ と一粒子状態の部分空間 $\mathscr{H}_1$ とは，Poincaré 群の表現に関して，既約不変部分空間であることに注意する．$\mathscr{H}_0$ ではトリヴィアルな表現 $U(a, \Lambda) \equiv 1$ が，そして $\mathscr{H}_1$ では，質量 m，スピン 0，正エネルギーの既約表現が具体化される．すなわち

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{m0+}. \qquad (2.5.24)$$

二粒子状態の部分空間 $\mathscr{H}_2$ はもはや既約ではない．この空間では不変量 P^2, W（すなわち j）の値が一定とはならないからである．$\mathscr{H}_2$ の任意のベクトルは一定の質量 $\sqrt{P^2}$ と一定の角運動量 j をもった一般状態に分解することができる．

このような分解を求めるために，新しい変数

$$p = p_1 + p_2, \qquad q = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p^2 - 4m^2}} \tag{2.5.25}$$

を導入して，

$$\Psi_2(p_1, p_2) = \Psi(p, q) \tag{2.5.26}$$

と置こう．

問題　2.5.5　条件 $p_1^2 = p_2^2$ は

$$pq = 0 \tag{2.5.27}$$

という条件と同値であることを示せ．

問題　2.5.6　p_1 と p_2 の交換に関して関数 $\Psi(p_1, p_2)$ が対称ということは，$\Psi(p, q)$ が q の偶関数であることと同値であることを確かめよ．

p^2 をかけるという演算子の固有関数 $\delta(p^2 - \mu^2)$ と空間的な単位ベクトル q に関する球関数とにより，関数 $\Psi(p, q)$ を分解しよう．この目的のために，まず重心系，すなわち時間軸がベクトル p の方向と一致する座標系を考え，この系におけるベクトル q の座標成分を $(\sigma, \boldsymbol{e})$ と書けば，一般の系における成分は，

$$\begin{aligned} q^0 &= \frac{p^0}{\mu}\sigma + \frac{(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e})}{\mu}, \\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{e}\boldsymbol{p})\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2} + \frac{1}{\mu}\left((\boldsymbol{p}\boldsymbol{e})\frac{p^0\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2} + \sigma\boldsymbol{p}\right), \\ \mu^2 &= p^2 = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

となる．

問題　2.5.7　a)　公式 (2.5.28) がベクトル q からベクトル $(\sigma, \boldsymbol{e})$ への Lorentz 変換を与えること，従って，

$$q^2 = (q^0)^2 - \boldsymbol{q}^2 = \sigma^2 - \boldsymbol{e}^2$$

の成り立つことを確かめよ．

b)　この変換のさいに，ベクトル p はベクトル $(\mu, 0)$ に移ることを示せ．このことから，(2.5.25) を用いて，次の関係を導け．

$$\sigma = 0, \qquad \boldsymbol{e}^2 = 1. \tag{2.5.29}$$

次に，関数

$$F(\mu; \boldsymbol{p}; \boldsymbol{e}) = \Psi(p, q) = \Psi\left(p; \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}}{\mu},\ \boldsymbol{e} + \left(\frac{p^0}{\mu} - 1\right)\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}\boldsymbol{p}\right) \tag{2.5.30}$$

を球関数 $Y_{j\zeta}(\boldsymbol{e})$ によって，

$$F(\mu, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{e}) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\zeta=-j}^{j} F_{j\zeta}(\mu, \boldsymbol{p})\, Y_{j\zeta}(\boldsymbol{e}) \tag{2.5.31}$$

と展開する．ベクトル e を

$$e = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

のようにパラメータ θ, φ で表わせば，$Y_{j\zeta}(e)$ を通常の形

$$Y_{j\zeta}(e) \equiv Y_{j\zeta}(\theta, \varphi) = P_j^{\zeta}(\cos\theta)e^{i\zeta\varphi} \qquad (-j \leqslant \zeta \leqslant j)$$

に書くことができる．$P_j^{\zeta}(x)$ は Legendre の陪関数である．これらの関数 $Y_{j\zeta}$ は単位球面上で互いに直交するが，しかし1に規格化されてはいない——

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \overline{Y}_{j'\zeta'}(\theta, \varphi)\, Y_{j\zeta}(\theta, \varphi) = \frac{(j+|\zeta|)!}{(j-|\zeta|)!}\frac{4\pi}{2j+1}\delta_{jj'}\delta_{\zeta\zeta'}. \quad (2.5.32)$$

問題 2.5.8 $\Psi(p, q)$ が q については偶関数であることを使って，j が奇数 ($j = 2l+1$) のときは，$F_{j\zeta}(\mu, \boldsymbol{p}) = 0$ であることを示せ．

このようにして，求める分解は，

$$\Psi_2(p_1, p_2) = \Psi(p, q) = \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_{\mu, 2l}(\boldsymbol{p}, e) \quad (2.5.33)$$

という形になる．ただし，

$$\Psi_{\mu, 2l}(\boldsymbol{p}, e) = \delta(p^2-\mu^2)g_{2l}(\mu, \boldsymbol{p}; e),$$

$$g_{2l}(\mu, \boldsymbol{p}; e) = \sum_{\zeta=-2l}^{2l} G_{2l, \zeta}(\mu, \boldsymbol{p})Y_{2l, \zeta}(e) \quad (2.5.34)$$

である．逆に公式

$$F_{j\zeta}(\mu, \boldsymbol{p}) = \frac{(j-|\zeta|)!}{(j+|\zeta|)!}\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, F(\mu, \boldsymbol{p}; e)\, \overline{Y}_{j\zeta}(e) \quad (2.5.35)$$

によって，$F_{j\zeta}$ を $\Psi(p, q)$ で表わすこともできる．

関数 $\Psi_{\mu, 2l}$ は一般関数のつくる既約部分空間 $\mathcal{S}^*_{\mu j+}$ に属する．これらの一般関数は四次元空間と単位球面との積空間の上で，汎関数として与えられる．しかし $\Psi_{\mu, 2l}$ は規格化できないから，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mu j+}$ には属さない．$\mathcal{H}_2$ に属する二つの関数のスカラー積は，(2.5.34) の関数を使って次のように表わされる：

$$\begin{aligned}(\Phi_2, \Psi_2) &= \iint \overline{\Phi_2(p_1, p_2)}\, \Psi_2(p_1, p_2) \frac{d^3p_1}{p_1^0}\frac{d^3p_2}{p_2^0} \\ &= 4\iint \overline{\Phi_2(p_1, p_2)}\, \Psi_2(p_1, p_2)\delta(p_1^2-m^2)\delta(p_2^2-m^2)\theta(p_1^0)\,\theta(p_2^0)\, d^4p_1 d^4p_2 \\ &= \iint \overline{\Phi(p, q)}\, \Psi(p, q)\delta(q^2+1)\,\delta(pq)\theta(p^0-2m)\sqrt{p^2-4m^2}\, d^4p d^4q \\ &= \int_{2m}^{\infty} d\mu \sqrt{\mu^2-4m^2} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\sqrt{\mu^2+\boldsymbol{p}^2}} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \overline{g_{2l}(\mu, \boldsymbol{p}; e)}\, f_{2l}(\mu, \boldsymbol{p}; e)\end{aligned}$$

$$= 2\pi\int_{2m}^{\infty} d\mu\sqrt{\mu^2-4m^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4l+1}\sum_{\zeta=-2l}^{2l}\frac{(2l+|\zeta|)!}{(2l-|\zeta|)!}$$
$$\times\int\frac{d^3p}{\sqrt{\mu^2+p^2}}\overline{G_{2l,\zeta}(\mu,p)}F_{2l,\zeta}(\mu,p). \qquad (2.5.36)$$

これまでに得られた結果は次のように定式化することもできる：Hilbert 空間 $\mathscr{H}_2$ は，ベクトル値関数 $F_{2l}(\mu,p)=\{F_{2l,\zeta}(\mu,p),\ -2l\leqslant\zeta\leqslant 2l\}$ からなる Hilbert 空間 $\mathscr{H}_{\mu,2l}$ の μ^2 に関する直積分を l に関し直和した形に分解される．すなわち，

$$\mathscr{H}_2=\bigoplus_{l=0}^{\infty}\int^{\oplus}d\mu\,\mathscr{H}_{\mu,2l}. \qquad (2.5.37)$$

空間 $\mathscr{H}_{\mu,2l}$ におけるスカラー積は，

$$(F_{2l}(\mu,p),G_{2l}(\mu,p))^{\mu}_{2l}=\sum_{\zeta=-2l}^{2l}\frac{(2l+|\zeta|)!}{(2l-|\zeta|)!}$$
$$\times\int\frac{d^3p}{\sqrt{\mu^2+p^2}}\overline{F_{2l,\zeta}(\mu,p)}\,G_{2l,\zeta}(\mu,p) \qquad (2.5.38)$$

という式で与えられる．$\mathscr{H}_2$ におけるスカラー積は $\mathscr{H}_{\mu,2l}$ におけるこのスカラー積によって，

$$(\Phi_2,\Psi_2)=2\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4l+1}\int_{2m}^{\infty}d\mu\sqrt{\mu^2-4m^2}\,(F_{2l}(\mu,p),G_{2l}(\mu,p))^{\mu}_{2l} \qquad (2.5.39)$$

と表わされる．ここで関数 $F_{2l,\zeta}$ と $G_{2l,\zeta}$ は (2.5.33) ～ (2.5.35) 式を通じて，それぞれ Φ_2 と Ψ_2 に結びついているものとする．

二つの区別できないスカラー粒子の空間 $\mathscr{H}_2$ を既約不変部分空間に分解する問題は，$\tilde{\mathfrak{P}}$ という群の二つの既約表現の直積を既約表現の直和に分解する問題の特別な場合にあたる．空間 $\mathscr{H}_{\mu,2l}$ における Poincaré 群の表現はすでに既約である．この表現は 3.3 節で詳しく研究した．二つの任意の既約表現 $[m_1,j_1]$ と $[m_2,j_2]$ との直積を既約表現の直和に分解する公式は，これまでに述べた特別な場合とまったく同様にして導かれるから，ここにあげるのはやめておこう．関心をもつ読者のために次の論文を引用しておく――Yu. M. Shirokov (1958)，Wightman (1959)，Wightman (1960 b)．

同じようなやり方で，$n\geqslant 3$ の場合の空間 $\mathscr{H}_n$ も既約不変空間に分解される．このとき不変量 P^2 は $p^2\geqslant(nm)^2$ という値をとる．$n=2$ の場合と $n\geqslant 3$ の場合のおもなちがいは，$\mathscr{H}_n$ $(n\geqslant 3)$ の直積分と直和への分解においては，既約空間 $\mathscr{H}_{\mu j}$ の各々が無限多重度で現われることであり，(2.5.35) の $F_{j\zeta}$ にあたる関数が，さらにひとつあるいはそれ以上のほかのベクトル変数に依存することである．また $n\geqslant 3$ の場合に，これらの

関数の選び方には任意性がある．この任意性は，三つ以上の角運動量の合成が合成の順序に依存することに関係している．本書ではこれらの問題の検討にまでは立ち入らないが，利用できる文献を重ねて引用しておこう（Wightman (1960 b)，M. I. Shirokov (1961)，Wick (1962)）．

5.3. 荷電スピノル粒子の空間

5.1 節で説明したスカラー粒子の理論にならえば，束縛状態をもたないスピン 1/2 の粒子の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ も，Hilbert 空間の直和

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(1/2) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1(1/2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n(1/2) \oplus \cdots \qquad (2.5.40)$$

の形に構成される．ここで $\mathcal{H}_0$ は真空だけからなる一次元部分空間，$\mathcal{H}_n$ は n 粒子状態の部分空間である．スカラー場の場合には，$n>1$ の $\mathcal{H}_n$ が $\mathcal{H}_1$ の n 次の対称ベキとして定義された．今度は，$\mathcal{H}_1(1/2)$ の n 次の《反対称ベキ》として $\mathcal{H}_n$ を定義しよう．なお一粒子状態の空間 $\mathcal{H}_1(1/2)$ は 4.6 節で扱った空間 $\mathcal{H}_{m1/2}$ と同じものと考える．この空間のベクトルの二乗（スカラー積）は (2.4.56) 式によって与えられている．ここで，$\mathcal{H}_{m1/2}$ という空間の物理的解釈について簡単に触れておこう．

空間 $\mathcal{H}_{m1/2}$ が一般 Poincaré 群に関して不変な，互いに直交する二つの部分空間 $\mathcal{H}^{\pm}_{m1/2}$ に分解されること，すなわち

$$\begin{aligned} \hat{p}\Psi(p) &= m\Psi(p) \ \text{ならば}\ \Psi(p) \in \mathcal{H}^{+}_{m1/2}, \\ \hat{p}\Psi(p) &= -m\Psi(p) \ \text{ならば}\ \Psi(p) \in \mathcal{H}^{-}_{m1/2} \end{aligned} \qquad (2.5.41)$$

となることを前に（4.6 節で）知った．空間 $\mathcal{H}^{+}_{m1/2}$ に属するベクトルは，定義によって，正電荷粒子の状態を記述し，$\mathcal{H}^{-}_{m1/2}$ のベクトルは負電荷粒子に関係するとみなすことにしよう（ここの議論にとって，この電荷がどういう性質をもつものであるかは，まったくどうでもよい．電子が一個の状態と陽電子が一個の状態を考えて，普通の意味の電荷といってもよいし，中性子と反中性子の場合として，バリオン数のことだといってもよい）．電荷に関する超選択則（1.3 節）により，物理的に実現される状態で，$\mathcal{H}^{+}_{m1/2}$ と $\mathcal{H}^{-}_{m1/2}$ のいずれに対してもゼロでない射影をもつようなものは存在しない．また 4.3 節の終りのところで注意したように，反ユニタリ演算子 (2.4.25) は $\mathcal{H}^{+}_{m1/2}$ を $\mathcal{H}^{-}_{m1/2}$ に（およびその逆に）一意的に写像する．これがこの演算子を〈荷電共役〉とよぶ理由である．

5.1 節に述べた一般的方法に従って，空間 $\mathcal{H}_{m1/2}$ を Gelfand の三つ組にすることができる．今度は，双曲面 $V^{\pm}_{m}$ を定義域とする四成分の基礎関数を考え，その空間 $S_4(V^{\pm}_{m})$ が $\mathcal{H}_{m1/2}$ でいたるところ稠密な核型部分空間の役割を果たすことになる．ついで全空間

$\mathscr{H}(1/2)$ も5.1節のやり方で三つ組にすることができる．あるところから先はゼロとなるようなベクトル列からつくられた核型空間は，$\mathscr{H}(1/2)$ でいたるところ稠密であり，これを $\Omega(1/2)$ と記すことにしよう．

すでに述べたように，空間 $\mathscr{H}_n$ は空間 $\mathscr{H}_1$ の反対称テンソル積として，

$$\mathscr{H}_n = A\mathscr{H}_{m1/2}^{\otimes n} \tag{2.5.42}$$

のように定義される．言いかえると，$\mathscr{H}_n$ の元は n 組の変数 (p_j, α_j), $p_j \in V_m^+$, $\alpha_j = 1, 2, 3, 4$ の関数で，任意の二組の変数の交換で反対称となるものである．すなわち

$$\begin{aligned}\Psi_n \in \mathscr{H}_n \Rightarrow \Psi_n(p_1\alpha_1, \cdots, p_i\alpha_i, \cdots, p_j\alpha_j, \cdots, p_n\alpha_n)\\ = -\Psi_n(p_1\alpha_1, \cdots, p_j\alpha_j, \cdots, p_i\alpha_i, \cdots, p_n\alpha_n)\end{aligned} \tag{2.5.43}$$

が成り立つ．$\mathscr{H}_n$ の基底としては，$\mathscr{H}_1$ の関数の反対称積，たとえば，

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\begin{vmatrix}\Psi_1^{\alpha_1}(p_1) \cdots \Psi_1^{\alpha_n}(p_n)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Psi_n^{\alpha_1}(p_1) \cdots \Psi_n^{\alpha_n}(p_n)\end{vmatrix} \tag{2.5.44}$$

という形の関数からなる基底を選ぶことができる．電荷に関する超選択則から，空間 $\mathscr{H}_n$ は $n+1$ 個のコヒーレントな直交部分空間の直和

$$\mathscr{H}_n = \mathscr{H}_n^{(-n)} \oplus \mathscr{H}_n^{(-n+2)} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}_n^{(n-2)} \oplus \mathscr{H}_n^{(n)} \tag{2.5.45}$$

に分解される．ここで $\mathscr{H}_n^{(k)}$ は n 粒子状態のうち全電荷が k となるもののつくる部分空間である（$(n-k)/2$ は整数でなければならない）．

$\mathscr{H}_{m1/2}$ の基底 $\Psi^{(e)}(p, \zeta)$ $(e = \pm 1)$ を用いて，$\mathscr{H}_n$ の元を

$$\Psi_n(p_1, \zeta_1, e_1; \cdots; p_n, \zeta_n, e_n), \qquad e_j = \pm e \tag{2.5.46}$$

の形に書くことができる．ここで e は粒子の電荷（$-e$ が反粒子の電荷）であり，Ψ_n は任意の二組の変数 p_i, ζ_i, e_i と p_j, ζ_j, e_j の置換によって符号を変える．この場合，$\mathscr{H}_n$ の分解(2.5.45) には関数 Ψ_n の分解

$$\Psi_n(p_j, \zeta_j, e_j) = \Psi_n(p_j, \zeta_j, e_j)\delta_{\sum e_j, ne} + \Psi_n(p_j, \zeta_j, e_j)\delta_{\sum e_j, (n-2)e} + \cdots \tag{2.5.47}$$

が対応する．ここで δ_{kl} は Kronecker の記号である．

関数 (2.5.46) を用いて $\mathscr{H}(1/2)$ のスカラー積を書くために，$\mathscr{H}_{m1/2}$ にスピノル基底 $v_\zeta^{(e)}(p)$ を導入しよう．この基底は，Dirac 方程式の解の基底 $u^{r(e)}(p)$ (4.5節) とは

$$v_\zeta^{(e)}(p) = u^{3/2-e\zeta(e)}(ep) = 2\zeta C\widetilde{u}^{3/2+e\zeta(-e)}(p) \tag{2.5.48}$$

という関係にある（第二の等号については問題2.4.11bを参照）．このスピノル $v_\zeta^{(e)}(p)$ は演算子 $\hat{p}$ $(p^0 = \sqrt{m^2+p^2})$ と S^3 との固有関数である：

$$\hat{p}v_\zeta^{(e)}(p) = emv_\zeta^{(e)}(p), \qquad S^3 v_\zeta^{(e)}(p) = \zeta v_\zeta^{(e)}(p). \tag{2.5.49}$$

演算子 $\hat{p}$ と S^3 は不定計量のスカラー積 $\langle u, v\rangle = \tilde{u}_\alpha v_\alpha$ に関してエルミートであるから，その固有関数である $v_\zeta^{(e)}(p)$ は e あるいは ζ の値が異なれば互いに直交する．さらに $u^{r(\pm)}(p)$ の規格化条件 (2.4.50) をあわせて考えると，

$$\tilde{v}_\zeta^{(e)}(p)v_{\zeta'}^{(e')}(p) = e\delta_{ee'}\delta_{\zeta\zeta'} \tag{2.5.50}$$

と書くことができる．

次に $\Psi(p)$ と $\Psi(p,\zeta,e)$ の関係を

$$\Psi^\alpha(p) = \sum_{\zeta,e} v_\zeta^{(e)\alpha}(p)\Psi(p,\zeta,e) \tag{2.5.51}$$

によって定義しよう．これは (2.4.65) の拡張になっている．(2.5.50) によって，反転公式は，

$$\Psi(p,\zeta,e) = e\tilde{v}_\zeta^{(e)}(p)\Psi(p) \equiv e\sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{v}_{\zeta\alpha}^{(e)}(p)\Psi^\alpha(p) \tag{2.5.52}$$

となる．

(2.5.51) と (2.4.56) から $\mathcal{H}(1/2)$ におけるスカラー積は，(2.5.46) の関数を用いて次のように定義することができる：

$$(\Psi, \Phi) = \overline{\Psi}_0\Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\zeta_j, e_j}\int_{V_m^+}\cdots\int_{V_m^+}\overline{\Psi_n(p_1,\zeta_1,e_1;\cdots;p_n,\zeta_n,e_n)}$$
$$\times\Phi_n(p_1,\zeta_1,e_1;\cdots;p_n,\zeta_n,e_n)\frac{d^3p_1}{p_1^0}\cdots\frac{d^3p_n}{p_n^0}. \tag{2.5.53}$$

付録 A. Lie 群とその表現論——主な定義と結果の要約

A.1. 群の代数的性質と位相的性質および Lie 群の定義

歴史的にいえば，最初に登場したのは有限群の理論（つまり元の数が有限な，置換群型の群の理論——Galois, Frobenius, Schur）である．この理論は純粋に代数的であって，収束とか連続とかの概念は関与しない．このため抽象群の一般的定義もまた群の代数的性質のみを映しだしている——〈元 g からなる集合 G が群とよばれるのは，G の元からなる任意の順序づけられた組 g_1, g_2 に対して，G のある元 $g_3 = f(g_1, g_2)$ を対応させる演算で結合則をみたすようなものが定義されており，この演算に関する単位元と逆元が G に存在する場合である〉．

群の演算は普通はかけ算のように記される——$f(g_1, g_2) \equiv g_1 \cdot g_2$——が，一般には可換でない．《可換群》(《Abel 群》ともいう)，つまり f が対称関数である群に対しては，群

の法則がたし算の形に書かれることもある——$f(g_1, g_2) \equiv g_1+g_2$．この場合には群の単位元をゼロとよぶ．

群 G の部分集合 G_0 が，同じ演算 f に関して（数学者のいい方に従えば，f の $G_0\times G_0$ への制限に関して）群をなすならば，G の《部分群》という．どのような群にも《トリヴィアルな》(〈本来の部分群〉でない）部分群が二つある．——群 G それ自身と，単位元のみからなる部分群とである．G の部分群 N が，$n\in N$, $g\in G$ ならば $gng^{-1}\in N$ という性質をもつとき（あるいは簡単に書けば $gNg^{-1}\subset N$ のとき），《不変部分群》あるいは《正規部分群》であるという．トリヴィアルでない不変部分群をもたぬような群は《単純群》とよばれる．トリヴィアルでない不変 Abel 部分群をもたぬ群は《半単純》とよばれる．

例をいくつかあげておこう：

1）《直交群と Euclid 群》．n 次元空間の直交変換のつくる群を $O(n)$ と記す．n 次の正方実行列 V は

$$VV^T=\mathbf{1}\quad \text{すなわち}\quad V_{ik}V_{jk}=\delta_{ij} \tag{2.A.1}$$

をみたすならば $O(n)$ に属する（この式で k については1から n までの和をとるものと約束する．$i,j=1,\cdots,n$ であり，$\mathbf{1}$ は n 次の単位行列である）．$O(n)$ の行列の行列式は，いずれも $+1$ か -1 に等しい．なぜなら（2.A.1）の両辺の行列式をとれば，

$$(\det V)^2=1 \tag{2.A.2}$$

となるから．行列式が $+1$ となる直交行列は $O(n)$ の不変部分群をなし，これを $SO(n)$ と書く．n 次元空間における《Euclid 運動群》$E_n=O(n)\cdot T_n$ は $\boldsymbol{a}$ を n 次元ベクトル，$V\in O(n)$ とするとき，$(\boldsymbol{a}, V)$ という組の集合として定義される．群の法則は

$$(\boldsymbol{a}_1, V_1)(\boldsymbol{a}_2, V_2)=(\boldsymbol{a}_1+V_1\boldsymbol{a}_2, V_1V_2)$$

という等式で表わされる．三次元空間の回転群 $SO(3)$ は単純群である．四次元空間の回転群は $SO(4)\sim SO(3)\times SO(3)$ であり，半単純である（しかし単純ではない）．五次元以上の固有（つまり反転を含まぬ）直交群はすべて単純である．Euclid 運動群は並進のなす部分群 T_n が不変 Abel 部分群だから半単純ではない．

群 G のすべての元と可換な元の集合 C を，G の《中心》という．容易にわかるように，どのような群においても中心 C は不変 Abel 部分群である．それだけでなく，中心は群 G の任意の自己同形写像（つまり群の法則を保存しながら，G を G 自身の上へ一対一にうつす写像）に関しても不変である．このような性質をもつ部分群を《特性部分群》という．

2) 《特殊ユニタリ群》. 群 $SU(n)$ は行列式が 1 となるような n 次の複素ユニタリ行列の群として定義される.

問題 2.A.1 $SU(n)$ の中心は z^k ($k=0, \cdots, n-1$) を元とする巡回群 Z_n であることを示せ. ただし,

$$z = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\right)\mathbf{1}.$$

N を群 G の正規部分群とする. G の同値類の集合として《因子群》$H = G/N$ を定義しよう. $g_1 = g_2 n$ ($n \in N$) となるような元 n があるとき, 二つの元 g_1, g_2 は同じ同値類 h に属するという. つまり $g_1 \in h$, $g_2 \in h$ であり, この場合に $g_1 \sim g_2$ と書くことにしよう. 容易にわかるように, g_1 と g_2 は, $g_1 = n' g_2$, $n' \in N$ が成り立つとき, かつそのときに限って同値である. 実際, $g_1 = g_2 n$ ならば, N は不変部分群であるから, $g_1 = (g_2 n g_2^{-1}) g_2 \equiv n' g_2$ である.

問題 2.A.2 同値類の積 $h_1 h_2$ を, $g_1 g_2$ ($g_1 \in h_1$, $g_2 \in h_2$) という積のひとつを含む同値類と定義すれば, それらの同値類の集合 H は群をなすことを示せ. 同値類 $h_1 h_2$ は h_1, h_2 からの代表元 g_1, g_2 の選び方とは無関係に定まることを確かめよ.

問題 2.A.3

$$SO(3) = SU(2)/Z_2 \tag{2.A.3}$$

となることを示せ.

われわれが主として問題とする Poincaré 群は無限群の一例であり, その元の集合は連続体をなしている. このような群に対しては, 群の代数的構造を集合 G の幾何学的 (より正確には位相的) 性質と結びつけて考察するのが自然である. これらの幾何学的性質には局所的なもの (G の二つの元の近さ) と大域的なもの (群の連結性) とがある.

位相群の概念を導入するには, そのまえに位相空間の定義を思い出しておかねばならない. これは収束の定義された抽象的集合である.

集合 M に次のような性質をもつ部分集合, すなわち《開集合》あるいは近傍とよばれる部分集合の族 Σ が与えられたときに, M を《位相空間》という: 1) 任意の二つの近傍の共通部分はまたひとつの近傍である. 2) 近傍からなる任意の集合族の和集合もまたひとつの近傍である. 3) 全空間もひとつの近傍である ($M \in \Sigma$). 本書でこれから位相の概念を用いる場合を念頭において, 位相空間にどうしても必要なこれら三条件のほかに《分離の公理》を条件のなかに加えておこう: 4) M の任意の二点は互いに共通部分のないような近傍をもつ (公理 4 をみたす位相空間を《Hausdorff》空間という).

集合 M の任意の点に与えられている近傍というこの概念を使えば，M の元の収束や M の上で与えられている関数の連続性は，普通のやり方で定義できる．

群 G が《位相群》であるとは，集合としての G が位相空間をなし，二変数の関数

$$F(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$$

が，$G \times G$ の上で連続なことである（この定義の特別な場合として G における積の連続性と $g \to g^{-1}$ という演算の連続性が導かれる）．

位相群 G が《コンパクト》であるとは（古い文献では《ビコンパクト》といった），Σ に属する近傍を用いた集合 G の任意の被覆から有限個の近傍だけによる被覆が取り出せることをいう．これが不可能な場合に，群は《ノン・コンパクト》であるという．

文献のなかには，《局所コンパクト群》という言葉がよく使われている．群 G の任意の元 g に対して，閉包がコンパクトとなる g の近傍が存在するとき，G は局所コンパクトとよばれるのである．これから扱うのは Lie 群であるが，Lie 群はすべて局所コンパクトである．

集合としての G の大域的な位相的性質に応じて，群 G は《連結である》（特に G 内の任意の閉曲線が，一点に連続的に変形できるならば《単連結》である）ことも《連結でない》こともありうる（たとえば [25] を参照）．

例として連結でない群 $O(3)$ を考えよう．これは部分群 $SO(3)$ と，行列式が -1 の直交行列の集合という二つの連結集合から成っている．$SO(3)$ は二重連結であり，その普遍被覆群 $SU(2)$ が単連結である．$SU(2)$ という群は，位相空間としては四次元空間の単位球面 S_4 と位相同形になる．実際，任意の行列 $V \in SU(2)$ は

$$V = v^0 \sigma_0 + \mathrm{i}\, v^j \sigma_j$$

と書くことができる．ここで，(v^0, v^j) は実数で単位球面上の点である．すなわち，

$$\bar{v}^\mu = v^\mu, \qquad (v^0)^2 + \sum_{j=1}^{3} (v^j)^2 = 1.$$

群 $SO(3)$ は位相空間として見れば，この同じ球面 S_4 で直径の両端を同一視したものと定義することができる．

これから扱うのは，集合 G が《多様体》でもあるような，位相群のなかでも特別な性質をもった群である．G が多様体であるとは，位相空間 G が n 次元 Euclid 空間と局所同相となることを意味する．言葉をかえれば，n 次元 Euclid 空間の球の内点に一対一かつ連続に写像されるような十分小さい近傍が，どのような元 $g \in G$ に対しても存在する

ことである．球内の点の座標を，群の《局所座標》とよぶことにしよう．位相群が同時に多様体となっているとき，これを《Lie 群》という（多様体の定義にでてくる Euclid 空間は有限次元でなければならないから，パラメータが無限にある群は Lie 群ではない）．

このようにして，Lie 群のある元 g_0 の近傍をひとつ固定しておくと，この近傍内の任意の元は n 個の順序づけられた実数パラメータの組 $\varphi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ と同一視することができ，群としての積 $\varphi\theta=\tau$ は，

$$\tau=\Phi(\varphi^1,\cdots,\varphi^n;\theta^1,\cdots,\theta^n) \tag{2.A.4}$$

という形に書かれる．そして，逆元の存在から，φ を固定したときに，(2.A.4) で与えられる $\theta\to\tau$ という写像が逆に解けねばならないことになる．また積が結合則をみたすことから，

$$\Phi(\Phi(\varphi;\theta);\tau)=\Phi(\varphi;\Phi(\theta;\tau)) \tag{2.A.5}$$

が導かれる．定義によって G は位相群であるから，関数 Φ は連続でなければならない．

ところが Hilbert の第5問題を解決した von Neumann=Pontrjagin=Montgomery の定理によれば，連続な局所座標の存在から微分可能な座標の，さらに解析的な座標の存在が導かれる（すなわち (2.A.4) の関数がパラメータに関して微分可能あるいは解析的となるようなパラメータの組の存在がいえる．[25] の第7章およびそこに引用されている文献を参照）．まさにこの性質のために，上にあげた Lie 群の定義が正当化されるのである（Lie の諸論文では，関数 Φ の微分可能性がはじめから仮定されている）．なお任意の二つの微分可能（解析的）な局所座標系は，互いに，微分可能（解析的）な変換によって結びつけられていることを注意しておこう．

A.2.　群の線形表現

位相空間 $\mathcal{X}$ をそれ自身の上に写す連続写像で，一対一かつ逆もまた連続なもの全体の集合 A_x は，二つの写像の合成をそれらの積と考えることにすれば，群をなしている．群 G の各元に演算子 $T_g\in\mathrm{A}_x$ を対応させ，そのさいに群の法則が保存されるならば，すなわち，

$$T_{g_1g_2}=T_{g_1}T_{g_2},\qquad T_e=1 \tag{2.A.6}$$

となるならば，群 G の一つの表現が与えられたという．$\mathcal{X}$ が線形空間，T_g が線形演算子の場合に，この表現を《線形表現》という．

$\mathcal{X}$ が n 次元空間のとき，T_g を群 G の n 次元表現ということにしよう．$\mathcal{X}$ の基底をひとつ定めておけば，有限次元の線形表現は n 次の正則行列の集合 T_g で与えられる．た

だし，この集合は行列の普通の積の意味で群をなすものとする．$\mathcal{X}$ が Hilbert 空間であって（その元を Φ, Ψ と書く），T_g がその上の線形演算子でスカラー積を保存する場合，すなわち

$$(T_g\Psi, T_g\Phi) = (\Psi, \Phi) \tag{2.A.7}$$

の場合には，T_g を《ユニタリ表現》という．

歴史的にいえば，連続群は何らかの空間の変換群として登場した．ここから抽象群の概念を抽出し，その抽象群の表現を考えることによって，同一の代数的構造に準同形な（あるいは同形な）さまざまな具体化を統一的に扱うことができるようになった．

たとえば行列式が $+1$ の二次ユニタリ行列のつくる群 $SU(2)$ を考えてみよう．これは二次元の複素空間において，正値エルミート形式を保存する変換群の役割を果たす．固有直交群 $SO(3)$ は三次元の実空間において Euclid 的な距離を保存する斉次変換群として定義される．これらの定義は，一見したところでは本質的に異なるのだが，それにもかかわらず，実際にはあとのほうの変換群も抽象群 $SU(2)$ の（一価）表現と考えることができるのである（この章の2.2節を見よ）．

G が位相群の場合には，表現 T_g も《連続》であると仮定する．表現の連続性は弱収束を用いて定義される．表現の演算子 T_g の作用する線形位相空間を $\mathcal{X}$ とし，さらに $\mathcal{X}^*$ を $\mathcal{X}$ 上の連続線形汎関数のつくる空間，すなわち $\mathcal{X}$ の共役空間としよう．表現 T_g が弱連続であるとは，ベクトル $\Psi \in \mathcal{X}$，汎関数 $F \in \mathcal{X}^*$ をどのようにとっても，数値関数 $(F, T_g\Psi)$ が g に関して連続となることである．特にユニタリ表現 U_g の場合には，U_g が作用するのは Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ であるから，任意のベクトル $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$ に対しスカラー積 $(\Phi, U_g\Psi)$ が g に関して連続であれば，U_g は連続な表現である．

二つの空間 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}'$ にそれぞれ作用する二つの表現 T と T' が《同値》であるとは，$\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}'$ への演算子 V とその逆演算子が存在し，任意の $g \in G$ に対して

$$VT_g = T'_g V \quad \text{あるいは} \quad T'_g = VT_gV^{-1} \tag{2.A.8}$$

が成り立つことである．はじめの式は $\mathcal{X}$ のベクトルを $\mathcal{X}'$ のベクトルに変換する二つの演算子のあいだの関係であるが，あとの式は相似変換によって，$\mathcal{X}'$ の二つの自己同形写像のあいだの等式を導いていることに注意しておこう．

与えられた群 G の同値でない表現を分類するときに，基本的な役割を演ずるのが既約表現の概念である．これに関連する諸定義に話をすすめよう．

これからは線形位相空間 $\mathcal{X}$ の閉部分空間のみを扱うことにする．$\mathcal{X}$ が有限次元なら

ば任意の線形部分空間は閉じているが，無限次元の場合には，すでに第1章で見たように，$\mathscr{X}$ のなかでいたるところ稠密で，しかも $\mathscr{X}$ とは一致しない線形多様体が存在する．これは明らかに閉じていない．

空間 $\mathscr{X}$ に作用する表現を T_g とするとき，$\mathscr{X}$ の部分空間 $\mathscr{X}_0$ がすべての $g \in G$ に対して $T_g\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_0$ をみたすならば，$\mathscr{X}_0$ は T_g に関して《不変である》という．$\mathscr{X}$ の部分空間のうちで，ゼロ・ベクトルだけからなる空間と，$\mathscr{X}$ 自身と一致する空間とは，常に不変であることが明らかである．これらを《トリヴィアルな不変部分空間》という．

部分空間 $\mathscr{X}_1$ が，トリヴィアルでない不変部分空間 $\mathscr{X}_0$ の《不変な補空間》であるといわれるのは $\mathscr{X}_1$ が不変であり，かつ

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_0 \oplus \mathscr{X}_1$$

と表わされる場合である．ついでに復習しておこう．線形空間 $\mathscr{X}$ が部分空間 $\mathscr{X}_0$ と $\mathscr{X}_1$ との直和であるとは，任意の元 $x \in \mathscr{X}$ が順序づけられた二つのベクトルの組によって $x=(x_0, x_1)$ $(x_0 \in \mathscr{X}_0,\ x_1 \in \mathscr{X}_1)$ と表わされ，かつ $\lambda x+\mu y = (\lambda x_0+\mu y_0, \lambda x_1+\mu y_1)$ が成り立つことである．

空間 $\mathscr{X}$ で作用する表現 T_g は，$\mathscr{X}$ がトリヴィアルでない不変部分空間を含まぬならば，《既約》であるという*)．既約でないときに表現 T_g は《可約》であるという．表現が可約である上さらに，すべてのトリヴィアルでない不変部分空間が必ず不変補空間をもつならば，その表現は《完全可約》であるという．

可約であるが，完全可約でない表現の例を次にあげる．

複素平面の Euclid 運動群 E_2 に対して，次のような二次元表現を考えよう[1]：

$$T_{\zeta\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.A.9}$$

---

*) 無限次元の表現においては，ここで定義された既約性と後に述べられる Schur の補題の意味のそれが必ずしも一致せず，既約性について異なった定義が可能になることを注意しておきたい．《部分空間既約性》とよばれるのが本文で定義されているもので，表現空間がトリヴィアルでない閉じた不変部分空間をもたないことをいう．《演算子既約性》とよばれるのは，表現空間における閉演算子で表現演算子のすべてと可換なものが，恒等演算子の定数倍に限ることで，Schur の補題の意味になる．この両者を含む第三の既約性も定義できる．

たとえば Lorentz 群の無限次元表現には，演算子既約ではあるが部分空間既約でないものが実際にある．参考書 [23] を見よ．

1) 複素平面上の点 z を $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ で表わせば，

$$T_{\zeta\varphi}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}z+\zeta \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

表現 $T_{\zeta\varphi}$ は二次元複素空間 C_2，すなわち列ベクトル $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の空間に作用する．$\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形のベクトルの集合 $\mathcal{X}_1$ は不変部分空間となるから，この表現は可約である．しかし完全可約ではない．$\mathcal{X}_1$ の直交補空間で，不変部分空間となるものが C_2 には存在しないからである（たとえば $\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の形のベクトルの集合は (2.A.9) という行列の群に関して不変ではない)．

有限次元の表現 T_g が完全可約ならば，g にはよらない相似変換によって，ブロック型の対角行列

$$T_g = \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$$

に帰着させることができる．任意の有限次元可約表現は，ブロック型三角行列

$$T_g = \begin{pmatrix} A_g & C_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix} \tag{2.A.10}$$

に変換することができる．C_g をゼロにできないならば，完全可約ではないわけである．

完全可約な表現の研究は，明らかに，その既約成分の研究に帰着される．それゆえ，完全可約性の判定条件を求めることは重要である．

問題 2.A.4　有限次元空間 $\mathcal{H}$ に作用するユニタリ表現 U_g は，可約ならば完全可約であることを示せ[1]（ヒント：M がトリヴィアルでない不変部分空間であれば，$\mathcal{H}$ における M の直交補空間 $M^{\perp}$ もまた不変部分空間となり，従って M の不変補空間であるという命題を確かめればよい)．

次の補題は既約性の判定条件を与える．

[Schur の補題]　I（有限次元の場合)．T_g と S_g を群 G の二つの有限次元既約表現とする．もしも

$$VT_g = S_gV$$

が成り立つような行列 V が存在するならば，$V=0$ であるか，あるいは V は正則行列で表現 S と T は同値，すなわち

$$S_g = VT_gV^{-1}$$

である．このとき，さらに $S_g = T_g$，つまり V がすべての表現行列と可換ならば，行列 V は単位行列の定数倍である：$V = \lambda 1$（たとえば [30]，第3講参照)．

II（Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における無限次元表現の場合)．$\mathcal{H}$ における表現 T_g が自

---

[1] 同じような命題は，ユニタリ演算子と反ユニタリ演算子が共存している表現の場合にも成り立つ．

己共役であるとしよう．その意味は任意の $g \in G$ に対して，$T_g^* = T_{g'}$ となるようなある元 $g' \in G$ が存在するということである（ユニタリ表現では $g' = g^{-1}$）．自己共役な表現 T_g が既約であるための必要十分条件は，表現のすべての演算子と可換な有界線形演算子 V が単位演算子の定数倍にかぎることである．

T_g と S_g をそれぞれ $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ における自己共役な表現としよう．そのとき，V が $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への線形閉演算子[1]で，$VT_g = S_g V$ をみたすならば，$V = 0$ であるか，あるいは V の逆演算子 V^{-1} が存在して S_g と T_g とは同値 $S_g = VT_g V^{-1}$ となる[2]．

コンパクト群の表現については次の命題が成り立つ——〈Hilbert 空間において，逆をもつ有界演算子によって構成されたコンパクト群の連続線形表現は，すべてユニタリ表現と同値である〉．

前段の条件は欠かせないものであることを注意しておく．$SU(n)$ のような最も簡単なコンパクト群についてさえ，ユニタリ表現と同値にならないような無限次元表現を構成できるからである（Fischer and Ráczka (1966) を参照）．

A.3. Lie 代数

G を Lie 群とし，単位元 e の近傍では $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ というパラメータによって

$$g(0, \cdots, 0) = e \tag{2.A.11}$$

となるようにパラメータづけがなされているとしよう．さらに局所座標の選び方に条件をつけ，$g(0, \cdots, 0, \varphi^\alpha, 0, \cdots, 0)$ という形の G の元の集合が，ある 1-パラメータ可換部分群の e の近傍となり，その部分群においてはパラメータ φ^α が加法的に働く，すなわち

$$g(0, \cdots, \varphi^\alpha, \cdots, 0)\, g(0, \cdots, \psi^\alpha, \cdots, 0) = g(0, \cdots, \varphi^\alpha + \psi^\alpha, \cdots, 0) \tag{2.A.12}$$

となるように座標を選ぶことにしよう．このような性質をもつ解析的座標系は常に存在する（[25] §42 を見よ）．これを《正準》座標系とよぶ．

群 G の任意の表現において，演算子 T_g はいま問題としている単位元の近傍ではパラメータ φ の関数

$$T_g = T(\varphi^1, \cdots, \varphi^n) \tag{2.A.13}$$

と考えることができる．

表現 T_g が連続で有限次元ならば，行列を値とする関数 (2.A.13) は，φ について微分可能であることが証明できる．無限次元表現では，一般的にいえばこれは成り立たない．

---

[1] 閉演算子の定義は第 1 章，1.6 節を見よ．

[2] この命題の証明は [31]，§21.2 にある．

しかしこの場合にも，ベクトルを値とする関数 $T(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)x$ が任意の $x\in D$ において微分可能となるような，空間 $\mathcal{X}$ で稠密なベクトルの集合 D が存在する[1]．いずれの場合にも，表現 T_g の《生成演算子》(あるいは《無限小演算子》)を (2.A.13) の原点における微分係数

$$I_\alpha=\left[\frac{\partial T}{\partial\varphi^\alpha}\right]_{\varphi=0}\qquad(\alpha=1,\cdots,n)\tag{2.A.14}$$

として定義しよう．上に述べたことから，無限次元表現の場合には，(2.A.14) の演算子は $\mathcal{X}$ の稠密な領域 D の上だけで定義される．こうして，すべての1-パラメータ部分群 $g(0,\cdots,\varphi^\alpha,\cdots,0)$ は指数関数によって，

$$T(0,\cdots,\varphi^\alpha,\cdots,0)=e^{I_\alpha\varphi^\alpha}$$

と表現されることになる (α については和をとらない)．さらに単位元の十分小さい近傍内にある G の元 g の各々に対して，それぞれ，g のベキからなる1-パラメータの元の集合 $\{g^\lambda:\lambda$ は実数$\}$ を対応させることができ，それを表現する演算子は，

$$T(g^\lambda)=e^{\lambda I_g}$$

と指数型に書ける．n-パラメータ Lie 群では，任意の生成演算子 I_g が生成演算子の基底 I_α $(\alpha=1,\cdots,n)$ の線形結合で表わされる．パラメータ φ^α の線形変換には，演算子 I_α の線形変換が対応する．一般の正準でない座標系に対しても公式 (2.A.14) によって，生成演算子を定義することができる．そうすると，個々の演算子 I_α はちがってくるが，生成演算子の空間，すなわち基底ベクトル I_α の上に〈張られた〉n 次元実空間は，全体として変わらない．このことから，生成演算子の空間には線形空間の演算 (たし算と数をかけること) だけでなく，交換子積という演算を導入できることがわかる．それを見るために，二つの表現演算子の交換子

$$K_{(\alpha,\beta)}=e^{I_\alpha\varphi}e^{I_\beta\varphi}e^{-I_\alpha\varphi}e^{-I_\beta\varphi}\tag{2.A.15}$$

を考えよう．φ について二次の項まで残すと

$$K_{(\alpha,\beta)}=1+[I_\alpha,I_\beta]\varphi^2+O(\varphi^3)\tag{2.A.16}$$

となる．ここで $[I_\alpha,I_\beta]$ は交換子

$$[I,J]=IJ-JI\tag{2.A.17}$$

である．次に $\varphi^2=\lambda$ と置けば生成演算子 $\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}K_{(\alpha,\beta)}\right]_{\lambda=0}$ は $[I_\alpha,I_\beta]$ に等しいことが見易くなる．従って，上に述べたことから，

[1] [16] を参照．Lorentz 群の場合の証明がある．

$$[I_\alpha, I_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} I_\gamma \qquad (2.\mathrm{A}.18)$$

となる（例によって，γ については 1 から n までの和をとるものとする）．定数 $C^\gamma_{\alpha\beta}$ は群のパラメータ φ の線形変換のさいに，三階のテンソルのように変換する．群のパラメータを固定しておけば，それらは表現 T_g の選び方とは無関係に定まる．実 Lie 群の場合には（ここで問題とするのはこの場合だけだが），係数 $C^\gamma_{\alpha\beta}$ は実数である．

このように，与えられた群 G の任意の表現 T_g において，生成演算子 I_α は結合則をみたさないある種の代数を生成する．これを表現 T_g の《Lie 代数》という．この代数の元を $I, J, K, \cdots$ で表わせば，Lie の積を特徴づける性質は次の二つである：

a）《反対称性》 $$[I, K] = -[K, I]. \qquad (2.\mathrm{A}.19)$$

b）《Jacobi の恒等式》

$$[[I, J], K] + [[J, K], I] + [[K, I], J] = 0. \qquad (2.\mathrm{A}.20)$$

容易に確かめられるように，括弧式 $[I, J]$ が（2.A.17）のような交換子なら，（2.A.19），（2.A.20）の二つの条件は恒等的に成り立つ．逆に抽象的な Lie 代数，すなわち結合則はみたさないが，a），b）の条件は満足するような積 [,] の定義されている代数が与えられた場合には，《包絡環》，すなわち結合則をみたすような可能な限りの形式的な積 $IJK\cdots$（これを〈単語〉という）から生成され，Lie 代数の積と形式的な積の関係が（2.A.17）で与えられるような代数を定義することができる．もとの Lie 代数の各線形表現は，いずれも同時に包絡環の表現である．しかし，（2.A.18）型の等式は Lie 代数の演算（すなわち，たし算と実数のかけ算それから交換子）しか含まないから，表現の選び方によらないが，結合則をみたす積のあいだの関係は，ある表現で成り立っても別の表現では成り立たないことがありうる．Lie 群 G に対応して，《構造定数》テンソル $C^\gamma_{\alpha\beta}$ によって特徴づけられる抽象的 Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ を導入し，各表現 T_g の Lie 代数はこの抽象的な代数の表現と考えることができる．

Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ の元の集合 $\boldsymbol{I}$ が $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{I}] \subset \boldsymbol{I}$ をみたすときに，$\boldsymbol{I}$ を《イデアル》という（すなわちイデアルの任意の元と $\boldsymbol{G}$ の任意の元との交換子は，またそのイデアルの元となる）．明らかに任意のイデアルは部分 Lie 代数である．また $\boldsymbol{G}$ の部分代数 $\boldsymbol{I}$ は，任意の二つの元 J, K のあいだに $[J, K] = 0$ が成り立つとき，《可換》あるいは《Abel》代数という．$\boldsymbol{G}$ が《半単純》であるとは，{0} 以外の Abel イデアルを含まぬことをいう．トリヴィアルでないイデアルをいっさい含まぬとき，$\boldsymbol{G}$ は《単純》であるという．

問題 2.A.5 群 G が半単純であれば，その Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ もまた半単純であることを示せ．

場合によっては，Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ が半単純ならば，群 G 自身は離散的な不変 Abel 部分群を含んでいても，対応する Lie 群を半単純とよぶことがある．たとえば $SU(n)$ はトリヴィアルでない中心，つまり n 個の元からなる巡回群 Z_n を含むが，単純群とよばれている．

任意の n-パラメータ Lie 群は少なくとも一つの n 次元表現をもつ．つまり Lie 代数に属する生成演算子の行列要素が

$$(I_\nu)^{\alpha}_{\ \beta} = C^{\alpha}_{\ \beta\nu} \tag{2.A.21}$$

という形をもつような表現である．

問題 2.A.6 行列 (2.A.21) は交換関係 (2.A.18) を満足することを確かめよ（ヒント：係数 C の反対称性と Jacobi の恒等式 (2.A.20) を使え．この式から

$$C^{\sigma}_{\alpha\beta}C^{\tau}_{\sigma\gamma}+C^{\sigma}_{\beta\gamma}C^{\tau}_{\sigma\alpha}+C^{\sigma}_{\gamma\alpha}C^{\tau}_{\sigma\beta}=0 \tag{2.A.22}$$

という等式が得られる)．

表現 (2.A.21) を《Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ の随伴表現》という．

群 $SU(2)$ の随伴表現は三次元である．(2.3.3) のようにパラメータをとると，生成演算子は三階の反対称単位テンソルで表わされる．すなわち

$$(I_k)^{i}_{\ j} = \varepsilon_{jki}.$$

各 Lie 代数にはそれぞれひとつの対称計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ が対応する．その定義は

$$g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}C^{\nu}_{\mu\alpha}C^{\mu}_{\nu\beta} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(I_\alpha I_\beta) \tag{2.A.23}$$

であるが，ここで行列 I_α は随伴表現における行列であり，$\mathrm{Tr}\,A$ とは例によって行列 A の対角和である．

実対称テンソル $g_{\alpha\beta}$ は，適当な線形変換によって対角化することができる．それだけでなく，対角要素がどれも三つの値のいずれか以外はとらないようにさえできる．すなわち，

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}g_\alpha, \qquad \{g_\alpha\} = \{N, 0, -N\}. \tag{2.A.24}$$

ただし，最初の等式の右辺では，α について和はとらない．Cartan の定理によれば，Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ が半単純となるのは (2.A.23) の計量テンソルが正則，すなわち $\det g \neq 0$ であるとき，そのときだけである．半単純の場合には，明らかに (2.A.24) の固有値から 0 を除かねばならない．また半単純代数では計量テンソルの逆行列 $g^{\alpha\beta}$，すなわち，

$$g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{2.A.25}$$

となる行列が存在する．テンソル $g^{\alpha\beta}$ を使えば，添え字を上にあげること，特に生成演算子のなすベクトル I の成分を，

$$I^{\alpha} = g^{\alpha\beta}I_{\beta}$$

とすることができる．テンソル g を特に《計量テンソル》とよぶ理由は，包絡環に属する二次形式

$$C_2(G) = g_{\alpha\beta}I^{\alpha}I^{\beta} = I^{\alpha}I_{\alpha} \tag{2.A.26}$$

の不変性に由来する．Lie 代数の言葉でいえば，$C_2(G)$ の不変性は任意の $I \in G$ に対する

$$[C_2(G), I] = 0 \tag{2.A.27}$$

という等式によって表現される．

Lie 代数の多項式型の不変量をその代数の《Casimir 演算子》という．

構造定数と計量テンソルを使えば，(上にあげた半単純性の代数的判定条件とともに)群のコンパクト性に対しても代数的な判定条件を与えることができる．すなわち半単純 Lie 群は，その計量テンソルが正定値であるとき，そのときに限りコンパクトである．また一般の Lie 群がコンパクトであるためには，構造定数テンソルが完全に反対称となるような群の座標系が存在することが必要である ((2.A.19) により $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ は α, β の交換では常に反対称である．それゆえ，コンパクト性の必要条件は，β と γ の交換における反対称性であるといい表わすことができる)．

表現 T_g がユニタリならば，演算子 I_{α} は反エルミートとなり，固有値は純虚数である．量子論では物理量にエルミート演算子が対応するから，物理の文献では Lie 代数にエルミート基底

$$L_{\alpha} = \mathrm{i}\, I_{\alpha} \tag{2.A.28}$$

を導入するのが普通になっている．(2.A.28) を (2.A.18) に代入すれば，次のようになる：

$$[L_{\alpha}, L_{\beta}] = \mathrm{i}\, C^{\gamma}_{\alpha\beta}L_{\gamma}. \tag{2.A.29}$$

問題 2.A.7 回転群の無限小演算子の表現 (2.3.3 a) をもとにして構造定数を求めよ．この場合には，計量テンソルは単位テンソル $\delta_{\alpha\beta}$ となることを示せ．さらに (2.3.2), (2.3.3) のパラメータをもとにして，Lorentz 群の構造定数と計量テンソルを求めよ．

問題 2.A.8 行列式が $+1$ となる n 次の複素行列の全体がつくる群を $SL(n, C)$ とする．この行

列群の Lie 代数は，対角和がゼロに等しい n 次行列の全体であることを示せ（ヒント：任意の行列 H が三角型の Jordan の標準形に変換できることを使って（たとえば [32] 第2部付録を参照)，まず

$$\det e^{H} = e^{\mathrm{Tr}\, H} \tag{2.A.30}$$

という式を導け).

A. 4.　Lie の基本定理

Lie 代数とその表現の重要性は次の事実による．すなわち，Lie 代数が与えられれば，Lie 群を構成することができ，Lie 群の表現は対応する Lie 代数の表現によって一意的に定められることである．これらの命題は，われわれがこの節で定式化しようとしている Lie の三つの基本定理の内容をなしている．厳密にいうと，Lie が研究したのは，ある有限次元空間における座標の（一般には非線形な）連続変換の群である．Lie 群の有限次元表現に関する諸結果は，Lie の研究から直接に導かれる．しかし無限次元表現の場合には，代数の表現と群の表現との関係はもっと複雑である．代数の表現であっても，群全体の表現となるように積分することのできないものが存在する（三次元回転群の Lie 代数の表現で，全角運動量 l が複素数となるようなものが，その例として役立つだろう)．ここではこういう微妙な話には立ち入らぬことにして，有限次元の表現に話を限って結果を定式化する．始めに Lie 群と Lie 代数との関係を調べよう．

前の節では，与えられた Lie 群 G の任意の線形表現をもとにして，無限小演算子の性質のうち表現の選び方によらぬものを抽象し，群 G の Lie 代数 $\boldsymbol{G}$ を定義したのだった．この節の話の進め方は，直接に群 G をもとにして Lie 代数を導入するものである．

Lie 群 G の単位元の近傍に正準パラメータが入れてあるとしよう．そうするとこの近傍で群の積の法則を与える (2.A.4) の関数 Φ^{α}は，積の結合則 (2.A.5) のほかに

$$\Phi(\varphi\,;0) = \Phi(0\,;\varphi) = \varphi \tag{2.A.31}$$

$$\Phi(0, \cdots, \varphi^{\alpha}, \cdots, 0\,; 0, \cdots, \theta^{\alpha}, \cdots, 0) = (0, \cdots \varphi^{\alpha}+\theta^{\alpha}, \cdots, 0) \tag{2.A.31a}$$

という条件をみたしている ((2.A.11) と (2.A.12) を参照)．また逆元が存在することから，少なくとも座標原点の十分小さい近傍内では，

$$\det\left(\frac{\partial\Phi^{\alpha}(\varphi\,;\theta)}{\partial\theta^{\beta}}\right) \neq 0 \tag{2.A.32}$$

の成り立つことが導かれる．

Lie の第1定理は関数

$$v^{\alpha}_{\beta}(\varphi) = \left[\frac{\partial\Phi^{\alpha}(\varphi\,;\theta)}{\partial\theta^{\beta}}\right]_{\theta=0} \tag{2.A.33}$$

をもとにして関数 Φ^α が構成できることを保障している．

(2.A.31) の初めの等式から明らかなように (2.A.33) の関数は，

$$v^\alpha_\beta(0) = \delta^\alpha_\beta \tag{2.A.34}$$

という《初期条件》を満足する．

[定理 2.A.1] (Lie の第1定理)　I．関数 Φ^α $(\varphi\,;\theta)$ は，φ を固定したときに，θ に関する連立1階偏微分方程式

$$\frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi\,;\theta)}{\partial\theta^\beta}v^\beta_\gamma(\theta) = v^\alpha_\gamma(\Phi(\varphi\,;\theta)) \tag{2.A.35}$$

を満足する (例によって，繰り返される添え字 β については1から n までの和をとるものとする)．

II 《初期条件》(2.A.34) を満足する連続微分可能な関数 v^α_β が与えられたときに，連立方程式 (2.A.35) が解をもつならば，解はこの連立方程式および初期条件 $\Phi^\alpha(\varphi\,;0) = \varphi^\alpha$ ((2.A.31) を見よ) とによって一意的に定まる．

証明　I．方程式 (2.A.35) は結合則 (2.A.5) から導かれる．実際，(2.A.5) を τ^ν で微分して $\tau=0$ と置けば，(2.A.33) を使って (2.A.35) が得られる．逆にこの方程式と初期条件 (2.A.34) を前提すれば (2.A.33) の関係が導かれる．

II．少なくとも $\theta=0$ の近傍では，初期条件 (2.A.31) をみたすような連立方程式 (2.A.35) の解が，ひとつ以上あることはない．このことを証明しよう．まず v^α_β は連続であり，(2.A.34) によって $\det(v^\alpha_\beta(0))=1$ であるから，θ が十分に小さければ

$$\det(v^\alpha_\beta(\theta)) > 0 \tag{2.A.36}$$

となって行列 $v^\alpha_\beta(\theta)$ は逆をもつ．逆行列を $u^\alpha_\beta(\theta)$ と書こう．すなわち，

$$u^\alpha_\sigma(\theta)v^\sigma_\beta(\theta) = \delta^\alpha_\beta \tag{2.A.37}$$

である．この関係を使えば，(2.A.35) 式は，

$$\frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi\,;\theta)}{\partial\theta^\beta} = v^\alpha_\sigma(\Phi(\varphi\,;\theta))u^\sigma_\beta(\theta) \tag{2.A.38}$$

という形に書きなおすことができる．すると初期条件 (2.A.31) のもとでは，方程式 (2.A.38) がひとつ以上の解をもちえないことが，常微分方程式の理論から導かれるのである．それを確かめるには，次のようにつながった微分方程式と初期条件の系列を考えてみればよい．

$$\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial\theta^1}(\varphi\,;\theta^1,0,\cdots,0) = v^\alpha_\sigma(\Phi(\varphi\,;\theta^1,0,\cdots,0))u^\sigma_1(\theta^1,\cdots,0),$$

$$\Phi^\alpha(\varphi\,;0)=\varphi^\alpha\,;$$

$$\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial\theta^2}(\varphi\,;\theta^1,\theta^2,\cdots,0)=v^\alpha_\sigma(\Phi(\varphi\,;\theta^1,\theta^2,\cdots,0))\,u^\sigma_2(\theta^1,\theta^2,\cdots,0),$$

$$\Phi^\alpha(\varphi\,;\theta^1,\theta^2,0,\cdots,0)|_{\theta^2=0}=\Phi^\alpha(\varphi\,;\theta^1,0,\cdots,0)\,;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

第二の方程式の初期条件は，第一の方程式の解（これはただ一つしかない！）によって決まり，第三の方程式の … と続いて一意性がいえる．こうして定理2. A. 1は証明された．

ここまでの話では，連立方程式 (2. A. 35) あるいは (2. A. 38) で解の存在を仮定し，与えられた初期条件のもとにおける解の一意性を証明した．解が存在する条件 (〈積分可能条件〉) は，定石どおり，二階の混合微分が順序によらずに等しいことから導かれる：

[定理 2. A. 2] (Lie の第2定理)　連立方程式 (2. A. 35) が解をもつための必要十分条件は，関数 $v^\alpha_\beta(\theta)$ が初期条件 (2. A. 34) とともに，連立微分方程式

$$\frac{\partial v^\alpha_\beta(\theta)}{\partial\theta^\sigma}v^\sigma_\gamma(\theta)-\frac{\partial v^\alpha_\gamma}{\partial\theta^\sigma}v^\sigma_\beta(\theta)=C^\sigma_{\gamma\beta}v^\alpha_\sigma(\theta)\tag{2. A. 39}$$

を満足することである．ここで $C^\sigma_{\beta\gamma}$ は β と γ について反対称な定数である．

証明. (2. A. 4) の記法 $\tau=\Phi(\varphi\,;\theta)$ を利用しよう．まず等式

$$\frac{\partial^2\Phi^\alpha(\varphi\,;\theta)}{\partial\theta^\beta\partial\theta^\gamma}=\frac{\partial^2\Phi^\alpha(\varphi\,;\theta)}{\partial\theta^\gamma\partial\theta^\beta}\tag{2. A. 40}$$

が成り立つから，(2. A. 38) によって

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}[v^\alpha_\sigma(\theta)u^\sigma_\beta(\theta)]=\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}[v^\alpha_\sigma(\theta)u^\sigma_\gamma(\theta)]$$

が得られる．この式は，v^α_σ の微係数が

$$\frac{\partial v^\alpha_\sigma(\tau)}{\partial\theta^\gamma}=\frac{\partial v^\alpha_\sigma(\tau)}{\partial\tau^\rho}\frac{\partial\tau^\rho}{\partial\theta^\gamma}=\frac{\partial v^\alpha_\sigma(\tau)}{\partial\tau^\rho}v^\rho_\kappa(\tau)\,u^\kappa_\gamma(\theta)$$

と書かれることに注意して変形すると

$$\frac{\partial v^\alpha_\sigma(\tau)}{\partial\tau^\rho}v^\rho_\kappa(\tau)\,[u^\kappa_\gamma(\theta)\,u^\sigma_\beta(\theta)-u^\kappa_\beta(\theta)\,u^\sigma_\gamma(\theta)]$$

$$=v^\alpha_\sigma(\tau)\left(\frac{\partial u^\sigma_\gamma(\theta)}{\partial\theta^\beta}-\frac{\partial u^\sigma_\beta(\theta)}{\partial\theta^\gamma}\right)$$

となることがわかる．この式の左辺で和をとらぬ添え字の文字を適当に入れ換え，恒等式 (2. A. 37) を利用すれば，左辺は τ のみの関数，右辺は θ のみの関数となるように書き直すことができる．すなわち，

$$\left[\frac{\partial v_\beta^\sigma(\tau)}{\partial\tau^\rho}v_\gamma^\rho(\tau)-\frac{\partial v_\gamma^\sigma(\tau)}{\partial\tau^\rho}v_\beta^\rho(\tau)\right]u_\sigma^\alpha(\tau)$$

$$=\left[\frac{\partial u_\sigma^\alpha(\theta)}{\partial\theta^\rho}-\frac{\partial u_\rho^\alpha(\theta)}{\partial\theta^\sigma}\right]v_\gamma^\sigma(\theta)v_\beta^\rho(\theta). \tag{2.A.41}$$

この式の左辺は θ によらず右辺は τ によらない．従って，等式が成り立つからには，両辺ともある定数に等しくなければならない．それを $C_{\gamma\beta}^\alpha$ と書く．その値は (2.A.41) でたとえば $\tau=0$ と置けば定まり，(2.A.34) を使えば

$$C_{\gamma\beta}^\alpha=\left(\frac{\partial v_\beta^\alpha}{\partial\tau^\gamma}\right)_{\tau=0}-\left(\frac{\partial v_\gamma^\alpha}{\partial\tau^\beta}\right)_{\tau=0} \tag{2.A.42}$$

と表わされる．(2.A.41) をこの定数に等しいと置けば (2.A.39) が得られる．定理2.A.2は証明された．

微分演算子

$$X_\alpha=v_\alpha^\sigma(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi^\sigma} \tag{2.A.43}$$

は (2.A.39) のおかげで，交換関係

$$[X_\alpha, X_\beta]=C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \tag{2.A.44}$$

を満足することに注意しよう．X_α を《群 G の無限小演算子》とよび，$C_{\alpha\beta}^\gamma$ を群の構造定数という．

Lie の最後の（第3の）定理は，連立方程式 (2.A.39) が解をもつためには構造定数がいかなる条件をみたすべきかを与えるものである．第3定理とこれまでの二定理をあわせれば，構造定数から群を再構成することができる：

[定理 2.A.3] (Lie の第3定理) 連立偏微分方程式 (2.A.39) が，局所的に解けるための必要十分条件は，構造定数が反対称性の条件

$$C_{\alpha\beta}^\gamma=-C_{\beta\alpha}^\gamma \tag{2.A.45}$$

と Jacobi の恒等式 (2.A.22) とを満足することである．これらの条件がみたされるとき，構造定数から群を構成することができる．

証明. 条件が必要であることは，(2.A.44) と交換子に対する Jacobi の恒等式から得られる（なお問題2.A.6参照）．条件が十分であることは実は偏微分方程式論でよく知られている結果から導かれる．この定理と Lie の初めの二つの定理により，構造定数から局所的 Lie 群（すなわち Lie 群の単位元の近傍）が再構成できることがわかる．大域的に Lie 群を構成する問題はこれほど初等的ではない（[25] §59 を参照）．

等式 (2.A.42) で定義された構造定数テンソル $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ は，群 G の任意の表現において，その生成演算子の交換関係 (2.A.18) に現われるテンソルと一致する．このことを使えば線形表現に対しても，Lie の基本定理に対応する結果を証明することができる．ここではその定式化のみに話を限ることにしよう．

1. 二つの表現が同一の空間に作用し，そのうえ，生成演算子としてまったく同じものが選び得るならば，これらの表現は一致する．

2. 任意の表現における生成演算子 I_α は，交換関係 (2.A.18) を満足する．ここで $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ はテンソルの性質をもつ定数で表現の選び方にはよらない．

3. 定数のテンソル $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ がある群の構造定数テンソルであるためには，それが反対称的でかつ Jacobi の恒等式 (2.A.22) を満足することが必要十分である．有限次の行列 A_α $(\alpha = 1, \cdots, n)$ が，ある群 G の構造定数 $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ を代入した交換関係 (2.A.18) を満足するならば，A_α はこの群 G のある表現の生成演算子である．

文献案内

§1．Hilbert 空間論の言葉を使って量子力学の原理を初めて数学的に非難の余地なく述べたのは，von Neumann の古典的な本 [33] である．量子論における Gelfand の三つ組の理論のいろいろな応用を示した仕事としては Böhm (Andersen et al. (1966) にある概論風の講義ノートおよびそこに引用されている以前の仕事)，Grossmann (1965)～(1967)，Kristensen et al. (1965) などがある．1.1 節の叙述は Todorov の講義 (1964) に従った．超選択則を初めて問題としたのは Wick et al. (1952) である (Hagedorn (1959) も参照)．1.3 節は Kharatian (1968) によって得られた結果の再録であるが，説明の仕方は Kharatian and Oksak (1968) に従った．

§2．2.1 節，2.2 節の材料はかなり初等的でよく知られている (たとえば [2]，[3]，Wightman (1960 b)，Joos (1962))．相対論的不変性の原理を 1.3 節のように定式化することは Wigner (1939) に始まる ([26] も参照)．定理 2.2.1 の完全な証明は Bargmann (1964) にある．

§3．この節の諸結果は Wigner (1939) によって得られた (Wigner (1962) も参照)．Wigner は誘導表現の方法を事実上利用しているが，これを抽象的に定式化したのは Mackey (1952) である．本文に引用した回転群の表現論のいくつかの結果は，たとえば [26]，[34] に載っている (Bargmann (1962) の極めてすぐれた説明も参照するとよい)．Poincaré 群のユニタリ表現に関する詳しい綜合報告は前にも引用した Joos (1962) にある．さらに参照すべきものとして，Yu. Shirokov (1957～1959，1960 a, b)，Wightman の講義ノート (1960 b)，Wightman (1959)，[27] のなかにある Newton の綜合報告，Guillot and Petit (1966)，Moussa and Stora (1964) などをあげておく．クラス3の表現 ($p^2 < 0$) の物理的応用については Joos (1964) を見よ．時間反転を反ユニタリ演算子で記述することを初めて提唱したのは Wigner である ([26] を参照)．反ユニタリ演算子の標準形と現象論的諸性質については Wigner (1960 a, b) を見よ．並進を表現する演算子のスペクトル分解の諸性質は Uhlmann (1961) によって調べられた．

§4. Dirac 理論に関する標準的記述は，相対論的量子論を扱ったどの本にも載っている（たとえば [4]，[6]）．n 次元空間のスピノル理論に関する古典的叙述は，Cartan の本 [35] に見られる（Rashevskii の本 [36] も参照）．スピノル理論と γ 行列の代数を現代数学のスタイルで述べたものに Kastler の本 [37] の付録 B がある．不連続変換に対する Dirac スピノルの変換性は多くの本で扱われている（たとえば [28]，[29]）．Winogradzki の一連の仕事（1957～1959）でも，これらの問題がより手際よく扱われている．ただし，そこでは $[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]_{+}=\delta^{\mu\nu}$ で定義されるような γ 行列を使っている．Dirac 方程式と四成分スピノルの問題を Joos (1962) の綜合報告は Poincaré 群の表現の観点から扱っている．高階スピノルの方程式を取り上げた仕事としては Gårding (1944)，Bargmann and Wigner (1948)，Gelfand and Yaglom (1948) がある（また [34]，[16]，Harish-Chandra (1947)，Weinberg (1964 a, b)，Park and Jehle (1964)，Visconti [38]，Umezawa[39] を参照せよ）．

§5. 5.1 節にでてくる状態ベクトルの Hilbert 空間は Fock が30年代に導入したものである（[40] を見よ）．Poincaré 群の既約表現の直積を展開する問題については Chou and M. Shirokov (1958)，M. Shirokov (1961)，Jacob and Wick (1959)，Wick (1962)，Lomont (1960)，Moussa and Stora (1964)およびこの論文に引用されている文献，Boyce et al. (1967) を参照せよ．

付録 Pontrjagin の本 [25] は連続群論に関する基本的にしてかつ読みやすい教科書である．Dzelobenko の講義ノート [30] は内容豊富で新鮮な書き方である．Gürsey の綜合報告は分量は少ないが大変よく書けている．Lie の三定理の証明は [41] にあるが，いまあげた Gürsey の綜合報告にもある．特に物理学者むけに書かれた一般的教科書のうちでは，[42]，[43]，[27] が推薦できる．回転群と Lorentz 群の表現論については，極めてすぐれた本が書かれている（[26]，[34]，[16]）．ユニタリ群はまた素粒子の対称性の記述に応用され，[44] はこの問題を扱っている（これらの応用の初等的説明は Bogoliubov の講義ノート (1966) を見るとよい）．無限次元の場合の Schur の補題については [31] を参照されたい．

［訳者の補足］ 連続群論への初等的入門書として，[山内]，[山内a] がある．[横田] には古典群の位相的な側面が詳しく解説してある．やや進んだ教科書として，Lie 代数については [松島] を，Lie 群論まで及ぶものとして [松島a] をあげておこう．群の誘導表現に関しては，有限群の場合であるが，[弥永] にやさしい解説がある．

第3章　局所場と Wightman 関数

要　　約

局所的な量子場 $\varphi_\alpha(x)$ は演算子値をとる一般関数として定義される．これは，任意の基礎関数 $f(x)\in\mathcal{S}(R_4)$ に状態ベクトル空間 $\mathcal{H}$ における（一般には有界でない）演算子 $\varphi_\tau(f)$ を対応させるものである．われわれは，添え字 τ と《試験関数》f を動かしたとき，すべての演算子 $\varphi_\tau(f)$ が共通な，そして，$\mathcal{H}$ において至るところ稠密な定義域 Ω をもつと仮定する．さらに場の相対論的共変性を要求しよう．このとき，場の局所性とは，

$$(x-y)^2<0 \text{ に対し，}\qquad [\varphi_\tau(x),\varphi_{\tau'}(y)]_\mp=0$$

を意味する．交換子記号《$-$》は整数スピンの場に，反交換子記号《$+$》は半整数スピンの場に対応している．理論が完全であることは，真空が巡回性をもつことであるが，これは，演算子 $\{\varphi_\tau(f)\}$ からなる多項式を真空に作用させて得るベクトルの全体が $\mathcal{H}$ において至るところ稠密になることを意味している．量子場を定義するのに演算子値をとる一般関数とする必要があることは，最も簡単な例である自由場でさえ《各点の場の演算子》$\varphi(x)$ といったものがベクトル空間 $\mathcal{H}$ のどの一つのベクトルに対しても定義され得ないことからもわかる．観測過程の記述という観点からみても，たとえば自由場の場合，演算子 $\varphi(f)$ は真空に作用したとき規格化された一粒子状態（波束）をつくりだすということから演算子値の一般関数 $\varphi(f)$ という考えは十分に自然なものと理解されるのである．

§2では Wightman 流の公理論的方法の基礎的な道具となる Wightman 関数 $\{w_n\}$ を導入する．これは異なったいくつもの点における演算子場の積の真空期待値として定義される一般関数である．

場の量子論におけるすべての公理は一般関数の言葉に直すことができる．

§3では，逆に，Wightman 関数が与えられたものとして（すなわち，ある条件を満足する汎関数の全体が与えられたとして），そこから出発しても全理論が再構成できることを示す．再構成という意味は，状態ベクトル空間としての Gelfand の三つ組，その上での

Poincaré 群の表現および演算子場 $\varphi(f)$ が，その場 φ の積の真空期待値が初めに与えられた汎関数 $\{w_n\}$ に等しくなるように構成できることである．

§4 では，自由場および一般化された自由場の例を研究しよう．特に 4.4 節では，自由場を例として第二量子化した理論における不連続変換すなわち空間反転 P, 時間反転 T および荷電共役 C の表現を調べる．4.5 節では Källén=Lehmann の積分表示を導入するが，それは一般化された自由場を特徴づけるのに特に役立つ．

付録に場の量子論における特異関数をまとめておく．

§ 1. 局所的な量子場の定義とその性質

1.1. 相対論的な演算子場の概念

前章に述べた体系は極めて一般的なものであった．物理量の時間変化の法則も，具体化しないままで，ただ群論的な性質を示したにすぎない．物理現象間の因果的依存性はこれまでに挙げてきた諸要請にはまだ取り入れられていないのである．そこで可能な理論の枠組を強く規定する諸要請を定式化するため，ここで時空に関して局所的な観測量（オブザーバブル）というものを考えよう．以下では，よく知られた古典論的対応をもつ相対論的量子場の概念が基礎的な役割をはたすであろう．

量子場をテンソル型の演算子値一般関数として定義しよう．この定義は，時空の各点の場という普通の概念よりも物理的な実際の状態によく対応している．実際，実験では，場の強さは数学的な点 x においてではなく，空間のある有限領域と時間のある有限区間において測定される．基礎関数の台がこの与えられた時空領域に含まれるような演算子値一般関数としての場の値は，このような現実の測定に対応している．

相対論においては一般に場は，固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ の変換に対し一定の変換性を示す多成分テンソル量 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_r)$ である（たとえば，φ はスカラー，スピノル，ベクトルなど）．〈テンソル〉φ は，空間 $\mathcal{S}(R_4)$ で与えられる r 個の一般関数からなる組と考えるよりも，$f_j(x)\in\mathcal{S}(R_4)$ として，〈ベクトル型〉の基礎関数 $\vec{f}=(f_1(x),\cdots,f_r(x))$ の空間の上での汎関数と考えるほうが便利である．その空間を $\mathcal{S}_r(R_4)$ と記すことにしよう．こうした二つの考え方は本質において等価である．すなわち，

$$\varphi(\vec{f})=\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(f_j).$$

相対論的な量子場の正確な定義に進もう．

$A \to V(A)$ を特殊線形変換群 $SL(2)$ の有限次元 (r 次元) の表現とし，$\vec{f} \in \mathcal{S}_r(R_4)$ とする．すべての $\vec{f} \in \mathcal{S}_r(R_4)$ に対して定義された状態ベクトル空間 $\mathcal{H}$ の (一般には有界でない*)) 線形演算子 $\varphi(\vec{f})$ が次の条件 (場の公理) をみたすとき，それを《量子場》とよぶ：

IV. 1) $\vec{f} \in \mathcal{S}_r(R_4)$ なるすべての演算子 $\varphi(\vec{f}), \varphi^*(\vec{f})$ は $\mathcal{H}$ において稠密なある線形多様体 Ω を ($\vec{f}$ に依存しない) 共通の定義域としてもち，かつ，それを不変にする：

$$\Psi_0 \in \Omega, \qquad \varphi(\vec{f})\Omega \subset \Omega, \qquad \varphi^*(\vec{f})\Omega \subset \Omega. \tag{3.1.1}$$

IV. 2) 演算子 $\varphi(\vec{f})$ は $\vec{f}$ に関し線形である．すなわち，

$$\varphi(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g}) = \alpha\varphi(\vec{f})+\beta\varphi(\vec{g}).$$

演算子場のこの性質により，記法

$$\varphi(\vec{f}) = \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(f_j) = \sum_{j=1}^{r} \int \varphi_j(x) f_j(x)\, d^4x \tag{3.1.2}$$

を一般関数論におけるとまったく同じ意味で用いてよいことになる (記号 $\varphi_j(x)$ は，§4 で議論される自由場の場合でさえ，$\mathcal{H}$ のいかなる演算子にも対応していないけれども)[1]．

IV. 3) 演算子 $\varphi(\vec{f})$ は $\vec{f}$ の関数として次の弱連続性の条件をみたす．すなわち，ベクトル Φ と Ψ が Ω に属するならば，$(\Phi, \varphi(\vec{f})\Psi)$ は $\mathcal{S}_r^*(R_4)$ に属する一般関数となる．

一見したところでは単に形式的なものにすぎない この最後の 要請が重要な物理的意味をもっていることを指摘しておこう．これは (他の要請と一緒に) 運動量空間における行列要素が多項式でおさえられることを保証するもので，それによって，おそらく，いわゆるくりこみ不可能な理論を考慮の対象から排除している．詳しくは第 4 章 § 3～§ 5 を見よ．

相対論的理論においては，さらに場の共変性に関する次の条件が課せられねばならない：

V. $U(\underset{\sim}{a}, A)$ をスピノル群 $\mathcal{P}_0$ の空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ表現とする．演算子 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ は場の演算子の共通な定義域 Ω を不変に保つ，

$$U(\underset{\sim}{a}, A)\Omega \subset \Omega, \tag{3.1.3}$$

---

*) 場の理論の正準形式においては，一般に正準交換関係に従う場の演算子は有界でなく，反交換関係に従う場の演算子は有界なことが導かれる．

1) 自由場の場合に見られるこの事情は一般の場合にも正しい (§ 2.4 参照)．

そして，　　$$\varphi(\vec{f}_{\{\underset{\sim}{a},A\}}) = U(\underset{\sim}{a},A)\varphi(\vec{f})\,U^{-1}(\underset{\sim}{a},A). \tag{3.1.4}$$

ただし，　　$$(\vec{f}_{\{\underset{\sim}{a},A\}}(x))_i = \sum_{j=1}^{r} V_{ji}(A^{-1})f_j(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{3.1.5}$$

$\Lambda(A)$ は (2.2.15) で与えられ，いま考えている $SL(2)$ の r 次元表現である．

問題 3.1.1 (3.1.2) で定義される場 $\varphi_j(x)$ が意味をもつならば，要請 V は，$\mathcal{P}_0$ の変換に対するこれらの場の次の変換則と等価であることを示せ[1]：

$$U(\underset{\sim}{a},A)\varphi_i(x)U^{-1}(\underset{\sim}{a},A) = \sum_{j=1}^{r} V^{-1}(A)_{ij}\varphi_j(\Lambda x+a). \tag{3.1.6}$$

場が一成分 ($r=1$) で $V(A)\equiv 1$ のとき，その場を《スカラー場》とよぶ．群 $L_+^\uparrow$ の一価表現に従って変換される《テンソル場》(たとえばスカラー場，ベクトル場など) は，もしその成分 $\varphi_j(f)$ が実の f に対しエルミートならば《中性》という (その理由は4.2節以下で明らかにしよう．そこでは電荷という概念がどのようにして複素 (スカラー) 場と結びつけられるかを示す．[45] も参照)．変換則 (3.1.5)〜(3.1.6) の行列 $V(A)$ が Lorentz 群のスピノル (二価) 表現を与えるような場は《スピノル場》とよぶ (第2章 4.1節の定義を参照)．

(Poincaré 群の二価表現に対応する) スピノル場は観測可能でない；それらは状態ベクトル空間 $\mathcal{H}$ の二つの異なるコヒーレント部分空間を結ぶ変換をひきおこすからである．それは次のようにしてわかる．第2章 1.3節で指摘したとおり，表現 $U(a,A)$ が一価であるか二価になるかは $\mathcal{H}$ における超選択則を与える．すなわち，常に，

$$U(a,-1) = \varepsilon U(a,1) \tag{3.1.7}$$

であって，$\varepsilon=\pm1$，しかも ε は一つのコヒーレント部分空間の中では一定だというのであった．φ がスピノル場ならば $\varphi(\vec{f}_{\{a,-1\}}) = -\varphi(\vec{f}_{\{a,1\}})$ である．他方，もし演算子 $\varphi(\vec{f})$ が一つのコヒーレント部分空間をそれ自身のなかに変換するとしたら，それが $\varepsilon=+1,-1$ のどちらをもつ部分空間であっても，その上で

$$U(a,-1)\varphi(\vec{f})U^{-1}(a,-1) = U(a,1)\varphi(\vec{f})U^{-1}(a,1)$$

となるが，これは (3.1.4) および場 φ がスピノルであるという上記の性質に矛盾する．従って，場 $\varphi(\vec{f})$ は与えられた ε をもつコヒーレント部分空間を $\varepsilon'=-\varepsilon$ をもつ別のコヒーレント部分空間に写すほかない．すなわち，

$$U(a,-1)\varphi(\vec{f})U^{-1}(a,-1) = -U(a,1)\varphi(\vec{f})U^{-1}(a,1).$$

異なる電荷のコヒーレント部分空間を結ぶ変換を生ずる複素テンソル場も観測可能ではあり得ない．

---

[1] より一般的に，表現 $V(A)$ を有限次元と仮定しないで場の共変性を定式化する方法もある (たとえば，Stoyanov と Todorov の論文 (1968) を見よ)．例として，二つの四次元ベクトル x,ξ の組で決まるいわゆる双局所的な場 $\psi(x,\xi)$ をあげておこう．相対論的不変性のまた別の一般化を扱った文献もある (Ingraham (1962) 参照)．

1.2. 局所性の原理

相対論的な局所場の理論の最も本質的な要請のひとつである局所可換性の要請に進もう．この要請の物理的意味は，空間的に隔たった二つの時空点 x, y における場の測定が独立であること，すなわち一方の測定が他方の測定の結果に影響しないことである．これは相対論的な微視的因果律を表わしている．正確に言えば，この局所可換性の要請は観測可能な場（またはそれらの混合），すなわち，Lorentz 群の一価表現に従って変換されるエルミート場に対してのみ直観的意味をもっている．この特殊な場合の最も自然な一般化として，任意の場（複素数でもスピノルでもよい）に対する次の要請をたてよう：

VI.　ベクトル関数 $\vec{f}$ と $\vec{g}$ の台は空間的に離れているとする：

$$\mathrm{supp}\,[f_i(x)\cdot g_j(y)] \subset \{(x, y)\,;\,(x-y)^2 < 0\} \qquad (i, j=1, \cdots, r). \tag{3.1.8}$$

そうすると，演算子 $\varphi(\vec{f})$ と $\varphi(\vec{g})$ は Ω のベクトルに作用するとき互いに可換か反可換かである：

$$[\varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{g})]_{\mp}\Omega = [\varphi(\vec{f}), \varphi^*(\vec{g})]_{\mp}\Omega = 0. \tag{3.1.9}$$

記号的には，

$$(x-y)^2 < 0 \text{ に対し，} [\varphi_j(x), \varphi_k(y)]_{\mp} = [\varphi_j(x), \varphi_k^*(y)]_{\mp} = 0. \tag{3.1.10}$$

後に第5章 §3 において，他の要請まで含めると交換関係《−》は Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ の一価表現によって変換されるテンソル型の Bose 場に対応し，反交換関係《+》は同じ群の二価表現によって変換されるスピノル型の Fermi 場に対応するという結論が導かれることを示す（スピンと統計の関係に関する定理）．それまでのあいだ，われわれは証明なしにこの規則に従うことにしよう．

もし演算子 $\varphi(\vec{f})$ が実の f に対し自己共役な拡大をもつと仮定できるならば（それは中性 Bose 場またはスピノル場のエルミート的な一次結合に対してのみ意味をもつ），(3.1.9) の代わりに分解(1.1.48) におけるそれぞれのスペクトル射影が交換することを要求してもよかった．しかし一般に，この種の要請は要請 VI よりもずっと強い（Nelson (1959) を参照)．

厳格な局所可換性をいうここの数学的条件と，比較的大きく空間的に隔たった場についての観測の独立性との関係については，第5章 2.2 節の定理 5.2.3 とその下の注意を参照．

いまの場の量子論の体系を変えようとする（または一般化する）試みは，しばしば，ほかならぬこの局所可換性を否定することから始められる．その理由は，基本的には，この要請が可能な理論の類を著しくせばめ，また数学的記述を本質的に複雑化してしまうところにある．実際，もし，われわれが共変性の条件 (3.1.4) を満足するすべての演算子値一般関数をどうしても見つけたいと思うならば，ある程度まで完全に解かれた数学的問題の一般化にあたる線形問題を扱うはめになることだろう (Gårding (1944), I. M. Gelfand and A. Yaglom (1948), Mackey (1952), Bruhat (1956))．一方，現在までのところ，すべての要請（局所性の要請をも含めて）を満足し，かつトリヴィアルでない散乱行列を

与えるような理論の例は見いだされていない．このようなトリヴィアルでない例の構成は相対論的量子論における公理論的方法の中心課題である．

1.3.　完全性の要請：真空の巡回性と場の既約性

これからは，考察している一つまたは数個の場が状態ベクトル空間において演算子の完全系を構成することを要求しよう．この要請には種々の数学的定式化を与えることができる．ここでは，場の演算子を真空ベクトルに順次に作用させせることによって，空間 $\mathscr{H}$ における一次独立なベクトルの完全系が得られるという直観的描像から出発する定式化を与えよう．そのまえに若干の補助的概念を導入しなければならない．

まず，演算子 $\varphi_j^\alpha(f)$ $(1 \leqslant j \leqslant r_\alpha \equiv \overline{\alpha})$ が実の f に対してエルミートでないとき，表記上の便宜のため $\overline{\alpha}$ 次元の任意の複素ベクトル関数 $\vec{f}$ に対し，

$$\varphi^{-\alpha}(\vec{f}^*) \equiv \varphi^{\alpha *}(\vec{f}) \tag{3.1.11}$$

の左辺のような記号法を約束する．ここに $(\vec{f}^*)_j(x) = \bar{f}_j(x)$．さらに，添え字の組 (α, j) を簡略に記号 τ で表わす：

$$\varphi_j^\alpha(f) \equiv \varphi_\tau(f).$$

［補題 3.1.1］　$\tau_\nu = (i_\nu, \alpha_\nu)$，$1 \leqslant i_\nu \leqslant \overline{\alpha}_\nu$ に応ずる演算子の積

$$\varphi_{\tau 1}(f_1) \cdots \varphi_{\tau_n}(f_n), \qquad f_j(x) \in \mathcal{S}(R_4)$$

は $\mathcal{S}(R_{4n})$ における演算子値一般関数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_\tau(f) &\equiv \varphi_{\tau_1 \cdots \tau_n}(f(x_1, \cdots, x_n)) \\ &= \int \varphi_{\tau_1}(x_1) \cdots \varphi_{\tau_n}(x_n) f(x_1, \cdots, x_n)\, d^4x_1 \cdots d^4x_n\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

を一意的に定義する[1]．特に，

$$\boldsymbol{\varphi}_\tau(f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)) = \varphi_{\tau_1}(f_1) \cdots \varphi_{\tau_n}(f_n).$$

証明． Φ と Ψ を Ω からとった任意のベクトルとして，多重線形汎関数

$$F_\tau(f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n)) = (\Phi, \varphi_{\tau_1}(f_1) \cdots \varphi_{\tau_n}(f_n)\Psi) \tag{3.1.13}$$

を考えよう．この汎関数は変数 f_j の各々について，他を固定したとき線形かつ連続である．

核定理（第1章，1.4節）によれば，この汎関数は一般関数 $F(f) \in \mathcal{S}^*(R_{4n})$ によって相互一意的に定義され，しかも $F(f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n)) = F_\tau(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ となる．そこで，Ω において定義され

---

[1] 以下，添え字の組 $(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ を，まとめて τ で表わすことにする．

$$F(f) = (\Phi, \varphi_\tau(f)\Psi) \tag{3.1.14}$$

を与えるような（一般には非有界な）演算子 $\varphi_\tau(f)$ が存在することを示そう．

そのためには汎関数 $F(f)$ がベクトル Φ と Ψ に依存する様子を調べなければならない．ここでは議論の基本的な筋道のみを示すに止め，証明の細部を完成することは読者にまかせる．

1. f_k を $\mathcal{S}(R_4)$ からとった基礎関数の積の有限個の線形結合

$$f_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant k} c_{k\nu} f_{1\nu_1}(x_1) \cdots f_{n\nu_n}(x_n) \tag{3.1.15}$$

とする．そのとき，(3.1.14) を満足する演算子が存在し，実際

$$\varphi_\tau(f_k) = \sum_{\nu=1}^{k} c_{k\nu} \varphi_{\tau_1}(f_{1\nu_1}) \cdots \varphi_{\tau_n}(f_{n\nu_n})$$

によって与えられる．固定された f_k と $\Psi \in \Omega$ に対し演算 (3.1.14) は Φ の反線形連続関数を定義する：

$$\begin{aligned}
&(\Phi_1 + \Phi_2, \varphi_\tau(f_k)\Psi) = (\Phi_1, \varphi_\tau(f_k)\Psi) + (\Phi_2, \varphi_\tau(f_k)\Psi), \\
&(\lambda\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi) = \bar{\lambda}(\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi), \\
&|(\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi)| \leqslant \| \varphi_\tau(f_k)\Psi \| \cdot \| \Phi \|.
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

2. 線形結合 (3.1.15) の $\mathcal{S}(R_{4n})$ における稠密性は，一般の $f \in \mathcal{S}(R_{4n})$ における汎関数 (3.1.14) の値を

$$F(f) \equiv F(f; \Phi, \Psi) = \lim_{f_k \to f} (\Phi, \varphi_\tau(f_k)\Psi) \tag{3.1.17}$$

の形に表わすことを可能にする．ここで f_k の収束は $\mathcal{S}(R_{4n})$ における位相の意味である．そこで，f が $\mathcal{S}(R_{4n})$ の一般の元である場合について，$\Phi \in \mathcal{H}$ 上の反線形汎関数としての $F(f; \Phi, \Psi)$ の連続性を確かめよう．それには (3.1.16) の不等式で極限移行 $f_k \to f$ を行なう．この極限移行の可能なことは，数列

$$\| \varphi_\tau(f_k)\Psi \|^2 = (\Psi, \varphi_\tau^*(f_k)\, \varphi_\tau(f_k)\Psi)$$

が要請 IV．3) と核定理により収束することからわかる．

3. Riesz の定理（第1章，1.2節）によれば，$\Phi \in \mathcal{H}$ の反線形かつ連続な任意の汎関数 $F(f; \Phi, \Psi)$ は，ある $\Psi_1(f) \in \mathcal{H}$ により

$$F(f; \Phi, \Psi) = (\Phi, \Psi_1(f))$$

と表わされる．明らかに $\Psi_1(f)$ はベクトル Ψ の線形関数であるから，

$$\Psi_1(f) = \varphi_\tau(f)\Psi.$$

こうして補題 3.1.1 が証明された．

場 φ_i^α の〈均らした〉多項式

$$P(\varphi\,;f)=f_0+\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_\nu\leqslant\overline{\alpha_\nu}}\varphi_{i_1\cdots i_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_j}(f_{i_1\cdots i_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_j}(x_1,\cdots,x_j)) \tag{3.1.18}$$

の全体 $\mathfrak{A}$ を考えよう．$\varphi_\tau(f)$ は上の補題によって定義される演算子である．

明らかに，集合 $\mathfrak{A}$ に属する多項式の線形結合も積も再び $\mathfrak{A}$ の元となる．こうした性質をもつ集合を《代数》とよぶ．代数 $\mathfrak{A}$ のすべての元は Ω で定義された一般には有界でない演算子である．

以上を準備として，理論の完全性の条件が次のように定式化される：

VII. Ψ_0 を真空ベクトルとし $P(\varphi\,;f)\in\mathfrak{A}$ とするとき，

$$P(\varphi\,;f)\Psi_0 \tag{3.1.19}$$

という形のベクトルの全体は $\mathscr{H}$ でいたるところ稠密である．

この条件はまた，真空は場の演算子の代数 $\mathfrak{A}$ に関し《巡回》ベクトルであると言い表わしてもよい．

要請 IV.1) に述べた Ω は状態ベクトルの空間としての Gelfand の三つ組のなかで，核型空間の役割を果たしていることに注意せよ．もし，その Ω を (3.1.19) の形のベクトルの全体 Ω_1 と定義したとしても，Ω の核型性の要求が理論に新しい制限を課することにはならない．この定義をとったとき条件 (3.1.1) および (3.1.3) が満足されることは明らかである．要請 VII により，Ω_1 は $\mathscr{H}$ においていたるところ稠密な線形多様体をなす．Ω_1 における 0 への収束を定義しよう．列 $P_\nu(\varphi\,;f)\in\mathfrak{A}$ に応ずるベクトル列 $P_\nu(\varphi\,;f)\Psi_0$ は次の二条件を同時にみたすとき 0 に収束するという：

1. ν に依存しない正数 N が存在して，(3.1.18) 型の多項式 $P_\nu(\varphi\,;f)$ の次数はその N を越えない．すなわち，

$$P_\nu(\varphi\,;f)=P(\varphi\,;f_\nu)=f_0+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_\nu=1}^{\overline{\alpha_\nu}}\varphi_{i_1\cdots i_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_j}\Big[(f_\nu)_{i_1\cdots i_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_j}(x_1,\cdots,x_j)\Big].$$

2. 関数列 $(f_\nu)_i^\alpha$ は $\mathcal{S}(R_{4j})$ での位相に関し 0 に収束する 容易にわかるとおり，空間 Ω_1 はこの位相に関して完備な核型空間となる．このように定義された空間 Ω_1 は，空間 $\mathscr{H}$ の核型空間で上に列挙した条件を満足するもののうちで最小のものである．

場の演算子 $\varphi_\tau(f)$ が完全系をなすという条件のもう一つの定式化は，場の既約性なる概念と関係している．場の演算子 $\varphi(f)$ が《既約な系》を構成するとは，そのすべての φ_τ と弱可換，すなわち，すべての $\tau=(i,\alpha)$，$1\leqslant i\leqslant\overline{\alpha}$，$\Phi$，$\Psi\in\Omega$，$f\in\mathcal{S}(R_4)$ に対し

$$(\varphi_\tau^*(f)\Phi, B\Psi)=(\Phi, B\varphi_\tau(f)\Psi) \tag{3.1.20}$$

となるような有界演算子 B が単位演算子の定数倍に限ることである．これにより理論の

完全性は場 $\varphi_\tau(f)$ の系の既約性として定式化される. すなわち次の定理が成立する(Ruelle (1962) ; Borchers (1962)) :

[定理 3.1.1] 要請 I ～VII (真空の一意性も含めて) をみたす場 $\varphi_\tau(f)$ の系は既約である.

証明. 有界演算子 B がすべての演算子 $\varphi_\tau(f)$ と弱可換であるとする. そうすると B はすべての多項式 $P(\varphi;\boldsymbol{f})\in\mathfrak{A}$ とも弱可換となる. 一般性を失うことなしに $B\Psi_0\neq 0$ と仮定できる. なぜならば $B\Psi_0=0$ とすると $BP(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi_0=0$ となり, これは (3.1.19) 型のベクトルの全体が $\mathcal{H}$ で至るところ稠密であるという要請 VII により $B=0$ を意味するからである. そこで

$$\|B\Psi_0\|=\rho>0,\qquad (\Psi_0,B\Psi_0)=\alpha,\qquad |\alpha|\leqq\rho$$

とおく. VII により任意の $\varepsilon>0$ に対し, (3.1.18) 型の多項式 $P(\varphi;\boldsymbol{f})$ が存在し

$$\|(B-P(\varphi;\boldsymbol{f}))\Psi_0\|<\varepsilon.$$

したがって, Cauchy の不等式より,

$$|(B\Psi_0,B\Psi_0)-(P(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi_0,B\Psi_0)|<\rho\varepsilon.$$

次に $h(p)\in\Theta_M$ をエネルギー運動量演算子 P のスペクトルを含むある近傍で1に等しく, その外では0に等しい関数としよう. より正確には, 次のようにするのである : $h(p)=h_0(p)+h_m(p)$ とおいて, 第一項については $h_0(0)=1$, かつ $p^2\geqslant\frac{1}{2}m^2>0$ (m は演算子 $\sqrt{P^2}$ のスペクトルにおける最小質量, 要請 III. c を参照) なる領域の点を含まない原点のある近傍の外では $h_0(p)=0$, 第二項については $p^0\geqslant\sqrt{(3/4)m^2+\boldsymbol{p}^2}$ に対し $h_m(p)=1, p^0\leqslant\sqrt{(1/2)m^2+\boldsymbol{p}^2}$ に対し $h_m(p)=0$ とする.

運動量演算子のスペクトルの近傍で $h(p)=1$ であるため, スペクトル条件の要請により

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a},1)\frac{1}{(2\pi)^4}\iint e^{ip(a'-a)}h(p)\,U(\underset{\sim}{a'},1)\,d^4a'd^4p$$

$$=U^{-1}(\underset{\sim}{a},1)\frac{1}{(2\pi)^4}\iint e^{ip(a'-a)}U(\underset{\sim}{a'},1)\,d^4a'd^4p=1.$$

この演算子をベクトル $P(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi_0$ に作用させると,

$$P(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi_0=P(\varphi;\boldsymbol{g})\Psi_0$$

が得られる. ここに,

$$g_{\tau_1\cdots\tau_j}(x_1,\cdots,x_j)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int f_{\tau_1\cdots\tau_j}(x_1-\xi,\cdots,x_j-\xi)\,\tilde{h}(\xi)\,d^4\xi$$

であり，$\tilde{h}$ は関数 $h(p)$ の Fourier 変換である．他方，

$$P^*(\varphi\,;\boldsymbol{g})\Psi_0 = (\Psi_0, P^*(\varphi\,;\boldsymbol{g})\Psi_0)\Psi_0.$$

なぜならば，関数 $\bar{g}_\tau(x_1, \cdots, x_j)$ の Fourier 変換は $\bar{\bar{f}}_\tau(-p_1, \cdots, -p_j)\bar{h}(-(p_1+\cdots+p_j))$ に等しく，これは真空に対応する点 $P=0$ を除いて全四元運動量 P のスペクトル上のすべての点で0になるからである．

以上の事実に可換性 (3.1.20) を用いて，

$$\begin{aligned}\rho\varepsilon > |\rho^2-(P(\varphi\,;\boldsymbol{g})\Psi_0, B\Psi_0)| &= |\rho^2-(\Psi_0, BP^*(\varphi\,;\boldsymbol{g})\Psi_0)| \\ &= |\rho^2-\alpha(\Psi_0, P^*(\varphi\,;\boldsymbol{g})\Psi_0)|\end{aligned}$$

を得る．

他方 $\lim_{\varepsilon\to+0}(\Psi_0, P(\varphi\,;\boldsymbol{g})\Psi_0) = \alpha$ だから，結局 $\alpha\bar{\alpha}=\rho^2$. よって，真空は演算子 B の固有値 α に属する固有ベクトルである．そこで再び演算子 B が場と可換であることを用いると，(3.1.19) 型の任意のベクトル Φ に対し $B\Phi=\alpha\Phi$ であることがわかる．

このことから要請 VII により $\mathscr{H}$ 全体において $B=\alpha\mathbf{1}$ となり，定理 3.1.1 が証明された．

真空が場 $\varphi(\vec{f})$ の系に関し巡回的であるとの要請から（他の要請とあわせて）形の上ではより強い命題が導かれることを注意しておこう：——

$\mathcal{O}$ を R_4 における任意の開集合とする．関数 $f(x)$ の台が $\mathcal{O}$ に含まれるような，$\varphi_\tau(\vec{f})$ のすべての多項式がつくる代数を $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ と記せば，次の命題が成り立つ (H. Reeh and S. Schlieder (1961))．

[定理 3.1.2]　もし要請 I～VII がみたされるなら，真空は代数 $\mathfrak{A}$ の全体に関してのみならず，任意の開集合 $\mathcal{O}$ に対する代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ に関しても，巡回ベクトルとなる．

この定理の証明は，ここでは述べない．

完全性の第二の概念，すなわち既約性に関しては，この種の定理は成立しないことを注意しておく．すなわち $\mathcal{O}$ を全空間に一致しない開集合とすると代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ は一般には可約となる．

この理由から，Haag は次のような補足的要請を定式化した．これを Haag and Schroer (1962) に従って《原始因果律》の要請 (primitive causality, 以下では要請 P.C. と略す) とよぶことにする：——

$\mathcal{O}_t=\mathcal{O}_t(\delta)$ を二つの空間的な面ではさまれた幅 2δ の帯状の領域とする．この領域は，適当な Lorentz 系では不等式

$$t-\delta < x_0 < t+\delta$$

で定められる．このとき代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_t)$ は既約である．

要請 P.C. の意味するところは，こうだ：任意に小さい時間間隔 $(t-\delta, t+\delta)$ にわたる全三次元空間での場を知れば，f の台が $\mathcal{O}_t(\delta)$ に属するような場 $\varphi(f)$ の全体はすでに既約だから，理論の内容をすべて再構成することが可能である．もっとも，この要請は，正準 Lagrange 形式を使う際には，はじめから成り立つとしている．このときには場の Heisenberg 演算子が運動方程式をもつので任意の空間的な超平面上における値（Bose 場の場合はその導関数をも含めて）が与えられると全時空における場が再構成されるのである．この意味で要請 P.C. は（局所性の要請 VI とはちがって）非相対論的にも意味をもつような一般的な因果律を表わしている．実は，正準 Lagrange（あるいは Hamilton）形式には第 5 章の Haag の定理にみるとおり数学的な無矛盾性について疑問の余地があるので，それに比べて要請 P.C. がはるかにゆるいことに注目しておかねばならない．実際，要請 P.C. では，正準形式とちがって，定まった時刻における場の存在すら仮定されていない．ここで意味をもたなければならないのは $f(x) \in \mathcal{S}(R_4)$ に対する $\varphi_\tau(f)$ の値だけなのである．

要請 P.C. と要請 I〜VII とは独立である．これは緩減少な重み関数 $\sigma(m^2)$ をもつ一般化された自由場（以下 4.5 節を参照）の例で確かめられる（Haag and Schroer (1962)）．しかし，この要請が一般化された自由場をすべて排除するわけではなく，事実，急減少な重み関数をもつモデルではこの要請はみたされている（Borchers et al. (1963)）．

このことに関連して Haag and Swieca (1965) は，一般化された自由場を排除するが粒子の言葉で場の量子論を解釈することを保障するよりきつい要請を検討している．

以下では要請 P.C. を用いないことにする．

§ 2. Wightman 関数

2.1. 場の演算子の積の真空期待値．相対論的不変性

$\vec{f} \in \mathcal{S}r_\alpha(R_4)$ で均らした場 $\varphi^\alpha(\vec{f})$ が要請 VII の意味で完全系を構成するものとしよう．これまでと同様，演算子 $\varphi^\alpha(\vec{f})$ がエルミートでなければ残りの演算子のうちにはそれにエルミート共役な $\varphi^{-\alpha}$ があるものとする．これは (3.1.11) の記法である．要請 IV によれば，《Wightman 関数》とよばれる真空期待値

$$\begin{aligned} w_\tau &= w_{\tau_1 \cdots \tau_n}(x_1, \cdots, x_n) \\ &\equiv w^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{i_1 \cdots i_n}(x_1, \cdots, x_n) = (\Psi_0, \varphi^{\alpha_1}_{i_1}(x_1) \cdots \varphi^{\alpha_n}_{i_n}(x_n)\Psi_0) \qquad (3.2.1) \\ &\qquad (\tau_j = (\alpha_j, i_j)) \end{aligned}$$

が場の演算子のあらゆる積に対して各変数に関する一般関数として常に存在する．そして，要請 I〜VII が関数 w に対する一定の条件を与える．逆に，これらすべての条件をみたす一般関数 $w_{\tau_1 \cdots \tau_n}$ の系が与えられると，それに応じた場 φ_{τ_j} が存在し関数系 w がこれらの場の積の真空期待値として表わされる，というのが Wightman の基本的結論 (1956) である．つまり，場の量子論の全内容は関数 (3.2.1) の性質を用いていい表わされるというのである：これらの関数を知れば，状態ベクトルの Hilbert 空間とそこでの

Poincaré スピノル群のユニタリ表現，さらに共変な場の演算子を要請 I～VII が全部みたされるように再構成することができる．

この節では要請 I～VII から出る Wightman 関数の性質を導くことにしよう．§3では逆の問題を解く．すなわち，与えられた関数系 w_τ に基づく理論の再構成がいかになされるかを示す．

Schwartz の核定理（第1章，1.4節）により多重線形汎関数

$$w_{\tau_1\cdots\tau_n}(f_1,\cdots,f_n)=(\Psi_0,\varphi_{\tau_1}(f_1)\cdots\varphi_{\tau_n}(f_n)\Psi_0)\qquad(f_j\in\mathcal{S}(R_4))\tag{3.2.2}$$

が $\mathcal{S}(R_{4n})$ における一般関数 w_τ により相互一意的に定義され，後者を記号的に

$$w_{n_\tau}(f)=\int\cdots\int w_{n\tau}(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n)\,d^4x_1\cdots d^4x_n\tag{3.2.3}$$

と書けば汎関数（3.2.2）の値は $f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$ という特殊な場合として得られる．つまり，n 個の一変数関数の上の汎関数（3.2.2）の代わりに一つの n 変数関数の上の汎関数を考察しても同じことなのである．

Wightman 関数に対する相対論的共変性の条件をコンパクトな形で定式化するには，テンソル型の基礎関数の空間 $\mathcal{S}^{\overline{\alpha}_1\cdots\overline{\alpha}_n}(R_{4n})=\mathcal{S}^{\overline{\alpha}}(R_{4n})$ を導入するのが便利である．ただし，$\mathcal{S}^{\overline{\alpha}}(R_{4n})$ は，$\overline{\alpha}_\nu$ を 場 φ^{α_ν} の属する表現の次数として，

$$f_i\equiv f_{i_1\cdots i_n}(x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{S}(R_{4n})\qquad(1\leqslant i_1\leqslant\overline{\alpha}_1,\ \cdots,\ 1\leqslant i_n\leqslant\overline{\alpha}_n)\tag{3.2.4}$$

なる形をしたすべてのテンソル $f=\{f_i\}$ からなる．

関数（3.2.3）はこの空間の上の一般関数として表現される：

$$w^\alpha(f)\equiv\sum_{i_1=1}^{\overline{\alpha}_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{\overline{\alpha}_n}w_i^\alpha(f_i).\tag{3.2.5}$$

ここで，エルミート共役な場の番号づけに関する約束（3.1.11）は一般関数（3.2.5）に対しては，

$$\overline{w^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(f)}=w^{-\alpha_n\cdots-\alpha_1}(f^*)\tag{3.2.6}$$

という条件になることに注意しよう．ただし，

$$(f^*)_{i_1\cdots i_n}(x_1,\cdots,x_n)=\bar{f}_{i_n\cdots i_1}(x_n,\cdots,x_1).\tag{3.2.7}$$

テンソル型の基礎関数の空間 $\mathcal{S}^{\overline{\alpha}}(R_{4n})$ で Poincaré 群の表現を具体化すると，

$$(f_{\{a,\Lambda\}})_i=\sum_{j_1=1}^{\overline{\alpha}_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{\overline{\alpha}_n}V^{\alpha_1}_{j_1i_1}(A^{-1})\cdots V^{\alpha_n}_{j_ni_n}(A^{-1})$$
$$\times f_{j_1\cdots j_n}(\Lambda^{-1}(x_1-a),\cdots,\Lambda^{-1}(x_n-a)).\tag{3.2.8}$$

ここで $\Lambda(A)$ は（2.2.15）で与えられ，$V^{\alpha j}(A)$ は特殊線形変換群の表現行列であって場

$\varphi^{\alpha_j}(\vec{f})$ に応じた $\overline{\alpha}_j$ 次元のものである．表現 $V^{-\alpha_j}(A)$ は表現 $V^{\alpha_j}(A)$ の複素共役になる．

Wightman 関数で表わした相対論的不変性の条件は，(3.2.8) の $\boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}}$ を用いると，

$$w^{\alpha}(\boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}}) = w^{\alpha}(\boldsymbol{f}) \tag{3.2.9}$$

の形になる．

問題 3.2.1 a) 真空の不変性（要請 III.b）と場の共変性（要請 V）を用いて，(3.2.9) を導け．
b) 公式 (3.2.9) は関数 (3.2.1) に対しては記号法的に

$$\sum_{j=1}^{\overline{\alpha}} [V^{\alpha_1}(A)]^{-1}_{i_1 j_1} \cdots [V^{\alpha_n}(A)]^{-1}_{i_n j_n} w^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{j_1 \cdots j_n}(\Lambda x_1+a, \cdots, \Lambda x_n+a)$$

$$= w^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{i_1 \cdots i_n}(x_1, \cdots, x_n) \tag{3.2.10}$$

と書かれることを示せ（問題 3.1.1 参照）．

一つのエルミートなスカラー場 $\varphi(x)$ の理論という特殊な場合には公式 (3.2.10) は次の形をとる：

$$w_n(x_1, \cdots, x_n) \equiv (\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Psi_0)$$

$$= w_n(\Lambda x_1+a, \cdots, \Lambda x_n+a). \tag{3.2.11}$$

もし等式 (3.2.10) を Poincaré 群の部分群である並進 $\{a, 1\}$ に対し用いるならば，関数 w_i^{α} の並進不変性が得られる：

$$w_i^{\alpha}(x_1+a, \cdots, x_n+a) = w_i^{\alpha}(x_1, \cdots, x_n). \tag{3.2.12}$$

従って，Wightman 関数はベクトル x の $n-1$ 個の独立な差

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \cdots, \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n \tag{3.2.13}$$

のみに依存する：

$$w_i^{\alpha}(x_1, \cdots, x_n) = F_i^{\alpha}(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}). \tag{3.2.14}$$

汎関数の形では，この等式は，

$$w^{\alpha}(\boldsymbol{f}) = F^{\alpha}(\boldsymbol{g}) \tag{3.2.15}$$

と書かれる．ここに，

$$g_{i_1, \cdots, i_n}(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) = \frac{1}{n}\int f_{i_1, \cdots, i_n}(x_1, \cdots, x_n)\, d(x_1 + \cdots + x_n). \tag{3.2.16}$$

問題 3.2.2 a) (3.2.12) ～ (3.2.14) および (3.2.16) を用いて実際に

$$\int \cdots \int w_i^{\alpha}(x_1, \cdots, x_n) f_i(x_1, \cdots, x_n) d^4x_1 \cdots d^4x_n$$

$$= \int \cdots \int F_i^{\alpha}(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) gi(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) d^4\xi_1 \cdots d^4\xi_{n-1}$$

であることを示せ.

b) テンソル型の一般関数 F^{α} の同次変換 $\{0, A\}$ に対する変換則を汎関数の形および記号的な（座標系を用いた）形で求めよ.

以下の議論に次の定理が有用となるであろう：——

[Wightman 関数の一価性に関する定理] もし真空期待値 (3.2.1) の中のスピノル場の数が奇数ならば，この期待値は恒等的に 0 に等しい[1].

証明. ベクトル

$$\Phi = \varphi_{\tau_1}(f_1) \cdots \varphi_{\tau_n}(f_n) \Psi_0$$

に含まれるスピノル場が奇数個ならば，このベクトルに対し，

$$U(0, -\mathbf{1}) \Phi = -\Phi.$$

一方，真空の不変性より

$$U(0, -\mathbf{1}) \Psi_0 = \Psi_0.$$

かくして，ベクトル Φ と Ψ_0 はユニタリ演算子 $U(0, -\mathbf{1})$ の異なる固有値に対応する固有ベクトルである．従ってこれらは直交していて

$$w_{\tau_1 \cdots \tau_n}(f_1, \cdots, f_n) = (\Psi_0, \Phi) = 0.$$

よって定理は証明された.

2.2. スペクトル，局所性および計量の正定値性に関する要請からの帰結

スペクトル条件がいかなる結論に導くかを次に考察しよう．それは $\mathcal{S}^*(R_{4n})$ に属する一般関数（第1章3.1節）である $F_\tau \equiv F_i^{\alpha}$ の Fourier 変換を用いて定式化するのが最も簡単である.

[定理 3.2.1] スペクトル条件の弱い形である要請 Ⅲ. a は一般関数 (3.2.14) の Fourier 変換 $\widetilde{F}_\tau$ の台に対し次の条件を課する：

$$\widetilde{F}_{n\tau}(p_1, \cdots, p_{n-1}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}} \int \cdots \int \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n-1} p_j \xi_j \right\}$$

---

[1] 変換則 (3.2.10) を用いれば，Wightman 関数が一価となるのは，その中のスピノル場の数が奇数ならば 0 となるときに限るということが容易に結論される．実際，群 $\mathcal{P}_0$ の変換 $\underset{\sim}{a} = 0$, $A = -\mathbf{1}$ を考えると，スピノル場は，定義（1.1節参照）により符号を変える：

$$U(0, -\mathbf{1}) \varphi_\tau(f) U^{-1}(0, -\mathbf{1}) = -\varphi_\tau(f).$$

しかし，テンソル場は変わらないから，もし真空期待値が奇数個のスピノル場を含むならば，それは自身にマイナスをつけたものに変わることになる．このことは，それが 0 となるときにのみ Wightman 関数の一価性と両立する．これが定理の名前の意味である.

$$\times F_{n\tau}(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) d^4\xi_1 \cdots d^4\xi_{n-1},$$

$$\operatorname{supp} \widetilde{F}_{n\tau}(p_1, \cdots, p_{n-1}) \subset \{p_1 \in \overline{V^+}, \cdots, p_{n-1} \in \overline{V^+}\}. \qquad (3.2.17)$$

証明. 要請 III. a によれば，任意のベクトル $\Psi \in \mathcal{H}$ に対し

$$p \notin \overline{V^+} \quad ならば \quad \int d^4 a e^{iap} U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\Psi = 0 \qquad (3.2.18)$$

が成り立つ．これは，Ψ を物理状態 $\Psi(p', \zeta)$ の完全系に展開し，その上で平行移動の演算子 $U(-\underset{\sim}{a}, 1) = U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)$ が

$$U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\, \Psi(p', \zeta) = e^{+ip'a}\Psi(p', \zeta) \qquad (3.2.19)$$

のように作用することを考慮すれば確かめられる．他方，

$$F_{n\tau}(\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \cdots, \xi_{n-1})$$
$$= w_\tau(x_1, \cdots, x_j, x_{j+1} - a, \cdots, x_n - a)$$

であるから，変数 ξ_j についての F_τ の Fourier 変換は，

$$\int F_{n\tau}(\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \cdots, \xi_{n-1}) e^{ip_j a} d^4 a$$
$$= (\Psi_0, \varphi_{\tau_1}(x_1) \cdots \varphi_{\tau_j}(x_j) \int e^{ip_j a} d^4 a\, \varphi_{\tau_{j+1}}(x_{j+1} - a) \cdots \varphi_{\tau_n}(x_n - a)\Psi_0)$$
$$= (\Psi_0, \varphi_{\tau_1}(x_1) \cdots \varphi_{\tau_j}(x_j) \int e^{ip_j a} d^4 a U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\, \varphi_{\tau_{j+1}}(x_{j+1}) \cdots \varphi_{\tau_n}(x_n)\Psi_0)$$

のように計算されるので，条件 (3.2.18) をベクトル

$$\Psi = \varphi_{\tau_{j+1}}(f_{j+1}) \cdots \varphi_{\tau_n}(f_n)\Psi_0$$

に適用して，求める結果を得る．

スペクトルに関するより強い条件 III. a～III. c を要請するならば，(3.2.17) より詳しい結果が得られる．すなわち，関数 $\widetilde{F}_{n\tau}(p_1, \cdots, p_{n-1})$ は変数の各々がエネルギー運動量の演算子 P のスペクトルに属するときのみ 0 でないことになるのである．

関数 $w_{n\tau}$ の Fourier 変換 $\tilde{w}_\tau(k_1, \cdots, k_n)$ は次の式により $\widetilde{F}_{n\tau}(p_1, \cdots, p_{n-1})$ に関係づけられることに注意する：

$$\tilde{w}_{n\tau}(k_1, \cdots, k_n) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \cdots \int e^{\,i\sum_{j=1}^{n} k_j x_j} w_{n\tau}(x_1, \cdots, x_n)\, d^4 x_1 \cdots d^4 x_n$$
$$= (2\pi)^2 \delta(k_1 + \cdots + k_n) \widetilde{F}_\tau(p_1, \cdots, p_{n-1}). \qquad (3.2.20)$$

ここで，

$$p_1 = k_1, \quad p_2 = k_1 + k_2, \ \cdot \cdot \cdot, p_{n-1} = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}. \qquad (3.2.21)$$

(3.2.20) と (3.2.21) から，スペクトル条件は次の汎関数の形に書かれることがわかる．すなわち，Fourier 変換 $\tilde{f}(k_1, \cdots, k_n)$ が $k_1 \in \overline{V^+}, \cdots, k_1 + \cdots + k_{n-1} \in \overline{V^+}$, $k_1 + \cdots + k_n = 0$ なる集合の近傍で 0 に等しいような任意の基礎関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対して

は，$w_{n\tau}(f)=0$ である．

スペクトル条件からの重要な帰結は次の定理の内容にまとめられる．

[定理 3.2.2]　一般関数 $F_{n\tau}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$ は，管状領域 $T^-=R_4-\mathrm{i}V^+$ の積領域 T_{n-1}^- で（すなわち $\xi_j\in R_4$, $\eta_j\in V^+$ なる $\zeta_j=\xi_j-\mathrm{i}\eta_j$ $(j=1,\cdots,n-1)$ に対し）正則な解析関数 $F_{n\tau}(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})$ の極限値である．

この定理の証明は，遅延型関数の Laplace 変換 $f_r(k)$ が未来域にある管状領域 T^+ で解析的だという定理の証明と完全に同じものである（第1章の付録を参照）．定理 3.2.2 で未来域の管状領域が過去のそれ (T_n^-) で置き換えられているのは，定理 1.A.1 では Fourier 変換を扱ったのに対し，この定理では Fourier 逆変換が問題になっていることによる．

《局所性の条件》から，関数 w_i^α の中の隣り合う変数が互いに空間的に隔たっているとき，これらの変数の置換に関する対称性または反対称性が導かれる．すなわち $(x_j-x_{j+1})^2<0$ に対し

$$
\begin{aligned}
&w_{\tau_1\cdots\tau_j\tau_{j+1}\cdots\tau_n}(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)\\
&\qquad=\sigma w_{\tau_1\cdots\tau_{j+1}\tau_j\cdots\tau_n}(x_1,\cdots,x_{j+1},x_j,\ \cdots,\ x_n).
\end{aligned}
\tag{3.2.22}
$$

ただし，変数が互いに空間的位置にある場 φ_{τ_j} と $\varphi_{\tau_{j+1}}$ が可換であるか反可換であるかにより σ は $+1$ または -1 である．

汎関数の形では局所可換性の条件は (3.1.9) によって，

$$
\begin{aligned}
&w^{\alpha_1\cdots\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_n}(\vec{f}_1,\cdots,\vec{f}_j,\vec{f}_{j+1},\cdots,\vec{f}_n)\\
&\qquad=\sigma w^{\alpha_1\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j\cdots\alpha_n}(\vec{f}_1,\cdots,\vec{f}_{j+1},\vec{f}_j,\cdots,\vec{f}_n)
\end{aligned}
$$

となる．ここでもベクトル関数 $\vec{f}_j(x)$ と $\vec{f}_{j+1}(x)$ の台は空間的な距離だけ隔っているものとする．

状態ベクトル空間 $\mathscr{H}$ における《計量の正定値性の条件》からは，いろいろ異なった個数の変数をもつ Wightman 関数の組に関わる不等式系が導かれる：——

場の演算子の (3.1.18) の形をした任意の多項式に対し，計量の正定値性は，

$$0\leqslant\|P(\varphi\,;f)\Psi_0\|^2=(\Psi_0,[P(\varphi\,;f)]^*P(\varphi\,;f)\Psi_0)$$

を意味する．ところが (3.1.11) と (3.1.18) により，

$$[P(\varphi\,;f)]^*=\bar{f}_0+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{\overline{\alpha_1}}\cdots\sum_{i_j=1}^{\overline{\alpha_j}}\varphi^{-\alpha_j\cdots-\alpha_1}_{i_j\cdots i_1}(\bar{f}_{i_1\cdots i_j})$$

だから，

$$\sum_{k,l=0}^{n}\sum_{ij}\int\cdots\int w^{-\alpha_k\cdots-\alpha_1\,\alpha_1\cdots\alpha_l}_{\;i_k\cdots\;i_1\;j_1\cdots j_l}(x_k,\cdots,x_1,y_1,\cdots,y_l)$$
$$\times\bar{f}_{i_1\cdots i_k}(x_1,\cdots,x_k)f_{j_1\cdots j_l}(y_1,\cdots,y_l)\,d^4x_1\cdots d^4x_k$$
$$\times d^4y_1\cdots d^4y_l\geqslant 0 \qquad (3.2.23)$$

を得る．特に，$f_0=f_{i_1i_2}(x_1,x_2)=\cdots=f_{i_1\cdots i_n}=0$ とおけば，(3.2.13) より

$$\sum_{i,j=1}^{\overbrace{\alpha}}\iint F^{-\alpha_i,\alpha}_{i,j}(x-y)\bar{f}_i(x)f_j(y)\,d^4x d^4y\geqslant 0 \qquad (3.2.24)$$

となる．任意に選んだ $f_j\in\mathcal{S}(R_4)$ に対し (3.2.24) がみたされるための必要かつ十分な条件は，一般関数 $F^{-\alpha_i,\alpha}_{i,j}(\xi)$ の Fourier 変換からつくられる行列 $\tilde{F}^{-\alpha,\alpha}(p)$ が正定値なことである．実際，Fourier 変換を行なえば，不等式 (3.2.24) は，

$$\sum_{i,j=0}^{\overbrace{\alpha}}\int\tilde{F}^{-\alpha_i,\alpha}_{i,j}(p)\bar{\tilde{f}}_i(p)\tilde{f}_j(p)\,d^4p\geqslant 0 \qquad (3.2.25)$$

の形をとるので，関数 $\tilde{f}_i(p)$ が任意であったことから上記の命題が導かれる[1]．

Lorentz 不変性とスペクトル条件を (3.2.25) と同時に用いるなら，二点 Wightman 関数 w_2 に対する簡単な積分表示が得られる：——

簡単のためエルミートなスカラー場の場合を考えよう．このとき $\tilde{F}_2(p)$ は負でない Lorentz 不変な一般関数であり，その台はスペクトル条件（定理 3.2.1）により未来光円錐に集中している．このような関数の一般形は，第1章 3.5 節により

$$\tilde{F}_2(p)=a\delta(p)+\theta(p^0)\int_0^\infty\delta(p^2-\lambda)\,d\sigma(\lambda) \qquad (3.2.26)$$

である．ただし $a\geqslant 0$ で，$\sigma(\lambda)$ は λ の任意のベキより速くは増加しない単調非減少関数とする（一般のテンソル場の場合には，運動量 p の成分の多項式で表わされ $p\in V_+$ に対し正定値な行列 $B_{ij}(p)$ を (3.2.26) に乗ずることが必要となる（第5章参照））．

なお，スペクトルに関して強い形の要請 III.c（すなわち，正の最小質量 μ の存在）をおけば (3.2.26) における積分の下限は正となる．定数 a が場 $\varphi(x)$ の真空期待値 w_1 を用いて $a=(2\pi w_1)^2$ と表わされることも見やすい．

積分表示 (3.2.26) は二点 Wightman 関数に対する《Källén=Lehmann 表示》とよばれる（後に示す公式 (3.4.96) を参照）．

このように二点関数の場合には正定値性の条件 (3.2.23) が具合よく働く．さらに，(3.2.23) で $f_0=f_{i_1}(x_1)=f_{i_1i_2i_3}(x_1,x_2,x_3)=\cdots=0$ とおくと，もう一つの簡単な結

---

[1] この命題は Bochner=Schwartz の定理の内容を構成する（たとえば [13] 参照）．

果が得られる．一つのエルミートなスカラー場のみという特別な場合なら，

$$\iiint \bar{f}(x_2, x_1) f(x_3, x_4) F_4(x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_4) \prod_{i=1}^{4} d^4x_i \geqslant 0 \qquad (3.2.27)$$

がそれである．この不等式をみたす一般関数 F_4 の類を明らかにすることは，現在なお解決されていない数学上の問題である（これは Wightman によって提出された (1956)）．

上に列挙した Wightman 関数の性質は，相対論的不変性，スペクトル条件，局所性および計量の正定値性に加えて規格化条件，

$$w_0 \equiv (\Psi_0, \Psi_0) = 1$$

を要請して得た帰結であるが，Wightman 関数のこれらの性質によって関数列

$$W \equiv \{w_0, w_{\tau_1}(x_1), w_{\tau_1\tau_2}(x_1, x_2), \cdots\}$$

の空間に一つの凸集合が定まる：——

実際，容易に確かめられるとおり，$W^{(1)}$ と $W^{(2)}$ を上記のすべての条件をみたす二つの Wightman 関数の列とし，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ とすれば，関数列 $\alpha W^{(1)}+(1-\alpha)W^{(2)}$ がまたそれらの条件を満足する．それゆえに，上記の諸条件は Wightman 関数の線形的な性質の規定といえる．ただし，線形条件とはいっても，正定値性の条件だけは変数の個数が異なる関数 w を互いに結びつけていることに注意しよう．

2.3. 真空の一意性の条件．漸近的クラスター分解

変数 p_j のうちたとえ一つでもエネルギー・運動量演算子 P のスペクトルに属さないなら関数 $\tilde{F}^a(p_1, \cdots, p_{n-1})$ は0になる（定理3.2.1）という条件だけでは，スペクトルに関する強い形の要請 Ⅲ.a～Ⅲ.c の内容を完全にはいいつくしていない．上の条件には，真空が一意的に定まる（いいかえれば，エネルギー0の状態は縮退していない）という条件がはいっていないからである．これを要求すると，Wightman 関数に対して非線形な制限を与えることになる．特に，次の式が導かれる：

$$\lim_{\rho\to\infty} w_{\tau_1\cdots\tau_n}(x_1, \cdots, x_j, x_{j+1}+\rho a, \cdots, x_n+\rho a)$$
$$= w_{\tau_1\cdots\tau_j}(x_1, \cdots, x_j)\, w_{\tau_{j+1}\cdots\tau_n}(x_{j+1}, \cdots, x_n). \qquad (3.2.28)$$

ここで，a は任意の空間的なベクトルである．また，極限は一般関数の空間 $\mathcal{S}^*(R_{4n})$ での収束で定義する（すなわち，上の等式 (3.2.28) は，極限をとる前の両辺に基礎関数 $f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{S}(R_{4n})$ をかけて積分してから $\rho \to \infty$ の極限をとった結果が互いに等しくなると読むのである）．

等式 (3.2.28) は簡単な物理的意味をもっている．それは，粒子の二つのクラスター

$(1, \cdots, j)$, $(j+1, \cdots, n)$ のあいだの距離が非常に大きくなれば互いの相互作用が消えるということにほかならない．この性質を，《クラスター分解性》という．

この条件 (3.2.28) は，もっと一般的な命題からの帰結として得られる．これから，それを定式化しよう．

まずはじめに《実質真空期待値 $w^T_{n\tau}$》という便利な概念を導入する．それは，Wightman 関数から真空が中間状態になるものの寄与を引き去った残りとして定義される．実質 Wightman 関数に対しては，スペクトルに関する要請の全体をもっと簡単な形で表わすことができる．

自然数の列 $1, \cdots, n$ を，互いに交わらず空でない k 個の部分集合 $I_1, \cdots, I_k$ に分割する仕方の全体を ρ_k とする．なお，各部分集合 I_j において，自然数 $(i_{j1}, \cdots, i_{j\beta_j})$ は小さい順 $(i_{j1} < i_{j2} < \cdots)$ に並べるものとしよう．各分割にはそれぞれ一つの置換 $\pi = \pi(\{I_k\})$: $\{(1, \cdots, n) \to (i_{11} \cdots i_{1\beta_1}, i_{21} \cdots i_{2\beta_2}, \cdots, i_{k1} \cdots i_{k\beta_k})\}$ が対応している．ただし，$\{i_{j1}, \cdots, i_{j\beta_j}\} = I_j$, $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = n$ である．実質真空期待値 $w^T_{n\tau}$ は次のような漸化式で定義される：

$$w_{n\tau}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{I_j\} \in \rho_k} \sigma(\pi) \prod_{j=1}^{k} w^T_{\beta_j \tau_j}(x_{i_{j1}}, \cdots, x_{i_{j\beta_j}}). \qquad (3.2.29)$$

ただし，分割 $\{I_j\}$ に対応する置換 π が，スピノル場(反交換関係に従う場) の偶数回の互換を起こすならば $\sigma(\pi) = +1$ とし，奇数回ならば $\sigma(\pi) = -1$ とする．なお $w^T_0 = w_0 = 1$ と定義するのである．(3.2.14) と同様に関数 $F^T_{n\tau}(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) = w^T_{n\tau}(x_1, \cdots, x_n)$ を考えることができる．

いま，最も簡単な例として，中性スカラー場で真空期待値が 0

$$w_1(x) = (\Psi_0, \varphi(x)\Psi_0) = 0 \qquad (3.2.30)$$

となるものを考えて説明しよう (並進不変性により $w_1(x) = w_1(0) = \text{const.}$ となるから，場 $\varphi(x)$ から適当な定数を引き去ることで常に (3.2.30) のようにできることを注意しておく)．この場合には定義 (3.2.29) によって $w^T_{n\tau}$ は次のようになる：

$$w_1 = w^T_1 = 0,$$

$$w_2(x_1, x_2) = w^T_2(x_1, x_2),$$

$$w_3(x_1, x_2, x_3) = w^T_3(x_1, x_2, x_3),$$

$$\begin{aligned} w^T_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= w_4(x_1, x_2, x_3, x_4) - w_2(x_1, x_2) w_2(x_3, x_4) \\ &\quad - w_2(x_1, x_3) w_2(x_2, x_4) - w_2(x_1, x_4) w_2(x_2, x_3), \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots.$$

ラグランジアンから出発する摂動論では，実質期待値は連結した Feynman ダイヤグラムの和で与えられる．

問題 3.2.3　関数 $F^T_{n\tau}$ の Fourier 変換 $\tilde{F}^T_{n\tau}(p_1, \cdots, p_{n-1})$ は，変数 p_j のうち集合 G^+_m に含まれないものが一つでもあれば0になることを示せ．ただし，G^+_m は質量双曲面の上半分 V^+_m で囲まれる領域

$$G^+_m = \{p,\ p^0 \geqslant \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\}$$

とする．m はスペクトル条件にいう最小の正の質量である．

実質期待値という概念は，次のように一般化される：——

補題 3.1.1 の (3.1.12) に従えば，積

$$\boldsymbol{\varphi}_{n\tau}(\vec{x}) = \varphi_{\tau_1}(x_1) \cdots \varphi_{\tau_n}(x_n) \tag{3.2.31}$$

は演算子を値にもつ $\mathcal{S}(R_{4n})$ 上の一般関数として定義される．次に，この一般関数の並進 $\boldsymbol{\varphi}_{n\tau}(\vec{x}+a)$ を

$$\boldsymbol{\varphi}_{n\tau}(\vec{x}+a) = U(\underset{\sim}{a}, \mathbf{1})\, \boldsymbol{\varphi}_{n\tau}(\vec{x})\, U^{-1}(\underset{\sim}{a}, \mathbf{1}) \tag{3.2.32}$$

によって定義しておく．

演算子 $\boldsymbol{\varphi}_{n\tau}$ は，スピノル場（反交換関係に従う場）を偶数個含むか奇数個含むかに従って，Bose 演算子，あるいは Fermi 演算子とよぶことにしよう．〈場のクラスター〉 $\boldsymbol{\varphi}_{i\tau}(\vec{x}_i)$ に対して真空期待値

$$(\Psi_0, \boldsymbol{\varphi}_{i_1\tau_1}(\vec{x}) \cdots \boldsymbol{\varphi}_{i_n\tau_n}(\vec{x}_{i_n})\Psi_0)$$

を定義することができる．これに対しても，w から w^T を定義したのと同様の漸化式によって，実質期待値

$$(\Psi_0, \boldsymbol{\varphi}_{i_1\tau_1}(\vec{x}_{i_1}) \cdots \boldsymbol{\varphi}_{i_n\tau_n}(\vec{x}_{i_n})\Psi_0)^T$$

が定義される．ここで $\vec{\boldsymbol{x}}_{ij}$ は i_j 個の四元ベクトルの組 $(x_{i_j1}, \cdots, x_{i_ji_j})$ を表わす．

実質期待値の基礎的な性質を定式化するために，関数

$$F^u_{n\tau}(a) = \int (\Psi_0, \boldsymbol{\varphi}_{i_1}(\vec{x}_{i_1}+a_1) \cdots \boldsymbol{\varphi}_{i_n}(\vec{x}_{i_n}+a_n)\Psi_0)^T \times u(\vec{x}_{i_1}, \cdots, \vec{x}_{i_n})\, d^{4i_1}\vec{x}_{i_1} \cdots d^{4i_n}\vec{x}_{i_n} \tag{3.2.33}$$

を導入しよう．ただし，$u \in \mathcal{S}(R_{4n})$ とし $a_j = (a^0_j, \boldsymbol{a}_j)$ とする．並進不変性により $F^u_{n\tau}(a)$ は $n-1$ 個の独立な変位ベクトル a_j のみの関数である．次の定理が成立する (Ruelle (1962))：——

[定理 3.2.3]　$a^0_j = 0$ での関数 $F^u_{n\tau}(a)$ の値および a^0_j に関する微分係数は（いずれも $n-1$ 個の独立なベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の差の関数であるが）基礎関数の空間

$\mathcal{S}(R_{3(n-1)})$ に属する．つまり，それらは無限回微分可能で，$\sum_{j=1}^{n-1}(\boldsymbol{a}_j-\boldsymbol{a}_{j+1})^2$ が増すとき，その任意の負のベキより速く減少する．

特にスカラー場の二つのクラスター

$$\boldsymbol{\varphi}_j(\vec{\boldsymbol{x}}_j) = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j), \qquad \boldsymbol{\varphi}_{n-j}(\vec{\boldsymbol{x}}_{n-j}) = \varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)$$

が存在する場合，定理 3.2.3 によって関係 (3.2.28) は次のように精密化される．すなわち，任意の $l \geqslant 0$ および $a^2<0$ に対して，

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to\infty}\rho^l\int &\{(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\varphi(x_{j+1}+\rho a)\cdots\varphi(x_n+\rho a)\Psi_0)\\ &-(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\Psi_0)(\Psi_0,\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\Psi_0)\}\\ &\times \boldsymbol{u}(x_1,\cdots,x_n)\,d^4x_1\cdots d^4x_n = 0.\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

関数 $F^{u}_{n\tau}(a)$ の急減少なことが定理 3.2.3 の要点であることに注意しよう．無限回微分可能性のほうは明らかである．また関数 (3.2.33) の導関数は再び同じ形の関数になるから，任意の $\boldsymbol{u}$ について $F^{u}_{n\tau}(a)$ が急減少であることを証明すれば，導関数についても急減少を証明したことになる．

技術的な細部をさけて，証明の筋道を追うために，ここでは (3.2.34) という特別な場合に限って定理 3.2.3 証明をすることにしよう．一般の場合について完全な証明を行なうことは，読者におまかせする (Ruelleの原論文，または Wightman の講義 (1962) を参照)．

次の記号を導入しよう：

$$\begin{aligned}(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\Psi_0)&-(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\Psi_0)(\Psi,\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\Psi_0)\\ &= T(\xi,\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\cdots,\xi_{n-1})\\ &\equiv T(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}}),\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

ただし，

$$\xi_i = x_i-x_{i+1},\ \ \xi = x_1-x_{j+1},\ \ \vec{\boldsymbol{\xi}} = (\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\cdots,\xi_{n-1}). \tag{3.2.36}$$

Fourier 変換に移って考えると，(3.2.34) の左辺の積分は，

$$\begin{aligned}F_u(a) &= \int\cdots\int T(\xi-a,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,u_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}\,d\xi\\ &= \int\cdots\int \widetilde{T}(p,\vec{\boldsymbol{p}})\,\tilde{u}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})\,e^{ipa}\,d\vec{\boldsymbol{p}}\,dp\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

と書ける．ただし，

$$d\vec{\boldsymbol{p}} = d^4p_1\cdots d^4p_{j-1}d^4p_{j+1}\cdots d^4p_{n-1},$$

$$u_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}}) = \int u(x_1,\cdots,x_n)\,d^4x_n,$$

$$\widetilde{T}(p,\vec{\boldsymbol{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n-2}}\int \exp\Big\{i\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}p_k\xi_k+ip\xi\Big\}\,T(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}\,d\xi, \tag{3.2.38}$$

$$\tilde{u}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})=\frac{1}{(2\pi)^{2n-2}}\int\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{k\neq j}p_k\xi_k-\mathrm{i}p\xi\right\}u_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\ d\vec{\boldsymbol{\xi}}d\xi.$$

問題　3.2.4　関数 $F_u(a)$ (3.2.37) は積因子の空間 Θ_M に属すること，すなわち，$F_u(a)$ が無限回微分可能で，a の多項式でおさえられることを示せ（ヒント：T は，ある多項式でおさえられる連続関数の導関数になっており，一方 $u_1\in\mathcal{S}(R_{4(n-1)})$ である．(3.2.37) の最初の等式で積分変数の変換 $\xi'=\xi-a$ を行なえ)．

スペクトル条件から，p が $\overline{G}_m^+$ に含まれなければ，一般関数 $\widetilde{T}(p,\vec{\boldsymbol{p}})$ は 0 になる（問題 3.2.3 を参照せよ)．従って，$h(p)$ を

$$h(p)=\begin{cases}1 & (\overline{G}_m^+ \text{ のある近傍で})\\ 0 & (p\notin V^+ \text{ に対して})\end{cases}\tag{3.2.39}$$

という性質をもつ $\mathcal{S}$ の積因子関数とし，さらに

$$\tilde{v}(p,\vec{\boldsymbol{p}})=h(p)\tilde{u}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})$$

とすると，

$$F_v(a)=F_u(a).\tag{3.2.40}$$

いま，次のような関数を考えてみよう：

$$\begin{aligned}T_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})&=(\Psi_0,\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\Psi_0)\\&\quad-(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\Psi_0)(\Psi_0,\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\Psi_0),\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

および，

$$\begin{aligned}F_u^1(a)&=\int\cdots\int T_1(\xi-a,\vec{\boldsymbol{\xi}})u_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}d\xi\\&=\int\cdots\int\widetilde{T}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})\tilde{u}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})\,e^{\mathrm{i}pa}d\vec{\boldsymbol{p}}dp.\end{aligned}\tag{3.2.42}$$

ただし，ξ は前のように (3.2.36) によって x で表わされ，$u_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})$ は定義式 (3.2.38) を用いて $u(x_1,\cdots,x_n)$ から計算される．

スペクトル条件から，$p\notin\overline{G}_m^-$.すなわち $p^0>-\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ ならば $\widetilde{T}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})=0$ である．ゆえに，もし無限回微分可能な関数 $h(p)$ が (3.2.39) をみたすならば，$h(p)\widetilde{T}_1(p,\vec{\boldsymbol{p}})=0$ となり，従って，$\tilde{v}=h(p)\tilde{u}_1$ とおけば，

$$F_v^1(a)=0\tag{3.2.43}$$

を得る．

式 (3.2.40) と (3.2.43) から，

$$F_u(a)=F_v(a)=F_v(a)-F_v^1(a).\tag{3.2.44}$$

さて，(3.2.44) の右辺なる関数の差が，任意に選んだ基礎関数 v に対して，空間的なベクトル $a=(0,\boldsymbol{a})$ につき急減少関数になることを証明しよう．すなわち，任意の $l\geqslant 0$ について，

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^l\,[F_v(\rho a)-F_v^1(\rho a)]=0\tag{3.2.45}$$

を証明する．なお，収束は半径 1 の三次元球面上

$$\boldsymbol{a}^2=-a^2=1\tag{3.2.46}$$

のベクトル a について一様である．

等式 (3.2.44) を使うと (3.2.45) から (3.2.34) が導かれる．まさしくそのことによって，考えている特別な場合には，定理 3.2.3 の証明は (3.2.45) の証明に帰着されるわけである．

第1章1.3節によれば，$\mathcal{S}^*(R_{4n})$ に含まれる任意の一般関数は，ある多項式でおさえられる連続関数の偏導関数（十分に高階の）として表わされるというのであった．それゆえに，

$$T(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})-T_1(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}}) = Dg(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}}) \tag{3.2.47}$$

と書いてよい．ただし，D は微分演算子の単項式

$$D=\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial\xi_0^{\beta_0}\cdots\partial\xi_{n-1\,3}^{\beta_{n-1\,3}}}$$

を表わす．そこで，$D^*=(-1)^{|\beta|}D$ とおくと，

$$F_v(\rho a)-F_v^1(\rho a)=\int g(\xi-\rho a,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,D^*v(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,d\xi\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}. \tag{3.2.48}$$

さらに $\mathcal{S}(R_{4(n-1)})$ における単位の分解（第1章2.1節を参照）$e_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})$ で $\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|\geqslant\nu+1$ あるいは $\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|\leqslant\nu-1$ ならば，$e_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})=0$ となるものを考える．ただし，

$$\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|^2\equiv\sum_{\alpha=0}^{3}\left[(\xi^\alpha)^2+\sum_{i\neq j}(\xi_i^\alpha)^2\right]=\|\xi\|^2+\|\vec{\boldsymbol{\xi}}\|^2. \tag{3.2.49}$$

そうすると，

$$F_v(\rho a)-F_v^1(\rho a)=\sum_{\nu\geqslant\rho\lambda-1}\int g(\xi-\rho a,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,v_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\,d\xi\,d\vec{\boldsymbol{\xi}} \tag{3.2.50}$$

と書いてよいことになるのである．ここに，

$$\lambda=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{n}},\quad v_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})=e_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})D^*v(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}}). \tag{3.2.51}$$

和の下限を $\rho\lambda-1$ としてよいことは次のようにしてわかる：局所可換性によれば，ベクトル $x_1,\cdots,x_j$ がどれも $x_{j+1}+\rho a,\cdots,x_n+\rho a$ と互いに空間的な位置にあるなら $T(\xi+\rho a,\vec{\boldsymbol{\xi}})=T_1(\xi+\rho a,\vec{\boldsymbol{\xi}})$ である．この条件は

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\\ j\leqslant k\leqslant n}}(x_i-x_k-\rho a)^2<0$$

ならば，もちろん成り立っている．しかるに，

$$x_i-x_k=-\xi_1+\cdots-\xi_{i-1}+\xi_{j+1}+\cdots+\xi_{k-1}+\xi$$

であるから，

$$(x_i-x_k-\rho a)^2\leqslant n\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|^2+2\rho\sqrt{n}\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|-\rho^2.$$

従って，(3.2.47) の $g(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})$ は次のように選ぶことができる：

$$\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|<\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{2}-1)\rho \text{ に対しては，} g(\xi-\rho a,\vec{\boldsymbol{\xi}})=0 \tag{3.2.52}$$

（定理3.2.3の証明で，場 φ の局所可換性を使うのは，ここだけである）．

一方，作り方からわかるように，$\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|>\nu+1$ では $v_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})=0$ である．従って積分 (3.2.50) に現われる積 gv_ν は，$\lambda\rho\leqslant\nu+1$ のときだけ0と異なる．こうして (3.2.50) における ν の下限が求められた．

$Dv(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\in\mathcal{S}(R_{4(n-1)})$ であるから，数列

$$\max_{\xi,\vec{\xi}}|v_\nu(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})|=b_\nu$$

は $1/\nu$ の任意のベキより速く減少する．一方，g は多項式でおさえられる関数であったから，

$$\|g(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|\leqslant C(1+\|(\xi,\vec{\boldsymbol{\xi}})\|^2)^{N/2}.$$

従って，

$$|F_{v_\nu}(\rho a)-F^1_{v_\nu}(\rho a)| < C\gamma_{\nu+1}b_\nu \max_{\|(\xi,\vec{\xi})\|\leqslant\nu+1} (1+\|\xi-\rho a\|^2+\|\xi\|^2)^{N/2}$$
$$\leqslant C\gamma_{\nu+1}b_\nu[1+2(\nu+1)^2]^{N/2}[1+2\rho^2]^{N/2}.$$

ここで定数 $\gamma_{\nu+1}$ は，$4(n-1)$ 次元空間の半径 $\nu+1$ の球の体積（すなわち $(\nu+1)^{4(n-1)}$ の程度の量）を越えない．なお，ここで不等式

$$1+\|x+a\|^2 \leqslant (1+2\|x\|^2)(1+2\|a\|^2)$$

を使った．

b_ν の性質から，係数

$$C_\nu = C\gamma_{\nu+1}[1+2(\nu+1)^2]^{N/2}b_\nu$$

は $1/\nu$ の任意のベキより速く減少することがわかる．それゆえに，不等式

$$\|F_v(\rho a)-F^1_v(\rho a)\| < (1+2\rho^2)^{N/2}\sum_{\nu\geqslant\rho\lambda-1} C_\nu$$

の右辺は $1/\rho$ の任意のベキより速く減少する．こうして，(3.2.45) が証明され，そのことによってまた，いま問題にしている場合について定理 3.2.3 も証明されたことになる[1]．

定理 3.2.3 は Wightman 関数についての本質的な情報を含んでいて，応用が広い．Haag=Ruelle の漸近条件（第4章）を論ずる際にもその一つの応用に出会うであろう．ここでは，別の例として次の命題を証明しよう（スピノル場に対して変数が互いに空間的に離れているときに反交換することを要請すると，この命題は，Wightman 関数の一価性の定理からも導かれる；2.1 節を参照）：——

場の積 $\varphi_{n\tau}(\vec{x})$ (3.2.31) が，局所反交換場の奇数個を含む（すなわち Fermi 演算子）ならば，真空期待値 $(\Psi_0,\varphi_{n\tau}(\vec{x})\Psi_0)$ は恒等的に 0 になる．

証明．$u(\vec{x})$ を $\mathcal{D}(R_{4n})$ に含まれる任意の基礎関数（有界な台をもつ）とする．(3.2.34) によれば，

$$\lim_{a^2\to-\infty}(\Psi_0,\varphi_{n\tau}(u)\,U(\underset{\sim}{a},1)\,\varphi_{n\tau}(u)\,U^{-1}(\underset{\sim}{a},1)\Psi_0) = |(\Psi_0,\varphi_{n\tau}(u)\Psi_0)|^2 \qquad (3.2.53)$$

が成り立つ．一方，十分に大きな空間的ベクトル a について，演算子 $U(a,1)\varphi_{n\tau}(u)U^{-1}(a,1)$ は，演算子 $\varphi_{n\tau}(u)$ と反交換する（$\varphi_{n\tau}$ が反交換関係に従う場の奇数個を含むことと $u(x)$ が有界な台をもつ関数であることを使って証明される．証明は読者におまかせしよう）．

---

[1] 最小の正の質量が存在するという仮定のもとでは，実質期待値が相対距離の変数を空間的に大きくするとき実は指数関数的に減少することが証明される．その際に，指数関数の減少率が質量 m に依存するのであって，このことは，正の質量をもつ粒子だけを考える理論では，すべての力が湯川型ポテンシャル $e^{-\mu r}/r$ の短距離離力であることに対応している．理論が質量 0 の粒子をもつ場合には，それが $1/r$ になるが，これは Coulomb の法則に対応する（Araki ら (1962)）．定理の証明には局所可換性は本質的には使われなかったことを注意しておこう（交換関係が漸近的に 0 になることを仮定するだけでも十分であった）．このことから，ある種の非局所理論へ Ruelle の定理を一般化することが可能になる（たとえば Khoruzhii (1967) を見よ）．

従って，十分に大きな $-a^2$ について，

$$(\Psi_0, \varphi_{n\tau}(u)\, U(\underset{\sim}{a}, 1)\, \varphi_{n\tau}(u)\, U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\Psi_0)$$

$$= -(\Psi_0, U(\underset{\sim}{a}, 1)\varphi_{n\tau}(u)\, U^{-1}(\underset{\sim}{a}, 1)\, \varphi_{n\tau}(u)\Psi_0)$$

$$\underset{a^2\to-\infty}{\longrightarrow} -|(\Psi_0, \varphi_{n\tau}(u)\Psi_0)|^2.$$

これと (3.2.53) とから $(\Psi_0, \varphi_{n\tau}(u)\Psi_0)=0$ となる．証明終わり．

すでに見たように (定理 3.1.1)，真空の一意性も含めた強いスペクトル条件と理論の完全性の条件 VII とから場の演算子のつくる代数は既約になる．このことから Wightman 関数の列

$$W=\{1, w_{\tau 1}(x_1), \cdots, w_{\tau 1\cdots\tau n}(x_1, \cdots, x_n), \cdots\}$$

の分解不可能なことが導かれる．

いま，W が Wightman 関数に課せられた線形な条件(2.2 節)をすべてみたす $W^{(1)}, W^{(2)}$ と $0<\alpha<1$ により $W=\alpha W^{(1)}+(1-\alpha)W^{(2)}$ と書けるものとし，しかも真空が唯一の不変状態であるとすると，

$$W^{(1)}=W^{(2)}=W$$

となるのである*)．

2.4. 各点ごとに定義された量子場は存在しない

前節にも注意したように，場を演算子値の一般関数として定義するのは，単に一般性を狙ったためではない．そうではなくて，要請 I ～VII を認めてしまうと，定数の場といったトリヴィアルな場合は除いて，時空各点の場 $\varphi(x)$ それ自身 (すなわち，x に関してあらかじめならすことをしない) が Hilbert 空間の演算子となり，その定義域に真空が含まれるようにするという可能性がなくなってしまうからである．以下において，これらの結論の正確な定式化を与えよう．

この種の結論の最初のものは Wightman によって得られた (1964 a)：——

[Wightman の定理] $B(x)$ を Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の上の非有界演算子とする．四次元並進群の $\mathscr{H}$ でのユニタリ表現 $U(a)$ があって，その生成演算子 P^μ のスペクトルは前方光円錐のなかに入っているとし，唯一の並進不変な状態，すなわち真空 Ψ_0 が存在するものとする．さらに，$B(x)$ および $B^*(x)$ は局所可換であり，並進

*) 2.2 節の諸要請をみたす Wightman 関数列の全体は凸集合をなすのであった．その言葉でいうと，ある Wightman 関数列が分解不可能とは，それが凸集合の端点に位置していることである．端点は凸集合に属する二点 $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ を結ぶ線分 $\alpha W^{(1)}+(1-\alpha)W^{(2)}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ の上にのることがない．

に対して共変

$$U(a)B(x)U^{-1}(a) = B(x+a)$$

とする．

このとき $B(x)\Psi_0 = c\Psi_0$ である．ここに，c は複素数である．

もし，さらに補足して，真空が B について巡回ベクトルになっていることを仮定すると，上の定理から $B(x) \equiv c$ となる．いいかえると，並進不変性，スペクトル条件，局所性，完全性のすべてをみたす点関数としての場 $B(x)$ は，定数とは異なる Hilbert 空間の演算子にはなり得ない．

ここでは，Wightman の定理と類似な命題の証明を示すことにしよう．それは上の条件のうち，場の局所性のかわりに Poincaré 群に関する共変性を仮定するものである (Wizimirski (1966))．

[定理 3.2.4] Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上に Poincaré 群の連続ユニタリ表現 $U(a,\Lambda)$ があって，それのもとで不変なベクトル Ψ_0 (真空) が，唯一つ (定数倍を除いて) 存在するとする．さらに，$B(x)$ は各点 x で $\mathscr{H}$ の非有界演算子として定義され，定義域に真空を含み，複素スカラー場としての変換性

$$U(a,\Lambda)B(x)U^{-1}(a,\Lambda) = B(\Lambda x+a) \tag{3.2.54}$$

をもつものとする．以上の仮定のもとでは

$$B(x)\Psi_0 = c\Psi_0 \tag{3.2.55}$$

となる．ここに c は複素数である．

証明. 二点 Wightman 関数を考えよう：

$$F(x-y) = (\Psi_0, B^*(x)B(y)\Psi_0). \tag{3.2.56}$$

3.1 節で見たように，$F(x)$ は斉次 Lorentz 変換のもとで不変である．また，上で行なった仮定によれば $F(x)$ は連続でもある．実際，$F(x)$ は

$$F(x) = (B(x)\Psi_0, B(0)\Psi_0) = (U(x,1)B(0)\Psi_0, B(0)\Psi_0) \tag{3.2.57}$$

という形に書けるが，表現 $U(a,\Lambda)$ の連続性により，この行列要素は x の連続関数なのである．ここで，均らさない場 $B(x)$ それ自身が $\mathscr{H}$ 上の演算子であり，従って $B(0)\Psi_0 \in \mathscr{H}$ である，という条件が本質的に用いられていることに注意しよう．

一方，Hilbert 空間の正定値な計量のために，(3.2.25) に応じて，

$$F(x) = \int e^{ipx}d\mu(p) \tag{3.2.58}$$

と書くことができる．ここで $d\mu(p)$ は負でない不変測度である．$F(x)$ は連続であるか

ら原点で有限であり，従って運動量の Minkowski 空間全体の測度 μ は有限である：

$$F(0) = \int d\mu(p) = \mu(R_4) < \infty. \tag{3.2.59}$$

ここで，有限な不変測度の一般形を調べておこう．

[補題 3.2.1] 任意の有限かつ Lorentz 不変な測度は，

$$d\mu(p) = a\delta(p)\,d^4p \qquad (a \geqslant 0) \tag{3.2.60}$$

という形をもつ．

補題の証明．まず測度 μ が原点に集中していることを示そう．もし，そうでないとしたら，$0 \neq p_{(0)} \in \operatorname{supp}\mu$ なる $p_{(0)}$ がある．測度が正であることから $p_{(0)}$ を含む任意の開集合 O について

$$\mu(O) > 0 \tag{3.2.61}$$

となる．ところが，$p_{(0)} \neq 0$ であるから $p_{(0)}$ から Lorentz 変換で移れる点 p の全体は，有界でない面[*]

$$p^2 = p_{(0)}^2, \qquad [\varepsilon(p^0) - \varepsilon(p_{(0)}^0)]\theta(p_{(0)}^2) = 0$$

をつくる．容易にわかるように，$O \ni p_{(0)}$ として原点を含まないような有界な集合を選ぶと，Lorentz 変換の列 Λ_n で，$n \neq m$ ならば 任意の二つの集合 $\Lambda_n O$ と $\Lambda_m O$ が互いに交わらないようなものを見いだすことができる．

測度の加法性と不変性から，

$$\mu(R_4) \geqslant \mu\Bigl(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_k O\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\Lambda_k O) = n\mu(O). \tag{3.2.62}$$

そうすると，(3.2.61) により，この右辺は n を大きくすればいくらでも大きくなるから，測度 (3.2.59) が有限であることに反する．こうして，測度 $d\mu(p)$ の台は，一点 $p=0$ だけから成ることが証明された．

問題 3.2.5 原点に集中した負でない一般関数は $a\delta(p), a \geqslant 0$ に限ることを示せ．

上の問題の結果から，補題 3.2.1 が証明されたことになる[1]．

定理 3.2.4 の証明を続けよう．

(3.2.58) と (3.2.60) から，

$$F(x) \equiv (B(x)\Psi_0, B(0)\Psi_0) = F(0) = a \tag{3.2.63}$$

---

[*] 第二式において $\varepsilon(s)$ は符号関数，$\theta(s)$ は Heaviside の関数 $\frac{1}{2}[1+\varepsilon(s)]$ である．この式はそこで，$p_{(0)}$ が時間的のとき $p_{(0)}^0$ と p^0 の符号が一致することをいっている．

[1] 補題 3.2.1 は，(1.3.62) および (1.3.63) からも，容易に得られる．

が得られる．そこで，

$$B(0)\Psi_0 = \Phi \tag{3.2.64}$$

とおいて，$B(x)\Psi_0 = U(x,1)\Phi$ を，ノルムが等しく互いに直交するベクトル Φ と $\Phi^{\perp}$ の一次結合

$$U(x,1)\Phi = \alpha\Phi + \beta\Phi^{\perp} \tag{3.2.65}$$

$$(\Phi, \Phi^{\perp}) = 0, \qquad (\Phi, \Phi) = (\Phi^{\perp}, \Phi^{\perp})$$

の形に表わしてみよう．

そうすると，(3.2.63) は，

$$(\Phi, \Phi) = (U(x,1)\Phi, \Phi) = \alpha(\Phi, \Phi) \tag{3.2.66}$$

を与える．ところが，一方 $U(x,1)$ はユニタリなのだから $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ である．これを (3.2.66) とあわせて，$\alpha = 1$，$\beta = 0$ を得る．すなわち，$U(x,1)\Phi = \Phi$，あるいは別の書き方をして，

$$B(x)\Psi_0 = B(0)\Psi_0 \tag{3.2.67}$$

となる．

問題　3.2.6　(3.2.64) と (3.2.67) を使って，ベクトル Φ が任意の Poincaré 変換のもとで不変なこと，

$$U(a, \Lambda)\Phi = \Phi \tag{3.2.68}$$

を示せ．

定理の前提から，任意の不変なベクトルは，真空ベクトルの定数倍になる．すなわち，

$$\Phi = B(0)\Psi_0 = B(x)\Psi_0 = c\Psi_0. \tag{3.2.69}$$

こうして，(3.2.55) は実際に成り立っていることがわかり，定理3.2.4は証明された．

もし真空が場 $B(x)$ に関して巡回ベクトルであれば，上に証明した定理より $B(x) = c$ が出て，$\mathscr{H}$ は一次元空間になることは明らかである．

§3.　Wightman 汎関数による理論の再構成

3.1.　スカラー場の理論における Wightman 汎関数とその性質

前節で得られた結果を，もうすこし抽象的な形に書き表わしてみよう．そうすると Wightman 関数のいろいろな性質が簡潔に書けることになる．また，3.2節で示すように，与えられた真空期待値に基づいて，Hilbert 空間と場の演算子をつくり上げることに関する Wightman の基本定理の簡単できれいな証明を行なうことも可能になる．簡単の

ために，一種類の中性スカラー場 $\varphi(x)$ という場合に限って議論をしよう．

基礎関数の有限列

$$\boldsymbol{f} = \{f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n), \cdots\} \tag{3.3.1}$$

のつくる線形空間 Ω_0 を考えよう．ここで有限列という意味は $\boldsymbol{f}$ に依存するある番号 $N(\boldsymbol{f})$ があって，$n > N(\boldsymbol{f})$ なるすべての n について $f_n \equiv 0$ ということである．ただし f_0 は複素数であり，$f_n \in \mathcal{S}(R_{4n})$ とする．Ω_0 における和および複素数との積は，成分ごとの演算によって定義されるものとする：

$$\lambda\boldsymbol{f} + \mu\boldsymbol{g} = \{\lambda f_0 + \mu g_0, \lambda f_1(x_1) + \mu g_1(x_1), \cdots\}.$$

Ω_0 に次のようにして位相を導入しよう．Ω_0 の元の列 $\boldsymbol{f}^{(\nu)}$ は，次の条件をみたすとき 0 に収束するという：

1) ν に無関係な正の数 N が存在し，$n > N$ なる n に対して，すべての ν で $f_n^{(\nu)} \equiv 0$；

2) $\mathcal{S}(R_{4m})$ における収束の意味で $f_m^{(\nu)}(x_1, \cdots, x_m) \to 0$ となる（$m = 0$ については，複素数 $f_0^{(\nu)}$ が普通の意味で 0 に収束する）．

問題 3.3.1 第 1 章 1.4 節に述べた核型空間の性質を使って Ω_0 が完備な核型空間であることを示せ．

Ω_0 に，次の式によって非可換な積を定義する：

$$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g} = \{f_0 g_0, f_0 g_1(x_1) + f_1(x_1) g_0, \cdots$$
$$\cdots, \sum_{k=0}^{n} f_k(x_1, \cdots, x_k) g_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n), \cdots\} \tag{3.3.2}$$

（積 (3.3.2) は実際に可換でない．$0 \neq f_1(x) \neq g_1(x) \neq 0$ とすると第三項ですでに $f_1(x_1) g_1(x_2) \neq f_1(x_2) g_1(x_1)$ となっている）．容易に確かめられるように，この積は結合則と分配則（和に対しての）を満足する．また，この積は $\Omega_0 \times \Omega_0$ から Ω_0 の上への，上に定めた位相に関して連続な写像になっている．

この積 (3.3.2) に関する単位元は，

$$\boldsymbol{I} = (1, 0, \cdots, 0, \cdots) \tag{3.3.3}$$

である．実際，容易にわかるように，

$$\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{f}. \tag{3.3.4}$$

さらに，Ω_0 の元に対して反線形な演算 $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}^+ = \{\bar{f}_0, \bar{f}_1(x_1), \bar{f}_2(x_2, x_1), \cdots, \bar{f}_n(x_n, \cdots, x_1), \cdots\} \tag{3.3.5}$$

を定義しよう．明らかに，$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})^+ = \boldsymbol{f}^+ + \boldsymbol{g}^+$, $(\lambda\boldsymbol{f})^+ = \bar{\lambda}\boldsymbol{f}^+$, $(\boldsymbol{f}^+)^+ = \boldsymbol{f}$ が成立する（これら

の性質をもつ演算を一般に《対合》という).

問題 3.3.2 次式を証明せよ.

$$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})^{+} = \boldsymbol{g}^{+}\times\boldsymbol{f}^{+}. \tag{3.3.6}$$

以上を要約して, Ω_0 は《対合と単位元をもつ核型代数である》ということができる.

代数 Ω_0 において Fourier 変換を次の式で定義することができる:

$$F\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}} = \{f_0, \tilde{f}_1(k_1), \cdots, \tilde{f}_n(k_1, \cdots, k_n) \cdots\}. \tag{3.3.7}$$

ただし,

$$\tilde{f}_n(k_1, \cdots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int\cdots\int f_n(x_1, \cdots, x_n)\, e^{-i(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)}\, d^4x_1\cdots d^4x_n \tag{3.3.8}$$

(基礎関数の Fourier 変換の定義 (3.3.8) では, Wightman 関数の Fourier 変換 (3.2.17) に比べて指数関数の肩の部分が逆符号になっていることに注意せよ).

Fourier 変換によって空間 $\mathcal{S}(R_n)$ はそれ自身に写されるから, $\boldsymbol{f}\in\Omega_0$ であれば $F\boldsymbol{f}\in\Omega_0$ である.

最後に, Poincaré 群の Ω_0 における表現 $\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}}$ を次の式で定義しよう:

$$\boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}} = \{f_0, f_1(\Lambda^{-1}(x_1-a)), \cdots, f_n(\Lambda^{-1}(x_1-a), \cdots, \Lambda^{-1}(x_n-a)), \cdots\}. \tag{3.3.9}$$

問題 3.3.3 Fourier 変換および写像 $\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}}$ はともに線形であり, かつ積を保存する演算であること, すなわち,

$$F(\lambda\boldsymbol{f}+\mu\boldsymbol{g}) = \lambda F(\boldsymbol{f})+\mu F(\boldsymbol{g}), \quad F(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = F(\boldsymbol{f})\times F(\boldsymbol{g}),$$
$$(\lambda\boldsymbol{f}+\mu\boldsymbol{g})_{\{a,\Lambda\}} = \lambda\boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}}+\mu\boldsymbol{g}_{\{a,\Lambda\}}, \quad (\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})_{\{a,\Lambda\}} = \boldsymbol{f}_{\{a,\Lambda\}}\times\boldsymbol{g}_{\{a,\Lambda\}}$$

の成立することを示せ.

Ω_0 上の連続な線形汎関数のつくる空間を Ω_0^* とする. Ω_0^* に属する任意の汎関数は,

$$F(\boldsymbol{f}) = F_0f_0+F_1(f_1)+\cdots+F_n(f_n)+\cdots$$

という形に書ける. ここに, F_0 は複素数であり, $F_n\in\mathcal{S}^*(R_{4n})$ である. 任意の $\boldsymbol{f}\in\Omega_0$ に対して,

$$F(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}^{+}) \geqslant 0 \tag{3.3.10}$$

が成り立つとき, Ω_0^* の汎関数 F は《乗法的に正値》であるという.

$(\boldsymbol{f}^{+})^{+} = \boldsymbol{f}$ を使えば容易にわかるとおり, 乗法的に正値性の条件 (3.3.10) は次の条件

$$F(\boldsymbol{f}^{+}\times\boldsymbol{f}) \geqslant 0, \qquad \boldsymbol{f}\in\Omega_0$$

と同値である.

汎関数 $F(f)$ は,

$$F(f^+) = \overline{F(f)} \tag{3.3.11}$$

をみたすとき《エルミート的》であるといわれる.

問題 3.3.4 乗法的に正値な汎関数は, どれもエルミート的であることを示せ (ヒント: 不等式 $F((\lambda I+f)\times(\bar{\lambda}I+f^+)) \geqslant 0$ を使え).

問題 3.3.5 $F(f)$ を正値な汎関数とすると Cauchy-Bunyakovski-Schwarz の不等式

$$|F(f\times g^+)|^2 = F(f\times g^+)F(g\times f^+) \leqslant F(f\times f^+)F(g\times g^+) \tag{3.3.12}$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 不等式 $F((\lambda f+\mu g)\times(\bar{\lambda}f^++\bar{\mu}g^+)) \geqslant 0$ を使え).

F を Ω_0^* に属する乗法的に正値な汎関数とする. Ω_0 の元で,

$$F(f\times f^+) = 0 \tag{3.3.13}$$

を満足する f の全体 $\mathcal{T}_F$ は次のようないちじるしい性質をもつ: $f \in \mathcal{T}_F$ なら Ω_0 の任意の元 g に対して $f\times g \in \mathcal{T}_F$. このことは不等式 (3.3.12) を使って容易に確かめられる. このような性質をもった集合 $\mathcal{T}_F$ を代数 Ω_0 の《右イデアル》という. 同様に, 集合 $\mathcal{T} \subset \Omega_0$ で, $f \in \mathcal{T}$ ならば任意の $g \in \Omega_0$ について $g\times f \in \mathcal{T}$ となるものを《左イデアル》という. 同時に右イデアルでも左イデアルでもあるものを両側イデアルという.

問題 3.3.6 $\mathcal{T}_F$ は Ω_0 の閉じた線形部分空間であることを示せ. その内容は詳しくいえば, $\mathcal{T}_F$ の元の任意の線形結合が再び $\mathcal{T}_F$ に属し, $\mathcal{T}_F$ の元からなる列が収束するとき, その極限も $\mathcal{T}_F$ に属するということである.

状態ベクトルのつくる空間の計量の正定値性により, 前節で論じた Wightman 関数の列は Ω_0 上の乗法的に正値な汎関数 $W(f)$ を定義する:

$$W(f) = f_0+w_1(f_1)+w_2(f_2)+\cdots. \tag{3.3.14}$$

スペクトル条件と局所可換性により, イデアル $\mathcal{T}_W \equiv \mathcal{T}$ はトリヴィアルなものでない (すなわち, ゼロでない元を含む). 実際, スペクトル条件から $\mathcal{T}$ は次のような右イデアルを含むことがわかる:

$$\mathcal{T}_{\rm sp} = \{f; f_0 = 0,\ \tilde{f}_n(k_1, \cdots, k_n) = 0,$$
$$k_1 \in \overline{V}_+, \cdots, k_1+\cdots+k_n \in \overline{V}_+ \text{ において},\ n = 1, 2, \cdots\}. \tag{3.3.15}$$

さらに, 局所可換性の条件により $\mathcal{T}$ は, 次の形の線形結合の全体からなるイデアル $\mathcal{T}_{\rm l.c.}$ も含むのである:

$$f_n(x_1, \cdots, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$

$$= g(x_1, \cdots, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) - g(x_1, \cdots, x_{j+1}, x_j, \cdots, x_n) \qquad (3.3.16)$$

ただし $(x_j - x_{j+1})^2 \geqslant 0$ では $g(x_1 \cdots x_n) = 0$ とする．

問題 3.3.7 $\mathcal{T}_{\mathrm{sp}}$ は右イデアル，$\mathcal{T}_{\mathrm{l.c.}}$ は両側イデアルであることを確かめよ．

任意の $f \in \Omega_0$ と任意の $\{a, \Lambda\} \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ に対して常に

$$F(f_{\{a,\Lambda\}}) = F(f). \qquad (3.3.17)$$

であるとき，汎関数 $F(f) \in \Omega_0^*$ は不変であるという．

また，$F(I) = 1$ のとき $F(f)$ は規格化されているということにしよう．

Wightman 関数の〈線形な〉性質の全体は次のように要約できる：——

［定義］ 規格化された汎関数 $W \in \Omega_0^*$ は，不変かつ乗法的正値で，右イデアル

$$\mathcal{T} = \{f ; W(f \times f^+) = 0\} \qquad (3.3.18)$$

がイデアル $\mathcal{T}_{\mathrm{sp}}$ および $\mathcal{T}_{\mathrm{l.c.}}$ を含むとき Wightman 汎関数とよぶ．

問題 3.3.8 W を Wightman 汎関数とするとき，(3.3.14) によって生成される Wightman 関数 w_n は 3.2 節に掲げた線形条件を全部みたすことを確かめよ．また逆に，$w_n(f_n)$ がそれら線形条件をみたすならば，汎関数 $W(f)$ は Wightman 汎関数になることも確かめよ．

代数 Ω_0 と汎関数 W の言葉を使うと Wightman 理論はまとまりよく定式化でき，しかも本質的に単純化される．われわれの考えでは，この節がかなり抽象的な術語を用いてきたことも，この事実によって正当化される．

真空の一意性の条件は，Wightman 汎関数を使って次の形に書き表わされる：

［定理 3.3.1］ 真空が一意的であるような物理理論には分解不可能な Wightman 汎関数 W が対応している．いいかえれば，$W^{(1)}, W^{(2)}$ を Wightman 汎関数として $0 < \alpha < 1$ で W を

$$W = \alpha W^{(1)} + (1-\alpha) W^{(2)} \qquad (3.3.19)$$

と書くには $W^{(1)} = W^{(2)} = W$ とするほかない (2.2 節の末尾を参照)．

それに対して，縮退した真空をもつ理論では，その Wightman 汎関数を分解不可能な Wightman 汎関数にまで分解することができる (Borchers (1962)，Reeh and Schlieder (1962)，Maurin (1963 a, b))．

定理 3.3.1 の証明はここでは行なわない．

この定理のあとのほうの命題の証明は，次の節で，定理 3.3.2 を証明するときに述べる．

問題 3.3.9 正値な汎関数 W が (3.3.19) のように二つの正値な汎関数 $W^{(1)}$，$W^{(2)}$ に分解されたとすると，

$$\mathcal{T}_W \subset \mathcal{T}_{W^{(1)}} \cap \mathcal{T}_{W^{(2)}}$$

となることを示せ．ただし $\mathcal{T}_W$ は (3.3.18) で定義された右イデアルを表わす．

Wightman 汎関数を使うと，(3.2.34) で表わされるクラスター分解性（真空が一意的な理論での）は，次の形に書かれる：任意の $l \geqslant 0$ および $a^2 < 0$ に対して，

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^l \left[W(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}_{\{\rho a,1\}})-W(\boldsymbol{f})W(\boldsymbol{g})\right] = 0. \tag{3.3.20}$$

次の問題は (3.3.20) と定理 3.3.1 の関係を部分的に示している：

問題 3.3.10 W は (3.3.19) のように分解されており，W も $W^{(1)}, W^{(2)}$ もクラスター分解性 (3.3.20) をもつとする．このようなことは $W^{(1)}=W^{(2)}=W$ のときにのみ可能であることを示せ．

3.2. Gelfand の三つ組と場の演算子の Wightman 汎関数による再構成

次の定理を証明しよう：――

[定理 3.3.2] 代数 Ω_0 上に Wightman 汎関数 $W(f)$ が与えられたとしよう．そうすると，（ユニタリ同値を除いて一意的に定まる）可分な Gelfand の三つ組，$\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*$，その上で定義されスペクトル条件 III.a をみたす Poincaré 群のユニタリ表現 $U(a, \Lambda)$，および要請 IV～VII をみたす局所場の演算子 $\varphi(f)$ が存在して，

$$W(\boldsymbol{f}) = (\Psi_0, P(\varphi\,;\boldsymbol{f})\Psi_0) \tag{3.3.21}$$

と表わされる．ただし，Ψ_0 は規格化された不変ベクトル ($U(a,\Lambda)\Psi_0 = \Psi_0$) であり，$P(\varphi\,;\boldsymbol{f})$ は (3.1.18) で与えられる演算子である．特にスカラー場の場合には，

$$P(\varphi\,;\boldsymbol{f}) = f_0 + \sum_{j=1}^{N(f)} \varphi_j(f_j(x_1, \cdots, x_j)). \tag{3.3.22}$$

さらに，Wightman 汎関数 W が分解不可能なときには不変な状態 Ψ_0（真空）は一意的に定まる．

証明．空間 $\mathcal{H}$ を次の手順で定義しよう．はじめに連続なスカラー積 (Φ, Ψ) の定義された核型空間 Ω をつくり，その上での演算子 $U(a,\Lambda)$ と $\varphi(\boldsymbol{f})$ の作用を定義する．そうしておいてノルム $\|\Psi\| = \sqrt{(\Psi,\Psi)}$ による Ω の完備化として Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を定義するのである．最初 Ω で定義されたユニタリ演算子 $U(a,\Lambda)$ は連続性によって $\mathcal{H}$ 全体に拡大される．

さて，その核型空間 Ω の元は代数 Ω_0 の《同値類[1]》として定義しよう．ただし，Ω_0 の

[1] 同値類（《剰余類》という術語も使われている）という概念は数学でしばしば出会うものである．たとえば，Cantor によれば実数は有理数の基本列の集合の同値類として定義される．また Lebesgue 積分可能な関数は〈ほとんど至るところで互いに等しい〉可測関数の同値類になっている．第 1 章の 2.2 節では一般関数の定義に同値類の概念を利用した．

二つの元 f と g は，

$$f-g \in \mathscr{T} \tag{3.3.23}$$

のとき，かつそのときに限り同一の類 $\Psi = \Psi_{[f]} = \Psi_{[g]}$ に入るとする．$\mathscr{T}$ は (3.3.18) で定義された右イデアルである．同値類の集合 Ω 内に，和および複素数を掛ける演算が，Ω_0 での対応する演算を通して自然な仕方で導入できる．すなわち，

$$\Psi_{[f]}+\Psi_{[g]} \equiv \Psi_{[f+g]}, \qquad \lambda\Psi_{[f]} = \Psi_{[\lambda f]} \tag{3.3.24}$$

とするのである．

問題　3.3.11　同値類 $\Psi_{[f+g]}$ および $\Psi_{[\lambda f]}$ は，類 $\Psi_{[f]}$，$\Psi_{[g]}$ の代表元 f, g の選び方には無関係に定まることを示せ．このことによって (3.3.24) による定義が正当化される．

同値類の空間 Ω のことを，空間 Ω_0 を部分空間 $\mathscr{T}$ で割った《商空間》とよび

$$\Omega = \Omega_0/\mathscr{T} \tag{3.3.25}$$

と記す．

いま Ω_0 は核型で $\mathscr{T}$ は閉部分空間なので，一般定理により Ω は Ω_0 の位相から誘導された位相に関して核型となる (Maurin (1963 a) を参照)．

Ω におけるスカラー積を

$$(\Psi_{[f]}, \Psi_{[g]}) = W(g \times f^+) \tag{3.3.26}$$

によって定義しよう．

イデアル $\mathscr{T}$ の定義と Cauchy の不等式 (3.3.12) を使うと，$g_0 \in \mathscr{T}$，$f_0 \in \mathscr{T}$ ならば，

$$W((g+g_0)\times(f^+ + f_0^+)) = W(g\times f^+)$$

となることが容易にわかるから，スカラー積 (3.3.26) は，同値類 $\Psi_{[f]}, \Psi_{[g]}$ で定まり，代表元 g, f の選び方には依存しないのである．スカラー積が正定値であることは，Wightman 汎関数の正定値性から出てくる．スカラー積の各変数に関する連続性およびエルミート性は明らかである．

Ω 上の Poincaré 群の表現は，

$$U(a, \Lambda)\Psi_{[f]} = \Psi_{[f\{a,\Lambda\}]} \tag{3.3.27}$$

によって定義される．

この定義は類 $\Psi_{[f]}$ の代表元 f の選び方にはよらない．なぜならば，Wightman 汎関数が不変なことからイデアル $\mathscr{T}$ (3.3.18) も不変，すなわち $f \in \mathscr{T}$ ならば $f\{a,\Lambda\} \in \mathscr{T}$ となるからである．容易にわかるように，

$$U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})U(a, \Lambda) = U(a, \Lambda)U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) = 1$$

(すなわち各 $U(a, \Lambda)$ に対して，逆元 $U^{-1}(a, \Lambda) = U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$ が存在する)．さらに，不変性により，

$$(U(a, \Lambda)\Psi_{[f]}, U(a, \Lambda)\Psi_{[g]}) = (\Psi_{[f]}, \Psi_{[g]}). \qquad (3.3.28)$$

従って $U(a, \Lambda)$ はユニタリ[*]であり，Ω をノルム $\sqrt{(\Psi, \Psi)}$ によって完備化した Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 全体に拡大できる．

真空 Ψ_0 は，代数 Ω_0 の単位元を含む同値類として定義される：

$$\Psi_0 = \Psi_{[I]} \qquad (I = (1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)). \qquad (3.3.29)$$

明らかに，ベクトル Ψ_0 は不変であり，また $(\Psi_0, \Psi_0) = 1$ である．演算子の多項式 $P(\varphi; f)$ の Ω での作用（特に $f = (0, f(x), 0, \cdots, 0, \cdots)$ の場合には場の演算子 $\varphi(f)$ の作用）を

$$P(\varphi; f)\Psi_{[g]} = \Psi_{[g\times f]} \qquad (3.3.30)$$

によって定義しよう．

$\mathscr{T}$ が右イデアルであることから直ちに，ベクトル $\Psi_{[g]}$ への演算子 $P(\varphi, f)$ の作用が類 $\Psi_{[g]}$ の代表元 g の選び方によらないことが出てくる．

しかし，このことは演算子 $P(\varphi; f)$ の変数 f についてはあてはまらないことに注意しよう．場の演算子は代数 Ω_0 の元の関数であって，類の空間 Ω の元の関数ではないのである（もし $\mathscr{T}$ が両側イデアルだったら類 $\Psi_{[g\times f]}$ は $\Psi_{[f]}$ の代表元 f に依存しないで定まるのだが）．

問題 3.3.12 以上のように定義された空間 $\mathscr{H}$ で，Poincaré 群の表現 $U(a, \Lambda)$ および場の演算子 $\varphi(f)$ が要請 I～VII（スペクトル条件としては弱い条件 III. a をとって）を全部みたすこと，また (3.3.21) が成り立つことを確かめよ．

このような形で，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の存在と，そこでの表現 $U(a, \Lambda)$ と演算子 $\varphi(f)$ の作用を具体的に表わすという問題を解決した．さて次に，Wightman 汎関数で定められる空間 $\mathscr{H}$（巡回的な真空をもつ）がユニタリ同値を除いて一意的に定まることを示そう．

二つの Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1$ と $\mathscr{H}_2$ があって，それぞれ Poincaré 群の表現 $U_1(a, \Lambda)$, $U_2(a, \Lambda)$ が定められ，かつ不変なベクトル Ψ_{10}, Ψ_{20} が存在するとしよう．そして場の演

---

[*] 正確には‘等距離的’とすべきである．この $U(a, \Lambda)$ は $\mathscr{H}$ 全体に拡大したとき，はじめてユニタリになる．

算子 $\varphi_1(f), \varphi_2(f)$ は任意の $f \in \Omega_0$ に対して,

$$(\Psi_{10}, P(\varphi_1; f)\Psi_{10}) = (\Psi_{20}, P(\varphi_2; f)\Psi_{20}) = W(f) \tag{3.3.31}$$

が成立するように作用しているとしよう.

Ω_1 および Ω_2 を $P(\varphi_i; f)\Psi_{i0}\,(i=1,2)$ の形をしたベクトルの張る空間としよう. いま Ω_1 から Ω_2 への演算子 V を

$$V\Psi_{10} = \Psi_{20}, \quad VP(\varphi_1; f)\Psi_{10} = P(\varphi_2; f)\Psi_{20} \tag{3.3.32}$$

によって定義しよう.

(3.3.31) により演算子 V はスカラー積を保存する. 空間 Ω_i が $\mathcal{H}_i$ $(i=1,2)$ で稠密であることを使えば, V は $\mathcal{H}_1$ を $\mathcal{H}_2$ 全体に 1 : 1 に写すユニタリ演算子に拡大され,

$$\varphi_2(f) = V\varphi_1(f)V^{-1}, \qquad U_2(a, \Lambda) = VU_1(a, \Lambda)V^{-1}$$

が成り立つことが容易に示せる.

このようにして, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ と対応する演算子の組とによって定まる二つの理論は互いにユニタリ同値になる.

定理 3.3.2 の証明を完了するためには, なお定理 3.3.1 の後半を証明することが必要である. すなわち, Wightman 汎関数が分解不可能という条件から真空の一意性が出ることを示さなければならない.

この命題の証明は背理法によって行なうことにしよう. そのために, Wightman 汎関数は分解不可能だが, それにもかかわらず $\mathcal{H}$ での不変ベクトルのつくる部分空間は少なくとも二次元であると仮定してみる.

まず, 定理 3.1.1 の逆の命題を証明しよう.

[補題 3.3.1]　真空が一意的でないとすると, 場の演算子のつくる代数 $\mathfrak{A}$ は可約である (Borchers (1962)).

証明. 帰謬法を用いる. 不変状態 (真空) の各々に対して次のような反ユニタリ演算子 Θ を見いだすことができる:

$$\begin{aligned}
&\Theta\Psi_0 = \Psi_0, \\
&\Theta\varphi(x)\Psi_0 = \varphi(-x)\Psi_0, \\
&\Theta\varphi(x_1)\varphi(x_2)\Psi_0 = \varphi(-x_1)\varphi(-x_2)\Psi_0, \\
&\cdots\cdots \\
&(\Theta(\alpha\Psi+\beta\Phi) = \bar{\alpha}\Theta\Psi+\bar{\beta}\Theta\Phi)
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

(演算子 Θ は TCP 演算子とよばれる. 第5章で TCP 定理を証明するときにわれわれは

この演算子に出会うであろう).

不変ベクトルの空間が 1 より大きい次元をもつときにも，恒等式 $\Theta^2 = 1$ によって，不変ベクトルの正規直交基底を適当に選んで各々が $\Theta\Psi_{i0} = \Psi_{i0}$ をみたすようにできる．そこで 0 でない複素数で，

$$|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1 \qquad \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \neq \frac{\beta}{\bar{\beta}}$$

をみたすものを選んで，

$$\Psi_{\alpha\beta} = \alpha\Psi_{10} + \beta\Psi_{20}$$

を定義しよう．

もし代数 $\mathfrak{A}$ が既約ならば Ω (演算子 $P(\varphi;\boldsymbol{f})$ の共通の定義域) に属する任意のベクトル Ψ が巡回的であることに注意しよう．実際，もし $\boldsymbol{f}$ を変化させたときのベクトル $P(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi$ の全体 Ω_1 が Ω において (従って $\mathcal{H}$ においても) 稠密でないとしたら，すなわち閉包 $\overline{\Omega_1}$ が $\mathcal{H}$ の真部分空間になるとしたら，$\overline{\Omega_1}$ への射影演算子 Π_1 は $P(\varphi;\boldsymbol{f})$ のすべてと交換することになり，これは代数 $\mathfrak{A}$ の既約性に反する．従って，ベクトル $\Psi_{\alpha\beta}$ も巡回的であり，その結果，これに対しても (3.3.33) の性質をもつ反ユニタリ演算子 $\Theta_{\alpha\beta}$ が存在することになる．α, β の選び方からして，ベクトル

$$\Theta\Theta_{\alpha\beta}\Psi_{\alpha\beta} = \Theta(\alpha\Psi_{10} + \beta\Psi_{20}) = \bar{\alpha}\Psi_{10} + \bar{\beta}\Psi_{20}$$

は $\Psi_{\alpha\beta}$ と平行でない．従ってユニタリ演算子 $\Theta\Theta_{\alpha\beta}$ は単位演算子の定数倍ではない．ところが，容易に確かめられるように，

$$\Theta\Theta_{\alpha\beta}\varphi(x)\Theta_{\alpha\beta}^{-1}\Theta^{-1} = \varphi(x)$$

であって，$\Theta\Theta_{\alpha\beta}$ は $P(\varphi;\boldsymbol{f})$ のすべてと交換するのである．このようにして，代数 $\mathfrak{A}$ が既約であるとした仮定と矛盾する結論に達する．これで補題 3.3.1 は証明された．

結局，場の演算子の代数 $\mathfrak{A}$ は可約である．容易に確かめられるように，$\mathfrak{A}$ のすべての演算子と弱可換な有界演算子の全体もまた代数をつくる．この代数を $\mathfrak{A}'$ と記すことにして，$\mathfrak{A}$ の (弱) 可換子代数とよぶ．$\mathfrak{A}'$ が代数をつくるとは，$\mathfrak{A}'$ に含まれる演算子の線形結合および積が再び $\mathfrak{A}'$ に含まれるという意味である．

問題 3.3.13 $B \in \mathfrak{A}'$ なら，すなわち Ω に属する任意の Φ, Ψ に対して

$$(P(\varphi;\boldsymbol{f})^*\Phi, B\Psi) = (\Phi, BP(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi) \tag{3.3.34}$$

が成り立つなら ((3.1.20) を見よ)，$B^* \in \mathfrak{A}'$ となることを示せ．

問題 3.3.13 から代数 $\mathfrak{A}'$ がトリヴィアルでない (すなわち，単位演算子の定数倍だけか

らできているのではない）なら，それはトリヴィアルでない自己共役演算子（$B+B^*$ または $\mathrm{i}(B^*-B)$）を含むことが出てくる．ノルムが1を越えない正値な演算子 $B\in\mathfrak{A}'$ の存在も容易に示される．つまり，任意の $\Psi\in\mathcal{H}$ に対して，

$$0\leqslant(\Psi,B\Psi)\leqslant(\Psi,\Psi) \tag{3.3.35}$$

となる演算子 $B\in\mathfrak{A}'$ が存在する[1]のである．

[補題 3.3.2] $B\in\mathfrak{A}'$ とすると，B は Poincaré 群の表現演算子 $U(a,\Lambda)$ すべてと交換する．

証明．場の共変性（および真空の不変性）から，$B\in\mathfrak{A}'$ ならば，

$$B(y)=U(y,1)BU^{-1}(y,1)\in\mathfrak{A}' \tag{3.3.36}$$

であることが導かれる．

(3.3.34) から，Fourier 変換に移れば，

$$(\Psi_0,\tilde{B}(q)\tilde{\varphi}(k_1)\cdots\tilde{\varphi}(k_n)\Psi_0)=(\tilde{\varphi}^*(k_n)\cdots\tilde{\varphi}^*(k_1)\Psi_0,\tilde{B}(q)\Psi_0) \tag{3.3.37}$$

を得る．

スペクトル条件から，等式 (3.3.37) の左辺は $q\in\overline{V}^-$（過去光円錐の閉包に属する q）に対してのみ0と異なる．ところが $\tilde{\varphi}^*(k)=\tilde{\varphi}(-k)$ だから，右辺は $q\in\overline{V}^+$ のときだけ0と異なるのである．真空の巡回性により，このことは $\tilde{B}(q)\sim\delta(q)$ の場合しか可能でない（ここで，(3.3.36) により $\|B(y)\|=\|B\|$ で，これは y とともに増加しないから，$\tilde{B}(q)$ は $\delta(q)$ の導関数を含まないということを使う）．ゆえに，$B(y)=B(0)=B$，すなわち B は並進の演算子 $U(y,1)$ すべてと交換する．従って，Ψ_0 だけでなく $B\Psi_0$ も並進不変であり，四元運動量が0の状態を表わす．われわれの仮定によれば，このような状態は，すべての斉次 Lorentz 変換のもとで不変なのである[2]（すなわち，それは新しい真空である）．よって，次式が成り立つ：

$$\begin{aligned}&U(0,\Lambda)BU^{-1}(0,\Lambda)P(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi_0\\&=U(0,\Lambda)BP(\varphi;\boldsymbol{f}_{\{0,\Lambda^{-1}\}})\Psi_0\\&=U(0,\Lambda)P(\varphi;\boldsymbol{f}_{\{0,\Lambda^{-1}\}})B\Psi_0\\&=P(\varphi;\boldsymbol{f})B\Psi_0=BP(\varphi;\boldsymbol{f})\Psi_0.\end{aligned}$$

---

1) 正値な演算子 $B\in\mathfrak{A}'$ の存在をいうためには，適当な演算子 $b\in\mathfrak{A}'$ が存在して B が b^*b と書けることをいえば十分である．b は有界だから，これに十分小さい正の数をかけて，条件 (3.3.35) をみたすようにできる．

2) Wightman 汎関数の性質に基づくこの命題の証明は，Borchers によって与えられた（Borchers (1962)，定理3）．

従って，真空 Ψ_0 の巡回性により B が $U(0, \Lambda)$ と交換する．補題3.3.2は証明された．

結局，(3.3.35) をみたすトリヴィアルでない正定値の演算子 B で，演算子 $P(\varphi\,;\boldsymbol{f})$ および $U(a, \Lambda)$ と可換なものが存在する．そして，容易に示せるように，

$$0<\alpha \equiv (\Psi_0, B\Psi_0)<1. \tag{3.3.38}$$

実際，(3.3.35) によって $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ である．もし $\alpha=0$ とすると $\sqrt{B}\Psi_0=0$, すなわち $B\Psi_0=0$ となり，このことおよび B が $P(\varphi\,;\boldsymbol{f})$ と可換なことから $B=0$ が出る．またもし $\alpha=1$ とすると $B\Psi_0=\Psi_0$ となるが，$B\in\mathfrak{A}'$ なので $B=1$ となる．ところが，演算子 B は単位演算子の定数倍でないと仮定したのだから (3.3.38) が証明されたことになる．演算子 $1-B$ も同様の性質をもつ．そこで

$$\begin{aligned} \alpha W^{(1)}(\boldsymbol{f}) &= (\Psi_0, P(\varphi\,;\boldsymbol{f})\,B\Psi_0), \\ (1-\alpha)W^{(2)}(\boldsymbol{f}) &= (\Psi_0, P(\varphi\,;\boldsymbol{f})\,(1-B)\Psi_0) \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

とおいてみよう．

問題 3.3.14 演算子 B の性質と補題3.3.2を使って $W^{(1)}$ と $W^{(2)}$ が互いに等しくない Wightman 汎関数であることを示せ．

明らかに，もとの Wightman 汎関数は，

$$W(\boldsymbol{f}) \equiv (\Psi_0, P(\varphi\,;\boldsymbol{f})\Psi_0) = \alpha W^{(1)}(\boldsymbol{f})+(1-\alpha)W^{(2)}(\boldsymbol{f})$$

と書かれる．

こうして，Wightman 汎関数 W を分解不可能とした最初の仮定に反する結論に到達した．このことは，二つ以上の《線形独立な》真空が存在するという前提が正しくないことを示している．

これで定理3.3.1は完全に証明された[1]．

§ 4. 例：自由場および一般化された自由場

すでに述べたように，公理 I～VII を全部みたす，相互作用のある局所場の理論のトリヴィアルでない例は現在までのところ一つもつくられていない．それゆえ，この節では，

---

[1] (3.3.39) (たとえば $\alpha W^{(1)}(\boldsymbol{f})$) は，与えられた正の汎関数 $W(\boldsymbol{f})$ でおさえられる汎関数の例になっている (という意味は，任意の $\boldsymbol{f}\in\Omega_0$ について，$0\leqslant \alpha W^{(1)}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}^+)\leqslant W(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}^+)$ であるということである)．ノルムをもつ巡回的な代数の場合には，(3.3.39) が与えられた汎関数でおさえられる正定値な汎関数の一般な形であることが知られている ([31]の §19, 定理1参照)．いまの場合 (代数 $\mathfrak{A}$ は核型であるがノルムをもたない)にこの命題を一般化できるかどうかは数学の興味深い問題である．

相互作用のない場のいくつかの例だけを簡単に考察するにとどめよう．これらの例は公理系が数学的に無矛盾であることを示す．また，公理の相互の独立性を判定する可能性を与える．

4.1. 質量をもつ自由な中性スカラー場

中性の（すなわちエルミートな）スカラー場 $\varphi(f)$ は，任意の $f\in\mathcal{S}(R_4)$ に対して，

$$\varphi(Kf)=0,\qquad K=\Box+m^2 \tag{3.4.1}$$

をみたし，また交換関係

$$\begin{aligned}\varphi(f)\varphi(g)-\varphi(g)\varphi(f)&\equiv[\varphi(f),\varphi(g)]\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}\iint f(x)\,D(x-y)\,g(y)\,d^4x\,d^4y\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

を満足するとき，質量 m をもつ自由場であるということにしよう．ここに $D(x)$ は Pauli=Jordan の不変関数

$$\begin{aligned}D(x)\equiv D_m(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int\varepsilon(p^0)\,\delta(p^2-m^2)\,e^{\mathrm{i}px}\,d^4p\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_m^+}\sin p^0x^0\,e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{px}}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0}\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

である．

方程式 (3.4.1) は，場に対する Klein=Gordon 方程式にほかならず，記号的には，

$$K\varphi(x)\equiv(\Box+m^2)\varphi(x)=0 \tag{3.4.4}$$

と書かれる．

方程式 (3.4.1) と交換関係 (3.4.2) を満足する演算子 $\varphi(f)$ は，実際に存在して，状態ベクトルの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に含まれる一つの核型空間 Ω で（極大核型空間 $\mathcal{S}_\infty$ でも）定義される．その Ω については第2章 5.1 節で述べた．

ベクトル

$$\Phi=(\Phi_0,\cdots,\Phi_n(p_1,\cdots,p_n),\cdots)\in\Omega$$

に対する $\varphi(f)$ の作用は次の式で定義される：

$$\begin{aligned}(\varphi(f)\Phi)_n(p_1,\cdots,p_n)=\sqrt{\pi}\Big[&\sqrt{n+1}\int\tilde{f}(p)\,\Phi_{n+1}(p,p_1,\cdots,p_n)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p_0}\\&+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}(-p_j)\,\Phi_{n-1}(p_1,\cdots,\hat{p}_j,\cdots,p_n)\Big].\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

ただし，基礎関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\tilde{f}$ は (3.3.8) で定義される．また，変数 p_j の上の記号 ⌒ は，その p_j を除けという意味である．

特に，$\Phi=\Psi_0=(1,0,\cdots,0,\cdots)$ とすると，

$$\varphi(f)\Psi_0=\sqrt{\pi}\,(0,\tilde{f}(-p_1),0,\cdots) \tag{3.4.6}$$

となる．

ベクトル $\Phi\in\mathscr{H}$ で，$\varphi(f)\Phi\in\mathscr{H}$ となるようなものの全体を D_f で表わす．明らかに，(2.5.5) および (3.4.5) によって定義される級数 $\|\varphi(f)\Phi\|^2$ が収束するとき，しかもそのときに限り $\Phi\in D_f$ である．

問題 3.4.1 a) (3.4.5) で定義される演算子 $\varphi(f)$ が方程式 (3.4.1) および交換関係 (3.4.2) をみたすことを示せ．

b) 試料関数 $f(x)$ が実であるならば，D_f から $\mathscr{H}$ への演算子 $\varphi(f)$ は対称であるのみならず自己共役でもあることを示せ．

(3.4.5) を直観的に導き出してみよう．その方法では，基本的役割を演ずるものとして，粒子の生成・消滅演算子が付随的に導入される．

方程式 (3.4.4) の一般解の Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(p)$ は，$\delta(p^2-m^2)$ に比例する：

$$\tilde{\varphi}(p)=\sqrt{2\pi}\,\chi(p)\,\delta(p^2-m^2). \tag{3.4.7}$$

p^0 について積分を実行すると[1]，

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\chi(p)\,\delta(p^2-m^2)\,e^{ipx}\,d^4p$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{V_m^+}[a(p)e^{-ipx}+a^*(p)\,e^{ipx}]\frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \tag{3.4.8}$$

を得る．ここで，

$$a(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\chi(\omega_{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p}),\qquad a^*(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\chi(-\omega_{\boldsymbol{p}},-\boldsymbol{p}) \tag{3.4.9}$$

$$(p^0=\omega_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2})$$

である．

問題 3.4.2 交換関係 (3.4.2) は，次のような演算子値一般関数に対する交換関係と同値であることを示せ：

$$[a(\boldsymbol{p}),a(\boldsymbol{q})]=0,\qquad [a(\boldsymbol{p}),a^*(\boldsymbol{q})]=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}). \tag{3.4.10}$$

ヒント：交換関係 (3.4.10) は，次に述べる手順により，(3.4.2) から得られる．(3.4.3) の関数 $D(x)=D(t,\boldsymbol{x})$ は Klein-Gordon 方程式の基本解になっている：

---

[1] 慣習に従って，簡単な交換関係 (3.4.10) を満足する共変的でない生成・消滅演算子 a^*, a を導入しよう．共変的な正・負振動数の演算子 $\tilde{\varphi}^{\mp}(\boldsymbol{p})=\chi(\pm p)\,(p^0=\omega_{\boldsymbol{p}})$ は共変的な交換関係，

$$[\tilde{\varphi}^-(\boldsymbol{p}),\tilde{\varphi}^+(\boldsymbol{q})]=2\omega_{\boldsymbol{p}}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{3.4.10a}$$

を満足する．

$$KD(x)=0,\qquad D(0,\boldsymbol{x})=0,\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}D(t,\boldsymbol{x})\right]_{t=0}=\delta(\boldsymbol{x}).$$

それゆえに，$\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\boldsymbol{x})=\dot{\varphi}(t,\boldsymbol{x})$ とおくと，(3.4.2) から同時刻の φ および $\dot{\varphi}$ に対して正準交換関係

$$[\varphi(t,\boldsymbol{x}),\varphi(t,\boldsymbol{y})]=[\dot{\varphi}(t,\boldsymbol{x}),\dot{\varphi}(t,\boldsymbol{y})]=0,$$
$$[\dot{\varphi}(t,\boldsymbol{x}),\varphi(t,\boldsymbol{y})]=\frac{1}{\mathrm{i}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3.4.11}$$

を得る．Fourier 変換に移れば (3.4.10) を得ることができる[1]．

均らした演算子

$$a(u)=\int a(\boldsymbol{p})u(\boldsymbol{p})\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{p^0}}\qquad (u(\boldsymbol{p})\in\mathcal{S}(R_3)) \tag{3.4.12}$$

を導入すれば，交換関係 (3.4.10) は

$$[a(u),a(v)]=0,\qquad [a(u),a^*(v)]=(\bar{u},v)=\int u(\boldsymbol{p})v(\boldsymbol{p})\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{p_0}} \tag{3.4.13}$$

という形をとる．(3.4.12) の被積分関数がもつ規格化因子 $1/\sqrt{p^0}$ は，(3.4.13) の $(\bar{u},v)$ が V_m^+ 上の関数空間での不変な内積となるように選んだものである．演算子 $a(u)$ および $a^*(u)$ は，演算子 $\varphi(f)$ と

$$\varphi(f)=\sqrt{\pi}\,(a^*(\tilde{f}_-)+a(\tilde{f}_+)) \tag{3.4.14}$$

によって結ばれている．ただし，

$$\tilde{f}_\pm(\boldsymbol{p})=\tilde{f}(\pm p)\qquad (p^0=\omega_{\boldsymbol{p}}). \tag{3.4.15}$$

この a^* と a が粒子を生成，消滅させる演算子であることを説明しよう（第2章 1.2 節を参照せよ）．

これらは，任意のベクトル $\Phi\in\Omega$ に対して次のように作用する：

$$(a^*(u)\Phi)_n(p_1,\cdots,p_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}u(p_j)\Phi_{n-1}(p_1,\cdots,\hat{p}_j,\cdots,p_n), \tag{3.4.16}$$

$$(a(u)\Phi)_n(p_1,\cdots,p_n)=\sqrt{n+1}\int_{V_m^+}u(p)\,\Phi_{n+1}(p,p_1,\cdots,p_n)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0}. \tag{3.4.17}$$

容易に確かめられるように，

---

[1] 同時刻の交換関係 (3.4.11) から交換関係 (3.4.10) と (3.4.2) が導かれるという事実は，運動方程式と平面 $x^0=t$ の上の交換関係とから異なった時刻の交換関係が導かれることを示している．

$$(a(u)a^*(v)\Phi)_n(p_1,\cdots,p_n) = \int_{V_m^+} u(p)v(p)\frac{d^3p}{p^0}\Phi_n(p_1,\cdots,p_n)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} v(p_j)\int_{V_m^+} u(p)\Phi_n(p,p_1,\cdots,\hat{p}_j,\cdots,p_n)\frac{d^3p}{p^0}, \tag{3.4.18}$$

$$(a^*(v)a(u)\Phi)_n(p_1,\cdots,p_n) = \sum_{j=1}^{n} v(p_j)\int_{V_m^+} u(p)\Phi_n(p,p_1,\cdots,\hat{p}_j,\cdots,p_n)\frac{d^3p}{p^0}.$$

従って，交換関係 (3.4.13) はみたされている．明らかに (3.4.16) の演算子 $a^*(u)$ は粒子数（Φ の列の各要素の番号 n）を増加させ，また演算子 $a(u)$ は粒子数を減少させる．このことから，a^*, a をそれぞれ粒子の生成，消滅演算子とよぶことが正当化される．特に，$\Phi=\Psi_0$ とすると，

$$a^*(u)\Psi_0 = (0, u(p), 0, \cdots), \qquad a(u)\Psi_0 = 0 \tag{3.4.19}$$

となる．(3.4.14) ～ (3.4.17) から (3.4.5) が導かれる．

(3.4.19) の第一式において関数 $u(p)$ の果たしている二重の役割に注意しよう．左辺での u は演算子値の一般関数 $a^*(p)$ を均らす基礎関数であり，右辺では状態ベクトルの成分として一粒子状態の波動関数になっている．

一点における演算子 $\varphi(x)$ および $a(p), a^*(p)$ は Ω から Ω^* への演算子として定義することができる．それらは一般化された状態を生みだすのである．それらの作用は，

$$\varphi(x) = \int\varphi(\xi)\delta(x-\xi)\,d^4\xi = \varphi(\delta(x-\xi)),$$

$$a^*(p) = \int\delta(p-q)\sqrt{p^0}\,a^*(q)\frac{d^3q}{\sqrt{q^0}} = \sqrt{p^0}\,a^{(*)}(\delta(p-q))$$

に注意すれば (3.4.5) および (3.4.16) ～ (3.4.17) から得ることができる．

(3.4.6) と (3.4.19) から，座標あるいは運動量の定まった一粒子の状態が得られる：

$$\begin{aligned}\varphi(x)\Psi_0 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(0, e^{iqx}, 0, \cdots),\\ a^*(p)\Psi_0 &= (0, \sqrt{p^0}\,\delta(p-q), 0, \cdots).\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

われわれは今後しばしば多体の一般状態 (2.5.21) を扱うであろう．それらは，演算子 a^* を用いて次の形に表わされる：

$$\begin{aligned}|0\rangle &\equiv \Psi_0,\\ |p_1,\cdots,p_n\rangle &= a^*(p_1)\cdots a^*(p_n)|0\rangle\\ &= \frac{\sqrt{p_1^0\cdots p_n^0}}{\sqrt{n!}}\sum_{\{i\}}\delta(p_1-q_{i_1})\cdots\delta(p_n-q_{i_n}).\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

ただし，和は $(1,\cdots,n)$ のすべての置換 $\{i\}=(i_1,\cdots,i_n)$ にわたってとるものとする．

任意の n 粒子状態は，状態 (3.4.21) の重ね合わせ

$$\Phi(p_1, \cdots, p_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Phi(q_1, \cdots, q_n) \times |p_1 \cdots p_n\rangle \frac{dq_1 \cdots dq_n}{\sqrt{q_1^0 \cdots q_n^0}}$$

として表わし得る．

粒子数の演算子 (2.5.17) は，生成・消滅演算子を使えば，

$$N = \int a^*(p)\, a(p)\, d^3p \tag{3.4.22}$$

と書ける．

この式を証明するために，〈粒子数密度〉の演算子 $a^*(p)\,a(p)$ が (3.4.18) により Ω から Ω^* への演算子として，

$$(a^*(p)\,a(p)\Phi)_n(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} \delta(p-p_j)\, \Phi_n(p_1, \cdots, p_n)$$

のように作用することに注目しよう．

両辺を p で積分することにより演算子 (3.4.22) は (2.5.17) に従って作用することが確かめられる．生成演算子と消滅演算子の積で，生成演算子がどれも消滅演算子の左にあるものを《標準積》とよぶ．

標準積 $a^*(p)\,a(p)$ とちがって積 $a(p)\,a^*(p)$ は $\mathscr{H}$ のどんなベクトルにも掛けられない．このことは，(3.4.18) の第一式の右辺の第一項が，u と v を $\sqrt{p_0}\,\delta(p-q)$ とすると $\delta(0)\Phi_n = \infty$ になってしまうことの結果である．

粒子数密度の演算子が定義できたいま，他の力学量の演算子を導入することは難かしくない．たとえば，全四元運動量は，

$$P^\mu = \int a^*(p)\, a(p)\, p^\mu\, d^3p \tag{3.4.23}$$

のようになる．

問題 3.4.3　a)　いま考えている中性の自由スカラー場の理論では Wightman 関数は次の形になることを示せ：

$$w_{2n+1}(x_1, \cdots, x_{2n+1}) \equiv 0,$$
$$w_2(x_1, x_2) = F_2(x_1-x_2) = \frac{1}{\mathrm{i}} D_m^{(-)}(x_1-x_2), \tag{3.4.24}$$
$$w_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n}) = \sum_{(i,j)} \prod_{\nu=1}^{n} w_2(x_{i_\nu}, x_{j_\nu}).$$

ここで，和は，添え字，$1, \cdots, 2n$ を n 個の異なる対 $(i_1, j_1), \cdots, (i_n, j_n)$ に分ける仕方（ただし $i_\nu < j_\nu$ とする）の全体にわたる．また $D_m^{(-)}$ は，負振動数の Pauli=Jordan 関数

$$D_m^{(\pm)}(x)=\frac{\mp \mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int e^{\mathrm{i}px}\theta(\pm p^0)\delta(p^2-m^2)\,d^4p$$

$$=\frac{\varepsilon(x_0)}{4\pi}\delta(x^2)\mp\frac{m\mathrm{i}}{8\pi\sqrt{x^2}}[N_1(m\sqrt{x^2})\mp\mathrm{i}\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{x^2})]$$

$$\pm\frac{m\mathrm{i}\theta(-x^2)}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}K_1(m\sqrt{-x^2}) \qquad (3.4.25)$$

である（ヒント：x 空間での生成および消滅演算子を公式

$$\varphi^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{V_m^+}a^{(\pm)}(\boldsymbol{p})e^{\pm\mathrm{i}px}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{2p^0}} \qquad (3.4.26)$$

によって導入せよ．ただし $a(\boldsymbol{p})=a^{(-)}(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})=a^{(+)}(\boldsymbol{p})$ なる記法を用いた．$\varphi^{(-)}(x)\Psi_0=0$ および $(\varphi^{(+)}(x))^*=\varphi^{(-)}(x)$ を利用して，

$$w_2(x_1,x_2)=(\Psi_0,\varphi(x_1)\varphi(x_2)\Psi_0)$$
$$=(\Psi_0,\varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)\Psi_0)=[\varphi^{(-)}(x_1),\varphi^{(+)}(x_2)] \qquad (3.4.27)$$

を示し，これより w_2 の具体的な形を求めよ）．

b) 公式

$$[\varphi^{(-)}(x),\varphi(y)]=[\varphi(x),\varphi^{(+)}(y)]=[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(y)]=\frac{1}{\mathrm{i}}D^{(-)}(x-y)$$

および漸化式

$$w_{2n+2}(x_1,\cdots,x_{2n+2})=\sum_{j=1}^{2n+1}w_2(x_j,x_{2n+2})\,w_{2n}(x_1,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_{2n+1})$$

を考慮し，n についての帰納法を用いて w_{2n} に対する等式 (3.4.24) を証明せよ．ただし変数 x_j につけた記号 ⌒ は（前と同様に）その変数を除くことを意味する．

問題 3.4.4 ζ_i を過去的の管状領域 T^- に属する複素ベクトルとして $F_{2n}(\zeta_1,\cdots,\zeta_{2n-1})$ の解析的な表式を見いだせ（2.2 節の定理 3.2.2 を参照）．

問題 3.4.5 自由場に対しては $n>2$ の実質真空期待値 w_n^T は 0 に等しいことを示せ．

問題 3.4.6 a) いま考えている自由場の場合について (3.3.18) のイデアル $\mathcal{T}$ をつくれ[1]．

b) 回転双曲面 $V_m^{+(n)}$ の積の上で定義された対称関数の有限個の列のつくる空間 Ω（第 2 章 5.1 節を参照）と商空間 $\Omega=\Omega_0/\mathcal{T}$ とのあいだの対応を見い出せ．

4.2. 荷電スカラー場

荷電をもつ場は，中性の場とちがってエルミート的でない演算子 $\varphi(x)$ で記述される．自由な複素スカラー場 φ は，エルミートな場と同じく Klein=Gordon 方程式 (3.4.1) をみたし，かつ交換関係

$$[\varphi(f),\varphi(g)]=[\varphi^*(f),\varphi^*(g)]=0,$$

$$[\varphi^*(f),\varphi(g)]=[\varphi(f),\varphi^*(g)]=\frac{1}{\mathrm{i}}\iint f(x)\,D(x-y)\,g(y)\,d^4x\,d^4y \qquad (3.4.29)$$

を満足する演算子値の一般関数 $\varphi(f)$ として定義される．

---

[1] (3.3.18) のイデアル $\mathcal{T}$ は，

$$f_n(x_1,\cdots,x_n)=K_{x_j}g_n(x_1,\cdots,x_n) \qquad (3.4.28)$$

の形の基底関数をもつ両側イデアル $\mathcal{T}_K$ を含むことに注意せよ．ここに，$g_n\in\mathcal{S}(R_{4n})$ であり，K_{x_j} は変数 x_j についての Klein=Gordon 演算子である．

任意の複素場 $\varphi(x)$ は自然な仕方で実部と虚部に分けられる：

$$\sqrt{2}\,\varphi(x) = \varphi_1(x)+\mathrm{i}\varphi_2(x), \quad \sqrt{2}\,\varphi^*(x) = \varphi_1(x)-\mathrm{i}\varphi_2(x).$$

ただし，φ_1 および φ_2 はエルミート場である．容易にわかるように，それぞれの場 $\varphi_\alpha, \alpha=1,2$ が同じ質量 m の交換関係 (3.4.2) をみたし，かつ $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]=0$ であれば，交換関係 (3.4.29) は自動的にみたされる．

このようにして，自由な複素場は互いに独立な自由エルミート場の組に還元される．しかし，興味があるのは理論が位相変換（ゲージ変換）

$$\varphi(x) \longmapsto e^{\mathrm{i}\lambda}\varphi(x), \qquad \varphi^*(x) \longmapsto e^{-\mathrm{i}\lambda}\varphi^*(x) \tag{3.4.30}$$

に対して不変な場合だけであって，この場合には場を実部と虚部に分けることにはいかなる物理的意味もない．この不変性は，Wightman 関数でいえば，φ と φ^* の数が異なる積の真空期待値は 0 でなければならないことを意味する．

(3.4.30) の不変性があるときにだけ，場 φ に保存する電荷をもたせることができる．この場合，一粒子状態の空間 $\mathscr{H}_1$ は，回転双曲面 V_m^+ の上で与えられ，かつ《+》，《−》という二つの値をとる変数 e（すなわち，電荷の符号）に依存する関数 $\Phi(p, e)$ からなる．定義により異なる電荷をもつ関数 $\Phi(p,+)$ と $\Psi(p,-)$ は互いに直交する．電荷のちがう関数の和で表わされるような状態は物理的には実現されないから（電荷が一つの超選択則を定めている．第2章 1.3 節を参照），空間 $\mathscr{H}_1$ はコヒーレントな部分空間の直和に分解される：

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{1+} \oplus \mathscr{H}_{1-}.$$

n 粒子状態の空間 $\mathscr{H}_n$ は，通常のやり方で（第2章 5.1 節参照）空間 $\mathscr{H}_1$ の n 個の対称テンソル積として定義される．定義により演算子 φ^* は系の電荷を増し，φ は減少させる．特に，

$$\varphi(f)\Psi_0 = \sqrt{\pi}\,(0, \tilde{f}(-p_1)\,\delta_{e,-1}, 0, \cdots),$$
$$\varphi^*(f)\Psi_0 = \sqrt{\pi}\,(0, \tilde{f}(-p_1)\,\delta_{e,+1}, 0, \cdots).$$

問題　3.4.7　a)　(3.4.1) および (3.4.29) に従って，状態ベクトル

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_1(p,e), \cdots, \Phi_n(p_1,e_1; p_2,e_2; \cdots; p_n,e_n), \cdots)$$

に対する演算子 $\varphi(f)$, $\varphi^*(f)$ の作用を定めよ．ここに，$e_j=\pm1$, $p_j\in V_m^+$であり，Φ_n は変数 (p_j, e_j) の置き換えについて対称とする．

b)　電荷の演算子を求めよ（ヒント：場 $\varphi(x)$ と公式

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \{a^{(+)}(\boldsymbol{p})e^{-\mathrm{i}px}+a^{*(-)}(\boldsymbol{p})e^{\mathrm{i}px}\}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{2p_0}}, \tag{3.4.31}$$

によって結ばれる正電荷の粒子の生成・消滅演算子 $a^{*(+)}, a^{(+)}$ および負電荷の粒子の生成・消滅演

算子 $a^{*(-)}, a^{(-)}$ を導入せよ).

問題 3.4.8 電荷をもつスカラー場の Wightman 関数を求めよ. φ と φ^* の数がちがう関数は 0 になることに注意せよ[1].

4.3. 自由スピノル場

質量 m をもつ自由スピノル場とは, 演算子値のスピノル型一般関数 $\psi(x) = \{\psi^\alpha(x)\}$ として表わされるものである. ただし, $\psi(x)$ は Dirac 方程式 (2.4.35) をみたし, 同時刻で次の交換関係

$$\begin{aligned}[\psi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \psi^\beta(t,\boldsymbol{y})]_+ &= [\psi^{*\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \psi^{*\beta}(t,\boldsymbol{y})]_+ = 0,\\ [\psi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \psi^{*\beta}(t,\boldsymbol{y})]_+ &= \delta^{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

に従う (ここで, 記号 $[\ ,\ ]_+$ は (3.1.9) と同様に反交換関係を示す).

スカラー場の場合の (3.4.2) と同じように, これらの交換関係を相対論的共変な形に書くこともできる. それを行なうために, Dirac 方程式の一般解を Fourier 積分の形に書こう[2] ((3.4.31) を参照):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{\zeta=-1/2}^{1/2}\left\{b_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})\,v_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}px}+b_\zeta^{*(-)}(\boldsymbol{p})\,v_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p})\,e^{\mathrm{i}px}\right\},\\ \tilde{\psi}(x) &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{\zeta=-1/2}^{1/2}\left\{b_\zeta^{*(+)}(\boldsymbol{p})\,\tilde{v}_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})\,e^{\mathrm{i}px}+b_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p})\,\tilde{v}_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p})\,e^{-\mathrm{i}px}\right\}.\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

ここに $v_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ は定まった方向にスピン成分 $\zeta = \pm 1/2$ をもつ 4 成分スピノルで次の方程式をみたすものである:

$$(\hat{p}\mp m)\,v_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p}) = 0 \qquad (p^0 = \omega_{\boldsymbol{p}}). \tag{3.4.34}$$

問題 3.4.9 (3.4.34) を使って (3.4.33) の ψ が実際に Dirac 方程式 (2.4.35) をみたすことを示せ.

スピノル $v_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ は, 第 2 章 4.2 節で扱ったスピノル $u^{r(\pm)}(\boldsymbol{p})$ と (2.5.48) を通じて結ばれていることに注意しよう. それらは, 正規直交関係 (2.5.50) をみたしている.

---

[1] この性質は電荷の保存則を表わしており, 電荷をもつ自由場の理論が変換 (3.4.30) に対し不変なことの結果である. 同じことが相互作用のある荷電場の理論でも成り立たねばならない.

[2] 慣例に従って, ここでは複素スピノル場だけを考えることにしよう. 中性なスピノル場をつくることも, もちろん可能であって, そのときには, $b^{(+)} = b^{(-)}$ となる (Majorana 場, Majorana (1937)). Majorana 表示 (2.4.32) では Majorana 場はエルミート的になるが, しかし, それにもかかわらず, Poincaré 群の二価表現に従って変換されるという理由で, この場は観測され得ない.

関係式 (2.4.52) やスピン成分についての和の公式 (2.4.53), (2.4.54) をいまの場合に移せば,

$$\bar{v}_\eta^{(\pm)}(\boldsymbol{p})\,v_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p}) = \frac{\omega}{m}\delta_{\eta\zeta},\quad \bar{v}_\eta^{(+)}(\boldsymbol{p})\,v_\zeta^{(-)}(-\boldsymbol{p}) = 0, \tag{3.4.35}$$

$$2\sum_\zeta v_\zeta^{(\pm)\alpha}(\boldsymbol{p})\,\tilde{v}_{\zeta\beta}^{(\pm)}(\boldsymbol{p}) = \left(\frac{\hat{p}}{m}\right)_\beta^\alpha \pm \delta_\beta^\alpha \tag{3.4.36}$$

となる.

(3.4.33) という表示と (2.5.51) の展開との関係に注意しよう(演算子 $b_\zeta^{(e)}(\boldsymbol{p})$ が, 波動関数 $\Psi(p,\zeta,e)$ の役割を演じている).

同時刻の交換関係 (3.4.32) から, 演算子値の一般関数 $b_\zeta^\pm(\boldsymbol{p})$ とそのエルミート共役について次の交換関係

$$\begin{gathered}[b_\eta^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{q})]_+ = [b_\eta^{(\mp)}(\boldsymbol{p}), b_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{q})]_+ = [b_\eta^{*(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_\zeta^{*(\pm)}(\boldsymbol{q})]_+ = 0,\\ [b_\eta^{*(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_\zeta^{(\mp)}(\boldsymbol{q})]_+ = 0,\ [b_\eta^{*(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{q})]_+ = \delta_{\eta\zeta}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\end{gathered} \tag{3.4.37}$$

が導かれる. (3.4.37) を得るためには, (3.4.33) で $t=0$ とおいて (三次元の) Fourier 逆変換を行ない (2.5.50) を使えばよい. たとえば, $b_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})$ なら

$$b_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p}) = \tilde{v}_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\psi(0,\boldsymbol{x})\,e^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}d^3\boldsymbol{x} \tag{3.4.38}$$

を得る. これらと (3.4.32) とから交換関係 (3.4.37) は直ちに出てくる.

逆に, 交換関係 (3.4.37) を使えば場の演算子 $\psi(x), \tilde{\psi}(x)$ に対する共変的な交換関係

$$\begin{aligned}&[\psi^\alpha(x), \psi^\beta(y)]_+ = [\tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta(y)]_+ = 0,\\ &[\psi^\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta(y)]_+ = \frac{1}{\mathrm{i}}S_\beta^\alpha(x-y)\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

が得られる. ここに,

$$\begin{aligned}S(x) &= (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)D(x)\\ &= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{V_m^+}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\omega}[e^{-\mathrm{i}px}(\hat{p}+m)+e^{\mathrm{i}px}(\hat{p}-m)]\\ &= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\varepsilon(p^0)\,\delta(p^2-m)\,(\hat{p}-m)\,e^{\mathrm{i}px}\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

である ((3.4.39), (3.4.40) を導く際に (3.4.36) を用いた).

反交換関係 (3.4.37) あるいは (3.4.39) をみたし, 空間 $\mathcal{H}$ (1/2) (第2章 5.3節) に働く演算子である関数が実際に存在することを示そう:——

演算子 $b_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ とそのエルミート共役は, 空間 Ω (1/2) から Ω^* (1/2) への演算子とし

て，ちょうど荷電スカラー場の演算子 $a^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ を定義したときと同様に，すなわち，演算子 $\psi^*(x)$ は系の電荷を1単位だけ増し，$\psi(x)$ は減らすということから出発して定義できる．演算子 $b_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})$ は粒子を消す演算子と解釈され，$b_\zeta^{*(-)}(\boldsymbol{p})$ は反粒子を創る演算子と考えられる．同様に，$b_\zeta^{*(+)}(\boldsymbol{p})$ は粒子を〈創り〉，$b_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p})$ は反粒子を〈消す〉演算子である．

この解釈によって，

$$\begin{aligned} &b_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p})|0\rangle = b_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0, \\ &b_\zeta^{*(+)}(\boldsymbol{p})|0\rangle = |\boldsymbol{p}, \zeta, e\rangle, \\ &b_\zeta^{*(-)}(\boldsymbol{p})|0\rangle = |\boldsymbol{p}, \zeta, -e\rangle \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

を得る．

ここに，$|\boldsymbol{p}, \zeta, e>\in \Omega^*_{m1/2}$ は一粒子状態を表わす一般化された状態ベクトルで，粒子の運動量は $p=(\omega_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p})$，スピンの第3成分は ζ，電荷は $e=\pm$ である（e は粒子の電荷を表わす．電子なら $e=-1$，陽子なら $e=+1$）．Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ (1/2) の演算子

$$b_\zeta^{(e)}(f) = \int b_\zeta^{(e)}(\boldsymbol{p}) f(\boldsymbol{p}) \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{p^0}} \tag{3.4.42}$$

とその共役演算子は，次のように作用する（(3.4.16) および (3.4.17) を参照せよ）：

$$\begin{aligned} &(b_\zeta^{(e)}(f)\Phi)_n(p_1\zeta_1e_1;\cdots;p_n\zeta_ne_n) \\ &\quad = \sqrt{n+1}\int_{V_m^+} f(\boldsymbol{p})\Phi_{n+1}(p\zeta e;p_1\zeta_1e_1;\cdots;p_n\zeta_ne_n)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0}, \\ &(b_\zeta^{*(e)}(f)\Phi)_n(p_1\zeta_1e_1;\cdots;p_n\zeta_ne_n) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n(-1)^{j+1}\Phi_{n-1}(p_1\zeta_1e_1;\cdots;\widehat{p_j\zeta_je_j};\cdots;p_n\zeta_ne_n)f(p_j)\delta_{\zeta\zeta_j}\delta_{ee_j}. \end{aligned} \tag{3.4.43}$$

問題 3.4.10 演算子 (3.4.43) は (3.4.42) および (3.4.37) から出てくる交換関係

$$\begin{aligned} &\left[b_\zeta^{(e)}(f), b_{\zeta'}^{(e')}(g)\right]_+ = \left[b_\zeta^{*(e)}(f), b_{\zeta'}^{*(e')}(g)\right]_+ = 0, \\ &\left[b_\zeta^{(e)}(f), b_{\zeta'}^{*(e')}(\overline{g})\right]_+ = (g,f)\delta_{\zeta\zeta'}\delta_{ee'} = \delta_{\zeta\zeta'}\delta_{ee'}\int_{V_m^+}\overline{g}(\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0} \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

を満足することを示せ（ヒント：(3.4.43) から出発して，(3.4.18) に類似した式を求めよ）．

もし $f(\boldsymbol{p})\in \mathcal{S}(R_3)$ ならば，演算子 (3.4.43) は空間 Ω (1/2) をそれ自身のなかに写し，核型空間の位相に関して連続である．もう一つの注意すべきことは，Bose 粒子の場合とちがって，この演算子がフェルミオンの Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ (1/2) 全体で定義される有界な

演算子であることである．この命題を証明するためには，均らす関数 $f(\boldsymbol{p})$ は $\omega_{\boldsymbol{p}}^{-1}$ を重みとして三次元空間全体で二乗可積分であること，すなわち，(f,f) を (3.4.44) のように定義したとき $(f,f)<+\infty$ ということを要求すれば十分である（この関数が微分できることや急減少することなどを要求する必要はない）．すなわち，$f\in\mathcal{S}(R_3)$ でなくてよいのである．

実際に，(3.4.44) より

$$\begin{aligned}&\|b_\zeta^{(e)}(f)\Phi\|^2+\|b_\zeta^{*(e)}(\bar{f})\Phi\|^2\\&\quad=(b_\zeta^{(e)}(f)\Phi,b_\zeta^{(e)}(f)\Phi)+(b_\zeta^{*(e)}(\bar{f})\Phi,b_\zeta^{*(e)}(\bar{f})\Phi)\\&\quad=(\Phi,[b_\zeta^{*(e)}(\bar{f}),b_\zeta^{(e)}(f)]_+\Phi)=\int_{V_m^+}|f(\boldsymbol{p})|^2\frac{d^3\boldsymbol{p}}{p^0}(\Phi,\Phi)\end{aligned}\tag{3.4.45}$$

である．従って，$f(\boldsymbol{p})\in\mathcal{L}_2(V_m^+)$ でありさえすれば $b_\zeta^{(e)}(f)$ および $(b_\zeta^{(e)}(f))^*$ はともにノルムに関して有界である．このことから，また，次の演算子 $\psi(\vec{g})=\psi^\alpha(g_\alpha)$ もノルムに関して有界なことがわかる：なぜなら，

$$\psi(\vec{g})=\sqrt{\pi m}\sum_{\zeta=-1/2}^{1/2}[b_\zeta^{(+)}(f_\zeta^+)+b_\zeta^{*(-)}(f_\zeta^-)].\tag{3.4.46}$$

ここに，

$$f_\zeta^\pm(\boldsymbol{p})=v_\zeta^{\alpha(\pm)}(\boldsymbol{p})\,\tilde{g}_\alpha(\mp p)\qquad(p^0=\omega_{\boldsymbol{p}})\tag{3.4.47}$$

である．

スピノル粒子数の密度の演算子は，

$$\begin{aligned}&(b_\zeta^{*(e)}(\boldsymbol{p})b_\zeta^{(e)}(\boldsymbol{p})\Phi)_n(p_1\zeta_1e_1;\cdots;p_n\zeta_ne_n)\\&\quad=\Phi_n(p_1\zeta_1e_1;\cdots;p_n\zeta_ne_n)\sum_{j=1}^n\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_j)\,\delta_{\zeta\zeta_j}\delta_{ee_j}\end{aligned}\tag{3.4.48}$$

によって定義される．これから，粒子数 N，電荷 Q，スピンの第3成分 S，四元運動量 P^μ などの演算子にたいする次のような表式が見い出される：

$$N=\sum_{e=\pm}\sum_{\zeta=-1/2}^{1/2}\int b_\zeta^{*(e)}(\boldsymbol{p})b_\zeta^{(e)}(\boldsymbol{p})\,d^3\boldsymbol{p},\tag{3.4.49}$$

$$Q=\sum_{e=\pm}e\sum_{\zeta=-1/2}^{1/2}\int b_\zeta^{*(e)}(\boldsymbol{p})b_\zeta^{(e)}(\boldsymbol{p})\,d^3\boldsymbol{p},\tag{3.4.50}$$

$$S^3=\sum_{e=\pm}\sum_\zeta\zeta\int b_\zeta^{*(e)}(\boldsymbol{p})b_\zeta^{(e)}(\boldsymbol{p})\,d^3\boldsymbol{p},\tag{3.4.51}$$

$$P^{\mu}=\sum_{e=\pm}\sum_{\zeta}\int p^{\mu}b_{\zeta}^{*(e)}(\boldsymbol{p})\,b_{\zeta}^{(e)}(\boldsymbol{p})\,d^3\boldsymbol{p}. \tag{3.4.52}$$

場の演算子 $\psi,\tilde{\psi}$ の積の真空期待値は，ψ と $\tilde{\psi}$ との数が等しくないとき0になる．自由スピノル場の二点 Wightman 関数でゼロにならないものは，

$$\left.\begin{aligned}w_{\psi\tilde{\psi}}(x_1,x_2)&=\langle 0|\psi(x_1)\tilde{\psi}(x_2)|0\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}}S_m^{(-)}(x_1-x_2),\\ w_{\tilde{\psi}\psi}(x_1,x_2)&=\langle 0|\tilde{\psi}(x_1)\psi(x_2)|0\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}}S_m^{(+)}(x_2-x_1)\end{aligned}\right\} \tag{3.4.53}$$

という形をしている．ここに，

$$\begin{aligned}S^{(\pm)}(x)&=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{V_m^+}(\hat{p}\mp m)\,e^{\pm\mathrm{i}px}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p^0}\\&=\frac{\pm\,\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{V_m^+}(\hat{p}-m)\,\theta(\pm p^0)\,e^{\mathrm{i}px}\,\delta(p^2-m^2)\,d^4p\\&=(\mathrm{i}\hat{\partial}+m)\,D_m^{(\pm)}(x)\end{aligned} \tag{3.4.54}$$

である．

スカラー場に対する正，負振動数の関数 $D_m^{(\pm)}(x)$ は (3.4.25) によって定義されている．スカラーの場合に対する公式 (3.4.24) と同様に，高次の Wightman 関数は二点関数の積の和で表わされる．たとえば，

$$\left.\begin{aligned}w_{\psi\psi\tilde{\psi}\tilde{\psi}}(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\langle 0|\psi(x_1)\,\psi\,(x_2)\tilde{\psi}(x_3)\tilde{\psi}(x_4)|0\rangle\\&=w_{\psi\tilde{\psi}}(x_1,x_4)\,w_{\psi\tilde{\psi}}(x_2,x_3)-w_{\psi\tilde{\psi}}(x_1,x_3)\,w_{\psi\tilde{\psi}}(x_2,x_4),\\ w_{\psi\tilde{\psi}\psi\tilde{\psi}}(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\langle 0|\psi\,(x_1)\tilde{\psi}(x_2)\psi(x_3)\tilde{\psi}(x_4)|0\rangle\\&=w_{\psi\tilde{\psi}}(x_1,x_2)\,w_{\psi\tilde{\psi}}(x_3,x_4)+w_{\psi\tilde{\psi}}(x_1,x_4)\,w_{\psi\tilde{\psi}}(x_2,x_3)\end{aligned}\right\} \tag{3.4.55}$$

などと書ける．

4.4. 第二量子化した場による不連続変換 P, T, C の表現

時間，空間の反転や荷電共役を行なったときの量子化されたスピノル場の振舞いを調べよう．ここでは自由場を例にとるが，結果の式は一般の場合にも成り立つことを注意しておく．

第2章 4.1 節の議論と共変な場の演算子の一般的な定義 (1.1 節) に従って，スピノルに対する変換 I_s (すなわち P)，I_t (すなわち T) および I_c (すなわち C) を次のように定義しよう：空間反転，すなわち，四元ベクトル x を $I_s(x^0,\boldsymbol{x})=(x^0,-\boldsymbol{x})$ のように変える変換 I_s に対しては，

$$
\begin{aligned}
U(I_s)\,\psi(x)\,U^{-1}(I_s) &= \eta_s\gamma^0\psi(I_s x) \\
U(I_s)\,\widetilde{\psi}(x)\,U^{-1}(I_s) &= \bar{\eta}_s\gamma^0\widetilde{\psi}(I_s x) \qquad (|\eta_s| = 1)
\end{aligned}
\tag{3.4.56}
$$

のようなユニタリ演算子 $U(I_s)$ を対応させよう．

時間反転 I_t には，

$$
\begin{aligned}
U(I_t)\psi(x)\,U^{-1}(I_t) &= \eta_t\gamma^5 C^{-1}\psi(I_t x) \\
U(I_t)\widetilde{\psi}(x)\,U^{-1}(I_t) &= -\bar{\eta}_t\widetilde{\psi}(I_t x)\,\gamma^5 C = -\bar{\eta}_t\gamma^5 C^{-1}\widetilde{\psi} \qquad (|\eta_t| = 1)
\end{aligned}
\tag{3.4.57}
$$

という反ユニタリ演算子 $U(I_t)$ を対応させよう．

スピノルの荷電共役は，次のようなユニタリ演算子 $U(I_c)$ として定義しよう：

$$
\begin{aligned}
U(I_c)\,\psi(x)\,U^{-1}(I_c) &= \eta_c C\widetilde{\psi}(x) \equiv \eta_c\psi^c(x) \\
U(I_c)\widetilde{\psi}(x)\,U^{-1}(I_c) &= \bar{\eta}_c C^{-1}\psi(x) \\
&= -\bar{\eta}_c C\psi(x) \equiv \bar{\eta}_c\widetilde{\psi}^c(x) \qquad (|\eta_c| = 1).
\end{aligned}
\tag{3.4.58}
$$

(3.4.56) ～ (3.4.58) は，一見，波動関数に対する不連続変換の公式（第2章 4.3節）に似ているが，それにもかかわらず〈第二量子化された〉演算子 $U(I_s), U(I_t)$ および $U(I_c)$ は異なった意味をもっていることに注意しよう．これらは Fock 空間の演算子であって，生成・消滅演算子 $b^{*(\pm)}(\boldsymbol{p})$ や $b^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ と交換しない．他方，数係数（この場合はスピノルの成分 $v^{\alpha(\pm)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})$）は，ユニタリ演算子 $U(I_s)$ および $U(I_c)$ とは交換し，また，反ユニタリ演算子 $U(I_t)$ と入れかわる際には複素共役に変わるのである．

(3.4.56)～(3.4.58) から，不連続変換の際の消滅演算子の変換性がわかる：

$$
\begin{aligned}
U(I_s)b^{(+)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})\,U^{-1}(I_s) &= \eta_s b^{(+)}_{\zeta}(-\boldsymbol{p}), \\
U(I_s)b^{(-)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})\,U^{-1}(I_s) &= -\bar{\eta}_s b^{(-)}_{\zeta}(-\boldsymbol{p})\,;
\end{aligned}
\tag{3.4.59}
$$

$$
\begin{aligned}
U(I_t)b^{(+)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})\,U^{-1}(I_t) &= \eta_t \mathrm{i}\,(-1)^{\frac{1}{2}-\zeta}b^{(+)}_{-\zeta}(-\boldsymbol{p}), \\
U(I_t)b^{(-)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})\,U^{-1}(I_t) &= -\bar{\eta}_t \mathrm{i}\,(-1)^{\frac{1}{2}-\zeta}b^{(-)}_{-\zeta}(-\boldsymbol{p})\,;
\end{aligned}
\tag{3.4.60}
$$

$$
\begin{aligned}
U(I_c)b^{(+)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})\,U^{-1}(I_c) &= \eta_c b^{(-)}_{\zeta}(\boldsymbol{p}), \\
U(I_c)b^{(-)}_{\zeta}(\boldsymbol{p})\,U^{-1}(I_c) &= \bar{\eta}_c b^{(+)}_{\zeta}(\boldsymbol{p}).
\end{aligned}
\tag{3.4.61}
$$

これから生成演算子の変換性を導くために，ユニタリ演算子についてもまた反ユニタリ演算子 U についても任意の演算子 b とのあいだで $(UbU^{-1})^* = Ub^*U^{-1}$ の成り立つことに注意しよう．

問題　3.4.11　場の演算子 $\psi(x)$ の Fourier 分解 (3.4.33) を使って，公式 (3.4.59)～(3.4.61) が公式 (3.4.56)～(3.4.58) と同等であることを示せ．

（ヒント：最初に，Dirac 方程式に従うスピノルに対して恒等式

$$\gamma^0 v_\zeta^{(\pm)}(-\boldsymbol{p}) = \pm v_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), \tag{3.4.62}$$

$$\gamma^5 C^{-1} v_\zeta^{(\pm)}(-\boldsymbol{p}) = \pm \mathrm{i}(-1)^{\frac{1}{2}+\zeta} v_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), \tag{3.4.63}$$

$$C\tilde{v}_\zeta^{(\pm)}(\boldsymbol{p}) \equiv v_\zeta^{C(\pm)}(\boldsymbol{p}) = (-1)^{\frac{1}{2}+\zeta} v_\zeta^{(\mp)}(\boldsymbol{p}) \tag{3.4.64}$$

の成立することを示し，そのあとで反ユニタリ演算子 $U(I_t)$ やユニタリ演算子 $U(I_s), U(I_c)$ を用いよ.

(3.4.62)～(3.4.64) を導くには，はじめ γ^0 が対角的であるような表示 (2.4.31) でそれらの式をチェックするのが便利だろう．この表示ではスピノル v は，

$$v_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \omega+m & e_\zeta \\ \boldsymbol{p\sigma} & e_\zeta \end{pmatrix}, \qquad \tilde{v}_\zeta^{(+)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \omega+m & e_\zeta \\ -\overline{\boldsymbol{p\sigma}} & e_\zeta \end{pmatrix},$$

$$v_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p\sigma} & e_{-\zeta} \\ \omega+m & e_{-\zeta} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{v}_\zeta^{(-)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{p\sigma}} & e_{-\zeta} \\ -\omega-m & e_{-\zeta} \end{pmatrix}, \tag{3.4.65}$$

$$N^2 = 2m(\omega+m), \qquad e_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる ((2.4.55) を参照).

そのあとで，結果の (3.4.62)～(3.4.64) が表示の選び方によらないことを確かめるのは容易であろう)

不連続変換の変換法則に関して，いくつかの注意をしておこう：——スピノルの荷電共役演算子 (2.4.25) は反ユニタリであるが，〈第二量子化された〉演算子 $U(I_c)$ (3.4.58), (3.4.61) はユニタリである．(3.4.61) で定義された演算子 $U(I_c)$ のユニタリ性は，交換関係 (3.4.39) が荷電共役変換に対して不変でなければならないという要請から結果として得られる．交換関係の不変性を確かめるときには，等式

$$C^{-1}S(x-y)C = -S^T(y-x) \tag{3.4.66}$$

を使う．この式の証明は読者におまかせしよう．これに対し，交換関係の時間反転に関する不変性を成り立たせるためには，(3.4.60) で定義された演算子 $U(I_t)$ が反ユニタリであることを要求しなければならない．このことから (3.4.57) が導かれる．演算子 $U(I_t)$ が反ユニタリでなければならないもっと一般的な理由は，すでに第2章 3.3 節において述べた (そのときは，物理的な状態のエネルギーが正でなければならないという要求から出発した)．公式 (3.4.59) および (3.4.60) をみると，空間反転は粒子の三次元運動量の符号を変えるだけであるが，時間反転は，運動量の符号だけでなくスピン成分などの符号も変えていることがわかる．三つの演算子 $U(I_s), U(I_c), U(I_t)$ の全部の積 (いわゆる *TPC* 演算子) は，粒子を〈運動量は同じでスピン成分が反対〉の反粒子にかえる演算子になっている．

スピノル場の変換性から $\tilde{\psi}O\psi$ の形をした双一次式の不連続変換のもとでの振舞いを

知ることは容易である．直接に物理的な意味をもつのはこの形の式である．たとえば，電流の演算子は，

$$j_\mu(x) = -e : \tilde{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) : \tag{3.4.67}$$

という標準積の形で与えられる（スピノル場の標準積とは，積のなかの生成演算子がすべて消滅演算子の左側にくるように並べたものとして定義されていることを思い出そう．ただし，そのとき必要な並べかえはすべての演算子が反可換だとして行なうのである．文献［4］を参照）．

問題　**3.4.12**　次式を証明せよ：

$$U(I_c)j_\mu(x)U^{-1}(I_c) = -j_\mu(x), \tag{3.4.68}$$

$$U(I_t)j_\mu(x)U^{-1}(I_t) = g_{\mu\mu}j_\mu(I_t x), \tag{3.4.69}$$

$$U(I_s)j_\mu(x)U^{-1}(I_s) = g_{\mu\mu}j_\mu(I_s x). \tag{3.4.70}$$

これまでのところ，われわれは不連続変換をやや形式的に考察してきた．すなわち，量子化された場に対して変換法則を課しただけであった．しかし，ここで次の問題が生ずる．すなわち，条件（3.4.56）～（3.4.58）をみたす演算子 $U(I_s), U(I_c)$ および $U(I_t)$ は実際に存在するだろうか．これらの条件だけでどの程度まで定められるだろうか．さらに状態ベクトルにどのように作用するだろうか？

もし，完全性の条件 VII（1.3節）が成り立っていれば，その上に，真空を不変にする

$$U(I_s)\Psi_0 = U(I_t)\Psi_0 = U(I_c)\Psi_0 = \Psi_0 \tag{3.4.71}$$

という付加条件をみたす演算子 U をつくることは容易である．

実際に，条件 VII によれば，$\mathscr{H}$ の任意のベクトルは

$$\Phi_n = \int\cdots\int \psi^{\lambda_1}(x_1)\cdots\psi^{\lambda_n}(x_n)f(x_1,\cdots,x_n)\,d^4x_1\cdots d^4x_n\Psi_0$$

という形のベクトルの線形結合で近似できる．ただし，$\lambda_j = \pm 1$ で $\psi^{+1}(x) \equiv \psi(x)$，$\psi^{-1}(x) \equiv \tilde{\psi}(x)$ とする．ベクトル Φ_n に対する U の作用は，（3.4.71）により，

$$U\Phi_n = \int\cdots\int f'(x_1,\cdots,x_n)U\psi^{\lambda_1}(x_1)U^{-1}\cdots U\psi^{\lambda_n}(x_n)U^{-1}d^4x_1\cdots d^4x_n\Psi_0$$

で与えられる．ただし，$U(I_s)$ および $U(I_c)$ に対しては $f' = f$ とし，$U(I_t)$ に対しては $f' = \bar{f}$ であるとする．

このようにして稠密な集合 Ω 全体で定義された演算子 U は，連続性によって空間 $\mathscr{H}$ 全体に拡大でき，ユニタリ（反ユニタリ）演算子になる．

上で行なった議論はまた，条件（3.4.71）を付け加えれば場の変換則から演算子 U が一

意的に定められることを示している．そこで今度は，要請 (3.4.71) が残りの条件とどの程度まで独立かということが問題になる．いいかえれば，(3.4.56) ～ (3.4.58) が成り立つことだけを仮定したのでは演算子 U の定義になにか任意性が残るだろうかという問題である．実はこの場合，位相因子を除いて各演算子が定まってしまうことが示される．このことを，演算子 $U(I_s)$ を例として確かめよう．

まず，Poincaré 群の演算子の変換性を調べよう．(3.4.56) と (3.1.6) を用いて，

$$[\psi^\lambda(x), U(I_s)\,U(\underset{\sim}{a}, A)\ U^{-1}(I_s)U^{-1}(\underset{\sim}{I_s a}, I_s A I_s^{-1})] = 0 \qquad (3.4.72)$$

を得る．ここに，

$$\underset{\sim}{I_s a} = \tilde{a} = \varepsilon\tilde{a}\varepsilon^{-1}, \qquad I_s A I_s^{-1} \equiv \varepsilon\bar{A}\varepsilon^{-1} = A^{*-1}$$
$$(\lambda = \pm 1,\ \ A \in SL(2)) \qquad (3.4.73)$$

とする．これより場の既約性（定理 3.1.1）によって，

$$U(I_s)\,U(\underset{\sim}{a}, A)\ U^{-1}(I_s)U^{-1}(\underset{\sim}{I_s a}, I_s A I_s^{-1}) = \omega\mathbf{1} \qquad (3.4.74)$$

が導かれる．ただし $|\omega| = 1$．等式 (3.4.74) に右から $U(\underset{\sim}{I_s a}, I_s A I_s^{-1})\,U(I_s)$ をかけ，得られた式の両辺を真空に作用させると，

$$U(\underset{\sim}{I_s a}, I_s A I_s^{-1})U(I_s)\Psi_0 = \omega^{-1}U(I_s)\Psi_0 \qquad (3.4.75)$$

となる．この式は，ベクトル $U(I_s)\Psi_0$ が固有 Poincaré 群のもとで不変なことを示している．ところが，スペクトル条件（第 2 章 3.2 節）によれば，真空は唯一の不変状態である．従って，

$$U(I_s)\Psi_0 = e^{i\alpha}\Psi_0 \qquad (3.4.76)$$

でなければならない．この結果を (3.4.75) に代入すれば $\omega = 1$ が得られる．よって，

$$U(I_s)\,U(\underset{\sim}{a}, A)\,U^{-1}(I_s) = U(\underset{\sim}{I_s a},\ I_s A I_s^{-1}). \qquad (3.4.77)$$

演算子 $U(I_s)$ の真空に対する作用 (3.4.76) がわかっていれば，(3.4.56) を使って上と同じようにすると，まず Ω のすべてのベクトルに対する $U(I_s)$ の作用が見いだされる．そのあと，連続性によってそれを Hilbert 空間全体にひろげる．

ここで得られた結果は，一般化して次の定理にまとめることができる：——

[定理 3.4.1] 一意的で巡回的な真空 Ψ_0 をもつスピノル場の理論において，(3.4.56) をみたすユニタリ演算子 $U(I_s)$ が存在するものとする．このとき，演算子 $U(I_s)$ は位相因子 $e^{i\alpha}$ の任意性を除いて定まり，真空に対する作用は (3.4.76)

で与えられる．さらに，$(\underset{\sim}{a}, A) \in \mathcal{P}_0$ とし，この群の自己同形写像 $(\underset{\sim}{a}, A) \longmapsto (\underset{\sim}{I_s a}, I_s A I_s^{-1})$ が (3.4.73) で与えられたとすると，(3.4.77) が成り立つ．演算子 $U(I_s)$ がさらに付加的条件 (3.4.71) をみたしていると，それは一義的に定まってしまう．

以後，真空の不変性の条件 (3.4.71) は常にみたされていると仮定することにしよう．

問題 3.4.13 a) (3.4.59)～(3.4.61) および (3.4.71) を用いて，もしスピノル場が既約ならば，

$$U^2(I_c) = U^4(I_t) = [U(I_c)U(I_s)]^4 = [U(I_t)U(I_s)]^4 = 1 \tag{3.4.78}$$

が成り立つことを示せ．

b) $U(I_c)$ と $U(I_s)$ が交換するためには，η_s が

$$\eta_s^2 = -1 \tag{3.4.79}$$

となる純虚数であることが必要かつ十分なことを示せ．

このときには，条件

$$[U(I_c), U(I_s)] = 0 \tag{3.4.80}$$

と同時に等式

$$U^4(I_s) = 1 \tag{3.4.81}$$

も成り立つ．

c) $U(I_c)$ が $U(I_t)$ と交換するためには，積 $\eta_c\eta_t$ が

$$\eta_t^2\eta_c^2 = 1 \tag{3.4.82}$$

であるような実数であることが必要かつ十分なことを示せ．

このときには，(3.4.78) の等式に

$$[U(I_c)U(I_t)]^4 = 1 \tag{3.4.83}$$

が加わる．

演算子 $U(I_s), U(I_t)$ および $U(I_c)$ が物理的な変換 P, T および C と解釈できるためには，それぞれの二乗あるいはそれらの任意の積の二乗は任意のコヒーレントな部分空間で単位演算子の定数倍でなければならない．というのは，このような変換のうちどれでも，それを二回行なうことは恒等変換と同等だからである．一般的にいって，この要請は新しい超選択則（第2章 1.3 節を見よ）を導く．しかし，(3.4.79) および (3.4.82) に従って位相因子を定めると，そのようにはなっていない．実際，容易にわかるように，この場合には，

$$[U(I_c)U(I_s)]^2 = U^2(I_s) = \begin{cases} 1 & \text{（整数スピンの状態に対して）} \\ -1 & \text{（半整数スピンの状態に対して）} \end{cases} \tag{3.4.84}$$

となる．他方，常に，

$$U^2(I_c) = 1,$$

$$[U(I_t)U(I_s)]^2 = [U(I_t)U(I_c)]^2 = [U(I_c)U(I_s)U(I_t)]^2$$
$$= U^2(I_t) = \begin{cases} 1 & (\text{整数スピンの状態に対して}) \\ -1 & (\text{半整数スピンの状態に対して}) \end{cases} \quad (3.4.85)$$

となる．

以後，位相因子を上式に合うように選ぶことにしよう．位相因子をそれ以上に具体的に定める必要はないことに注意しよう．なぜならば，(3.4.79) と (3.4.82) をみたしていれば，異なった位相の選び方をしても，それには物理的には同一の理論が対応するから．

たとえば，$\eta_s = \mathrm{i}$ とした理論は $\eta'_s = -\mathrm{i}$ の理論と異ならない．このことは次のことから導かれる．この場合には第3軸のまわりの角度 2π の回転に対応する演算子 $R = U(\underset{\sim}{a} = 0, A = -1)$ が存在して，整数スピンをもつ状態のつくる部分空間（そこでは $R = 1$）でも，半整数スピンをもつ状態のつくる部分空間（そこでは $R = -1$）でも単位演算子の定数倍となり，しかも $U'(I_s) = RU(I_s)$ となる（演算子 R は群 $\widetilde{\mathfrak{P}}$ の中心に属している．すなわち，この群のすべての演算子と交換する）．しかし，二つの異なるスピノル場の係数 η_s の比は観測可能な量であって，これらのスピノルの相対パリティとよばれる．(3.4.56) と (3.4.79) によれば ψ とそれに Dirac 共役なスピノル $\tilde{\psi}$ の相対パリティは常に -1 である．

この問題のもっと詳細な議論は文献 [2] の § 3～5 にある．

(3.4.56) ～ (3.4.58) で定義された演算子 U の組は，二つ以上のスピノル場からなる系の場合には，不連続変換 I_s, I_t および I_c のすべての表現をつくしてはいないことを注意しておこう．事実，二つのスピノル場からなる系をとれば，その二つのスピノルを8成分のスピノルにまとめて，上の三つの変換の既約な表現をつくることができる．このことは，特にアイソスピン対称性と関係している（たとえば，Ogievetski and Chou Kang Chao (1959) を見よ．また Lee and Wick (1966) も参照）．

4.5. 一般化された自由場．Källén=Lehmann 表示

自由場のもつ二つの特徴的な性質が，その取り扱いを特別に簡単にしている．その第一は，自由な Bose 場の交換関係 $[\varphi(x), \varphi(y)]$ が c-数になる（すなわち，Fock 空間の単位演算子の定数倍となる）ことである．第二は，それが変数 x と y の差だけによることである．これらの性質のうち少なくとも一つは残したまま，物理的にトリヴィアルでない理論をつくることは不可能だろうか．この問題に対する答は否定的である．場（たとえば，スカラー場）の交換関係が単位演算子の定数倍になることを要求すれば，その場がな

にか特定の方程式をみたしているというような仮定なしに，それが実は自由場の重ね合わせであることが示せる．このような場を《一般化された自由場》と名づける所以である (Greenberg (1961))．一般化された自由場が物理的にトリヴィアルなものになってしまう原因は，交換関係を二回とったものが恒等的に0になってしまうところにある．それにもかかわらず，一般化された自由場を調べることには，若干の理論的興味がある．なぜなら，それによって少なくともトリヴィアルでない理論をつくる際になにを避けねばならないかのヒントが得られるからである．

まず，上に述べた自由場の二つの特徴的な性質が，互いに同等であることを示せる．

問題 3.4.14 一般化された自由場の交換関係は，定義によって c-数の関数 $C(x,y)$ であるが，もし φ 場が並進不変ならば，これは，変数 x,y の差だけの関数になることを示せ．

逆の命題はほとんど自明である：

[定理 3.4.2] 局所場 $\varphi(x)$ が既約であり，かつ

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=B(x-y) \tag{3.4.86}$$

であるなら，$B(x)$ は単位演算子の定数倍である．すなわち，$\varphi(x)$ は一般化された自由場である．

証明. z を x および y に対して空間的に隔った点としよう．そうすると，Jacobi の恒等式，

$$[\varphi(z),[\varphi(x),\varphi(y)]]+[\varphi(x),[\varphi(y),\varphi(z)]]+[\varphi(y),[\varphi(z),\varphi(x)]]=0 \tag{3.4.87}$$

と場 φ の局所性とから

$$[\varphi(z),B(x-y)]=0 \tag{3.4.88}$$

となる．

実際には，点 x,y,z がどんな位置にあっても，等式 (3.4.88) は成り立つことを示そう．事実，定ベクトル x,y,z が何であっても，絶対値の十分大きい空間的なベクトル a を選んで，ベクトル $x+a-z$ および $y+a-z$ が空間的になるようにすることができる．B が差 $x-y$ だけに依存することから，等式 (3.4.88) はこの場合にも成り立つことになる．そうすると，場 φ の既約性 (1.3節を参照) により，演算子 $B(x-y)$ は単位演算子の定数倍とわかり，従って $\varphi(x)$ は一般化された自由場となる．証明終わり．

結局，一般化された自由スカラー場の交換関係は，

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=\frac{1}{i}\Delta(x-y) \tag{3.4.89}$$

という形に書ける（係数 $-\mathrm{i}$ は便宜上のもの．(3.4.2) を見よ）．この表式から直ちに一般関数 $\Delta(x)$ が奇関数であること：$\Delta(-x) = -\Delta(x)$ がでる．次に Lorentz 不変性と状態ベクトルの空間の計量の正定値性が，この関数にどのような条件を課すことになるかを見よう．

問題 3.4.15 一般化された自由場について，相対論的不変性から局所性が導かれることを示せ（ヒント：関数 Δ が奇関数であることと Lorentz 不変なことから

$$(x-y)^2 < 0 \text{ では } \quad \Delta(x-y) = 0 \tag{3.4.90}$$

が導かれる）．

まったく同様に，関数 $\Delta(x)$ の Fourier 変換 $\tilde{\Delta}(p)$ が奇関数であることと Lorentz 不変なことから，

$$p^2 < 0 \text{ では } \quad \tilde{\Delta}(p) = 0 \tag{3.4.91}$$

が導かれる．条件 (3.4.91) はスペクトル条件からも出てくる．このことから，一般化された自由場に関してはスペクトル条件もまったく独立な要請ではないことがわかる．

関数 $\Delta(x-y)$ は2次の Wightman 関数 $w_2(x, y) = F_2(x-y)$ と簡単に結びつけられる：

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\Delta(x-y) = (\Psi_0, [\varphi(x), \varphi(y)]\Psi_0) = F_2(x-y) - F_2(y-x). \tag{3.4.92}$$

2.2 節によれば，状態ベクトルの空間の計量が正定値であることから，関数 $F_2(x)$ の Fourier 変換 $\widetilde{F}_2(p)$ は負でない一般関数であるという (3.2.25) が導かれる．このことは，

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varepsilon(p^0)\, e^{-\mathrm{i}px}\, d\mu(p) \tag{3.4.93}$$

を意味している．ただし，$\mu(p)$ は光円錐の内部に集中した不変測度で，緩増加で正（かつ偶）である．第1章 3.5 節によれば，これは

$$d\mu(p) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \delta(p^2-\lambda)\, d\sigma(\lambda)\, d^4p \tag{3.4.94}$$

と書ける．ここに，$\sigma(\lambda)$ は単調非減少な緩増加関数である．(3.4.94) を (3.4.93) に代入して，

$$\Delta(x) = \int_0^{\infty} D_{\sqrt{\lambda}}(x)\, d\sigma(\lambda) \tag{3.4.95}$$

を得る．ここで $D_{\sqrt{\lambda}}(x)$ は Pauli=Jordan 関数 (3.4.3) である．(3.4.95) は場の交換関係の真空期待値に対する《Källén=Lehmann 表示》とよばれる．その導き方から，この表示が，相対論的不変性と状態ベクトル空間の計量の正定値性の要請をみたす任意の理

論において成り立つことは明らかである．いま考えている一般化された自由場の場合の特殊性は，(3.4.89) のために，表示 (3.4.95) が真空期待値に対してだけでなく交換関係そのものに対しても成り立つ点にある．

問題 3.4.16 Källén=Lehmann 表示を得たときと同じ仮定のもとで，Wightman 関数 w_2 に対して類似の表示

$$w_2(x, y) = w_1^2 + \frac{1}{i}\int_0^\infty D_m^{(-)}(x-y)\,d\rho(m^2) \tag{3.4.96}$$

が得られることを示せ．ここに，$D_m^{(-)}(x)$ は公式 (3.4.25) で与えられる（ヒント：(3.2.26) を Fourier 変換せよ）.

一般化された自由スカラー場の理論での状態ベクトルの空間は，定まった質量をもつ中性中間子に対する Fock 空間（第2章 5.1 節）との類似によって構成される．ちがいは，一粒子状態の空間 $\mathcal{H}_1$ でのスカラー積が，(2.5.7) で与えられるのではなくて，もっと一般の式

$$\begin{aligned}(\Phi_1, \Psi_1) &= \int \Phi_1(p)\,\Psi_1(p)\,d\mu(p)\,\theta(p^0)\\ &= \int_{\lambda=0}^\infty d\sigma(\lambda)\int_{V^+_{\sqrt{\lambda}}} \Phi_1(p)\Psi_1(p)\,\frac{d^3p}{2\sqrt{\lambda+p^2}}\end{aligned} \tag{3.4.97}$$

で与えられることに由来している．

一般には，不変測度 $d\mu(p)$ には，積分 (3.4.94) のほかに $\delta(p)d^4p$ という形の項も含めなければならない（(3.2.26) を参照）．しかし，一つの自由場の真空期待値が 0 になるということ，

$$w_1 = (\Psi_0, \varphi(x)\Psi_0) = 0 \tag{3.4.98}$$

を要求すれば，いつでも，この項はないとしてよくなる．

空間 $\mathcal{H}_1$ が得られると，$\mathcal{H}_1$ の n 個の積を対称化したものとして，n 粒子状態の空間 $\mathcal{H}_n$ が定義できる（第2章 5.1 節）．このとき，一般化された自由場 $\varphi(f)$ の作用は，

$$\begin{aligned}(\varphi(f)\Psi)_n(p_1, \cdots, p_n) = \sqrt{\pi}\Big\{&\sqrt{n+1}\int d\mu(p)\,\tilde{f}(p)\Psi_{n+1}(p, p_1, \cdots, p_n)\\ &+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n \tilde{f}(-p_j)\Psi_{n-1}(p_1, \cdots, \hat{p}_j, \cdots, p_n)\Big\}\end{aligned} \tag{3.4.99}$$

によって定義される（(3.4.5) を参照せよ）.

問題 3.4.17 a) 場の演算子 (3.4.99) が，交換関係 (3.4.89) を満足することを示せ．
b) (3.4.94) を使って，一般化された自由場 (3.4.99) を，一定の質量 $\sqrt{\lambda}$ の場の積分に分解せよ (Licht (1963), Wightman (1964 b)).

(3.4.99) および (3.4.94) から，一般化された自由場 φ の Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(p)$ は，空間的な運動量に対しては 0 になることがわかる．この性質は，一般化された自由場に特徴的であることがわかっている．すなわち，次の定理が成り立つ (Greenberg (1962))：

[定理 3.4.3] $\varphi(x)$ を局所スカラー場とし，それについて真空が巡回的であるとしよう．このとき，場の Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(p)$ が，ある空間的な p からなる開集合上で 0 になるならば，φ は一般化された自由場である．Källén=Lehmann 表示に現われるスペクトル測度 $d\sigma(p)$ が，ある M^2 を越えた p^2 では常に 0 だとしても，上と同様の結果が得られる．

この定理を証明するためには，Jost=Lehmann=Dyson の表示 (Jost and Lehmann (1957) および Dyson (1958 b) を見よ)，あるいは，解析接続の方法を使う必要がある (たとえば，[24] を見よ)．いま，それには立ち入らないことにしよう．

最後に，交換関係が場の演算子の一次式

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{\mathrm{i}}\Delta(x-y) + \frac{1}{\mathrm{i}}\int b\left(x-y, \frac{x+y}{2}-z\right)\varphi(z)\, d^4z \qquad (3.4.100)$$

で表わされるような，一見もっと一般的に見える場 (〈Lie 型の場〉) も，一般化された自由場に帰着されることを注意しておこう．この場については，Wightman の講義(1964 b) と Robinson の論文 (1964) を紹介するだけにして，深入りはしないでおく．

付録. Klein=Gordon 方程式の不変な解と自由場の不変デルタ関数のまとめ

この章で取り扱った自由場の不変デルタ関数は，今後もしばしば使う．そこで，読者の便宜のために，それらの関数とその基本的な性質をここに要約しておこう[1)]．

1) スカラー場の不変デルタ関数

Pauli=Jordan 交換子関数 $D(x) = D_m(x)$：

$$(\Box + m^2)D(x) = 0, \qquad D(0, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial t}(0, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}), \qquad (3.\mathrm{A}.1)$$

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \varepsilon(p^0)\,\delta(p^2-m^2)\, e^{\mathrm{i}px}\, d^4p \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sin\omega_{\boldsymbol{p}} x^0\, e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{px}}\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\omega_{\boldsymbol{p}}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\,\delta(x^2) - \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}}\varepsilon(x^0)\,\theta(x^2)\, J_1(m\sqrt{x^2}), \end{aligned} \qquad (3.\mathrm{A}.2)$$

---

1) この要約は，文献 [4] から借用した．

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{\mathrm{i}} D(x-y). \tag{3.A.3}$$

Pauli=Jordan 関数の正・負振動数部分 $D^{(\pm)}(x) = D_m^{(\pm)}(x)$ と奇の不変関数 $D^{(1)}(x)$：

$$\begin{aligned} D^{(\pm)}(x) &= \frac{\pm 1}{(2\pi)^3 \mathrm{i}} \int e^{\mathrm{i}px} \theta(\pm p^0) \delta(p^2-m^2) d^4p \\ &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2) \mp \frac{m\mathrm{i}}{8\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) [N_1(m\sqrt{x^2}) \\ &\quad \mp \mathrm{i}\, \varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{x^2})] \pm \frac{m\mathrm{i}}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} \theta(-x^2) K_1(m\sqrt{-x^2}), \end{aligned} \tag{3.A.4}$$

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \frac{1}{\mathrm{i}} D^{(-)}(x-y), \tag{3.A.5}$$

$$(\Box + m^2) D^{(\pm)}(x) = 0, \quad D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x) = D(x), \tag{3.A.6}$$

$$D^{(1)}(x) = \mathrm{i}\{D^{(+)}(x) - D^{(-)}(x)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(p^2-m^2) e^{\mathrm{i}px} d^4p. \tag{3.A.7}$$

因果性 Green 関数 $D^c(x) = D_m^c(x)$：

$$(\Box + m^2) D^c(x) = \delta(x), \tag{3.A.8}$$

$$\begin{aligned} D^c(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{\mathrm{i}px}}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}0} d^4p \\ &= \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) [J_1(m\sqrt{x^2}) - \mathrm{i} N_1(m\sqrt{x^2})] \\ &\quad + \frac{m\mathrm{i}}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} \theta(-x^2) K_1(m\sqrt{-x^2}), \end{aligned} \tag{3.A.9}$$

$$\langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{\mathrm{i}} D^c(x-y). \tag{3.A.10}$$

先発型および遅延型 Green 関数 $D^{\mathrm{adv}}, D^{\mathrm{ret}}$：

$$(\Box + m^2) D^{\mathrm{ret}}(x) = (\Box + m^2) D^{\mathrm{adv}}(x) = \delta(x), \tag{3.A.11}$$

$$\begin{aligned} &x^0 < 0 \text{ に対して}, \quad D^{\mathrm{ret}}(x) = 0, \\ &x^0 > 0 \text{ に対して}, \quad D^{\mathrm{adv}}(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.A.12}$$

$$\begin{aligned} D^{\substack{\mathrm{ret} \\ \mathrm{adv}}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{\mathrm{i}px}}{m^2 - p^2 \pm \mathrm{i}\varepsilon p^0} d^4p \\ &= \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x^0) \{\delta(x^2) - \theta(x^2) J_1(m\sqrt{x^2})\}, \end{aligned} \tag{3.A.13}$$

$$\begin{aligned} &D^{\substack{\mathrm{ret} \\ \mathrm{adv}}}(x) = D^c(x) \pm D^{(\pm)}(x), \\ &D^{\mathrm{ret}}(x) - D^{\mathrm{adv}}(x) = D(x). \end{aligned} \tag{3.A.14}$$

以上を通じて J_1 などは常に Bessel 関数を表わす：

$$J_1(z) = \frac{z}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$N_1(z) = 2J_1(z)\ln\frac{z}{2}-\frac{2}{z}, \tag{3.A.15}$$

$$K_1(z) = -\frac{\pi}{2}(J_1(\mathrm{i}z)+\mathrm{i}N_1(\mathrm{i}z)).$$

2) **スピノル場の関数**

スピノル場の関数 $S^Z_{\alpha\beta}(x)$ （ここで，$Z=\mathrm{ret}, \mathrm{adv}, \pm, c$ を表わす）は対応するスカラー場の関数から，次の公式によって得られる：

$$S^Z_{\alpha\beta}(x) = (\mathrm{i}\hat{\partial}+m)_{\alpha\beta}D^Z(x). \tag{3.A.16}$$

関数 $S^Z_{\alpha\beta}$ は，それぞれ Dirac 方程式の解あるいは Green 関数になっている．

3) Schwinger および Schweber の表記法との関係

ここで用いた表記法	Schwinger の表記法
$D(x)$	$-\Delta(x)$
$D^{(\mp)}(x)$	$-\Delta^{(\pm)}(x)$
$D^{(1)}(x)$	$\Delta^{(1)}(x)$
$D^c(x)$	$\Delta_+(x)$ あるいは $\Delta_F(x)$

文献案内

この章の内容は，量子場に対する公理論的な研究の創始者たちによって書かれたすぐれた著作 [2] および [3] と，多くの点で共通している．

§1. 局所量子場の概念への，ここで述べたようなアプローチは主として Wightman による．この問題に関して基本的な文献は Wightman と Gårding による論文 (1964) である．これは，実際には 1952 年に始まった仕事であり，部分的には Wightman や他の人びとによる論文や講義に述べられている（特に，Wightman (1957)，[2] および [3] を参照）．局所性の要請の物理的意味を明らかにすることは Bohr and Rosenfeld (1933, 1950) に遡る．公理の独立性に関する議論については Haag and Schroer (1962) を見よ．場 $\varphi_\tau(f)$ の系の既約性に関する定理 3.1.1 は，Ruelle (1962) および Borchers (1962) による．$\mathrm{supp}\, f\subset\mathcal{O}$ であるような場 $\varphi_\tau(f)$ の完全性についての定理 3.1.2 の証明は，Reeh と Schlieder による原論文 (1961) を見よ．また，文献 [2] および [3] も参照．量子場の理論における局所化の問題は多くの論文で考察されているが，ここでは Licht の論文 (1963) を挙げておく．局所理論の枠から離れようという多くの試みについての議論に立ち入ることはやめ，そのなかのあるものは相対論的不変性の要請のもっと一般化した定式化と関連していることを注意しておくだけにしよう（たとえば，Ingraham (1962)，Blokhintsev and Kolerov (1964) および Dubna 会議 (1967) の報告）．ほとんど局所的な場の概念とその応用については Streater (1964) を参照せよ．

§2. 場の演算子の積の真空期待値による量子場の理論の定式化は Wightman (1956) によって与えられた. 同様な考えは Schmidt と Baumann の仕事 (1956) にも見られる, しかし, そこでは, 場の演算子が均らしても有界でないことを無視しているために, 共通の定義域 Ω やその性質には注意していない. 1960 年までの結果の体系的なまとめは Araki の論文 (1961 a) にある. 真空の一意性の条件の役割や, それとクラスター分解性との関係は, Hepp et al. (1961) に述べられている. また, Borchers (1962) および Reeh and Schlieder (1962) も参照せよ. 真空状態の存在と役割については Borchers et al. (1963, 1965 b) が論じた. クラスター分解の定理の証明は, Araki (1960 a), Jost and Hepp (1962), Ruelle (1962) (われわれは, これに従った), Araki et al. (1962) 等に, 種々の形で与えられている. 最後の論文には質量ギャップのない場合 (すなわち, 質量 0 の粒子が存在する場合) についての詳しい議論がある 各点ごとに定まり, 局所性をみたして, かつ並進不変な場が存在し得ないことの証明は Wightman (1964 a) が与えた. 一意的な真空をもち, 各点で定義されて Poincaré 不変な場の理論はつくり得ないという 2.4 節で述べた定理の証明は Wizimirski (1966) による.

§3. 場の積の真空期待値から場の量子論を再構成することに関する定理は, Wightman (1956) および Schmidt and Baumann (1956) が与えた. われわれは, 後の Uhlmann (1962) および Borchers (1962) の論法に従った. これらの問題のその後の発展については Borchers et al. (1963) および Borchers (1965 a, b) を見よ. Borchers による問題提起の一つの数学的一般化が Maurin (1963 a, b) にある.

§4. 自由場の理論の標準的な記述は, どんな場の理論の教科書にも出ている (特に, [4] および [6] を見よ). この理論の数学的に厳密な定式化は Friedrichs の本 [46], Rashevskii の論文(1958), Kastler の本などに与えられている 特に, Rashevskii の論文は量子電磁力学の場合を論じている. この節の結果を Lagrange 形式の立場から簡潔にまとめたものに Jost の本 [3] の第 2 章がある. 大きいスピンをもつ場の理論については文献 [38] および [39] が触れている. 不連続変換によるスピノルの変換に関しては, 特に [28] に議論されている. 乗法的な対称性に関して, 公理論的な場の理論の立場からする一般論については, Prugovecki の論文 (1964) を見よ. 反転に対する場の変換則にでてくる位相因子についての詳しい研究は, Feinberg and Weinberg (1959) を参照せよ. 荷電共役その他の不連続な対称性と, バリオン数やレプトン数の保存則に対応するゲージ変換との関係についての (群の拡大の理論に基づく) 数学的な議論は Michel (1962) を見よ. 一般化された自由場は Greenberg (1961) によって導入された. また, Wightman の講義 (1962) も参照せよ. Green 関数のスペクトル表示は, 一般の場合について, Kamefuchi and Umezawa (1951), Källén (1952) および Lehmann (1954) によって得られた (Källén (1960, 1968) および Steinmann (1963 b) も参照せよ). Källén=Lehmann 表示は, 一連の重要な応用をもっている. 一つの応用として, Källén=Lehmann 表示をもとにある種の Feynman ダイヤグラムを足し合せて Green 関数に物理的意味のない特異点が現われないようにすることができる (Bogoliubov et al. (1959)). 自由場について, 質量で積分することは Licht (1963) が論じている. 〈Lie 型の場〉に関しては Wightman (1964 b), Robinson (1964) およびそこに引用されている文献を参照せよ. 場が一般化された自由場になるための p 空間における場の台に対する条件は, 最初に Dell'Antonio (1961 a) によって書かれた. 定理 3.4.3 は Greenberg (1962) および Robinson (1962) によって証明されている. 証明には Jost=Lehmann=Dyson 表示 (Jost and Lehmann (1957), Dyson (1958 a, b)) が用いられた. この表示の完全な証明は文献 [24] にある.

第4章　散乱理論，漸近条件と S 行列

要　　約

第1節では，Haag=Ruelle の次の二つの定理を証明する．

$\varphi(x)$ を Heisenberg 表示のスカラー場とし，その二点の Wightman 関数に対し，Källén=Lehmann 表示

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{\mathrm{i}}D_m^{(-)}(x-y) + \frac{1}{\mathrm{i}}\int_{4m^2}^{\infty} D_{\sqrt{\lambda}}^{(-)}(x-y)\,d\rho(\lambda)$$

が可能であるとする．さらに，演算子 $A(f,t)$ を

$$A(f,t) = \mathrm{i}\int_{x^0=t} f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}A(x)\,d^3x$$

$$\equiv \mathrm{i}\int_{x^0=t}\left\{f(x)\,\frac{\partial A(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial f(x)}{\partial x^0}A(x)\right\}d^3x$$

によって定義しよう．ここに，$f(x)$ は Klein=Gordon 方程式 $(\Box+m^2)f(x)=0$ の滑らかな解であり，$\widetilde{A}(p) = h(p^2)\tilde{\varphi}(p)$ で，$h(\lambda)$ は台が有界な基礎関数，そして $h(m^2) = 1$, また $|p^2-m^2| > m^2$ のときは $h(p^2)=0$ である．このとき，時間のベクトル値関数

$$\Phi(t) = A(f_1,t)\cdots A(f_n,t)\Psi_0$$

は，$t\to\pm\infty$ で，座標系の取り方によらない定まった極限 $\Phi^{\substack{\mathrm{out}\\ \mathrm{in}}}(f_1,\cdots,f_n)$ に収束する（定理 4.1.1）．また，質量が m の自由スカラー場 $\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$（ここに ex は in または out を意味する）が存在し，$f(x)$ を質量 m の Klein=Gordon 方程式の滑らかな解でしかも負の振動数のみを含むものとするとき，

$$\varphi^{\mathrm{ex}}(f) = \mathrm{i}\int_{x^0=t} f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{\mathrm{ex}}(x)\,d^3x$$

と置けば，$\varphi^{\mathrm{ex}}(f)\,\Phi^{\mathrm{ex}}(f_1,\cdots,f_n) = \Phi^{\mathrm{ex}}(f,f_1,\cdots,f_n)$ の関係が成り立つ（定理 4.1.2）．漸近状態 Φ^{in}（または Φ^{out}）は完全系を張るという仮定がなされる（1.5 節）．

f を方程式 $(\Box+m^2)f(x)=0$ の規格化された負振動数解とし，$\varphi(f,t)$ を Heisenberg 場 $\varphi(x)$ と公式 (4.1.11) で結ばれる演算子とするなら，Lehmann=Symanzik=Zimmer-

mann（以下 LSZ と略す）の漸近条件は次の形に書かれる：

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\Phi, \varphi(f,t)\Psi) = (\Phi, \varphi^{\substack{\mathrm{out}\\ \mathrm{in}}}(f)\Psi).$$

Heisenberg 表示におけるカレント $j(x)$ を等式

$$j(x) = (\Box+m^2)\varphi(x)$$

によって定義すれば，Yang=Feldman の方程式

$$\varphi(x) = \varphi^{\mathrm{in}}(x)+\int D_m^{\mathrm{ret}}(x-y)\,j(y)\,d^4y$$
$$= \varphi^{\mathrm{out}}(x)+\int D_m^{\mathrm{adv}}(x-y)j(y)\,d^4y$$

が成り立つ．S 行列要素に対する LSZ の漸化式は，

$$\langle g_1\cdots g_r^{\mathrm{out}}|f_1\cdots f_l^{\mathrm{in}}\rangle = \langle g_1\cdots g_r^{\mathrm{out}}|S|f_1\cdots f_l^{\mathrm{out}}\rangle$$
$$= \mathrm{i}^{r+l}\int G^c(x_1,\cdots,x_r,y_1,\cdots,y_l)\,\bar{g}_1(x_1)\cdots\bar{g}_r(x_r)f_1(y_1)\cdots f_l(y_l)d^4x_1\cdots d^4y_l$$

という形をもつ．ここに，因果的 Green 関数 G^c は，Heisenberg 場の T 積を用いて，

$$G^c(x_1,\cdots,x_n) = K_{x_1}\cdots K_{x_n}\langle 0|\,T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}\,|0\rangle$$
$$(K_x\equiv\Box_x+m^2)$$

のように表わされるものである．

これらの命題は，粒子が離ればなれに飛び散っていくような状態（すなわち個々の粒子の速度空間における波束が互いに重なり合っていないような状態）に対しては Hepp が証明した．第2節で，その証明の基本的な部分を紹介する．

第3節では，S 行列を漸近場 φ^{out} の汎関数と考え，その汎関数的導関数のあいだの関係という形で局所場理論の原理を定式化する．

LSZ の理論との関係は，次の演算子

$$j(x) = \mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\varphi^{\mathrm{out}}(x)}S^*$$

を場 $\varphi(x)$ に対する Heisenberg のカレントと同一視することを基礎にしてつけることができる（3.4節）．

微視的因果性の条件，すなわち $y<x$ のときおよび $(y-x)^2<0$ のときには $\delta j(x)/\delta\varphi(y)=0$ であるという条件（ただし $\varphi(y)\equiv\varphi^{\mathrm{out}}(y)$）から，質量殻の外部における Green 関数の定まった解析性が導かれる（3.7節）．32個の四点関数については，運動量空間における一致の条件を述べるが，これはスペクトル条件から導かれるものである．また，Steinmann の恒等式から得られる結論を研究する．

微視的因果性の条件から等式

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = \mathrm{i}\Lambda(x, y) + \theta_{xy}\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} + \theta_{yx}\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}$$

が得られる．ここに $\theta_{xy} = \theta(x^0 - y^0)$ は階段関数，$\Lambda(x, y)$ は準局所的演算子で $x = y$ のところでだけ 0 でない．第 4 節では，この方程式の逐次解を与えるが，その場合，次のことを仮定する．すなわち，

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \Lambda_n, \qquad S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{i}g)^n S_n$$

と置いたときに，$n \geqslant 2$ のときの準局所的演算子 $\Lambda_n(x, y)$ は，その行列要素が，運動量空間において，できる限り小さなベキで増加するという条件によって決定されることを仮定するのである．このとき，θ-関数に，$x = y$ で特異性をもつ一般関数をかけるために発散が生ずることに注意する (4.2 節)．この困難を避けるため，出発点にとった方程式を別の形に書き直す．すなわち，関数 θ_{xy} の代わりに，射影演算子の性質をもったある演算子 Θ_{xy} を用いる．こうして得られた新しい方程式を逐次近似法によって解くと，摂動論のくりこまれた級数が得られ，そのさい展開の各段階において有限確定の量だけしか現われない．このことを例によって示すために，4.4 節で相互作用のラグランジアンが $\mathcal{L} = g\int :\psi^2(x)\varphi(x): d^4x$ の場合の二次の摂動を計算する．ただし，ψ も φ も 0 でない質量をもつスカラー場とする．

§ 1. Haag-Ruelle の散乱理論

1.1. はじめに

序章ですでに注意したように，歴史的には，場の量子論における公理的方法は 40 年代に現われ，当時は散乱行列を出発点として議論を進める傾向を意味した．散乱行列とは，有限の時刻に相互作用が行なわれてのち $t \to \infty$ で漸近的に自由になった粒子が見いだされる確率を与えるものである．ところでこの本では，粒子の概念はこれまでただ相対論的な Fock 空間をつくるとき（第 2 章 § 4 ――場の概念の導入まで）と自由場の理論のごく簡単な例（第 3 章 § 4）のなかに出てきただけである．そこで，相互作用のある Heisenberg 場の公理的な理論の枠内で粒子の概念をどのように定義すべきかが問題となる．

この問に対する直観的な答は次のようなものである．すなわち，$x^0=t\to\pm\infty$ のとき Heisenberg 場 $\varphi(x)$ は状態ベクトルに対し自由場のように作用しなくてはならない．特に真空に作用したとき，定まった質量の一粒子状態を与えるものでなくてはならない．この直観的な描像の正確な定式化はどのようなものでなくてはならないか，この（$t\to\pm\infty$ のときの）漸近条件が Wightman の他の公理と両立するかどうか，またそれらが互いにどの程度まで独立な要求であるかといったことは，長いあいだ明らかでなかった．Haag の仕事（1957，1958，1959）（また Brenig と Haag の論文（1959）を参照）において着手されたこれらの問題の研究は，Ruelle のすぐれた仕事（1962）において満足すべき仕上げが与えられた．

われわれはこの節において，Jost [3] と Hepp（1963 b）がやったように，簡単な場合について Haag=Ruelle の理論を紹介しよう．一般の場合に拡張しようとするとき必要になってくる変更は，§5 で触れるだけにする．

1.2. Haag=Ruelle の漸近条件．結果のまとめ

簡単のため一種類の中性スカラー場 $\varphi(x)$ の場合を考え，状態ベクトルの空間 $\mathcal{H}$ は第2章の 5.1 節に述べた空間と同じものであるとしよう．実は，われわれにとって重要なのは四元運動量の二乗を表わす演算子 P^2 が孤立した固有値 $p^2=m^2$ をもつこと，および一粒子状態を含む部分空間 $\mathcal{H}_1$ で，Poincaré 群のスピン 0 の場合の既約表現が実現されているということだけである．

これに加えて，場 φ が，真空と $\mathcal{H}_1$ のあいだに 0 と異なる行列要素をもつと仮定しよう．より正確にいうならば，$\mathcal{H}_1$ への正射影の演算子を Π_1 として，次の規格化の条件がみたされていると仮定する：

$$(\Psi_0, \varphi(x)\Pi_1\varphi(y)\Psi_0) = -\mathrm{i}\,D_m^{(-)}(x-y). \tag{4.1.1}$$

ここで $D_m^{(-)}(x)$ は負の振動数のみからなる Pauli=Jordan 関数（3.4.25）である．この仮定は他方において，場 $\varphi(x)$ の二点の Wightman 関数に対する Källén=Lehmann の表示（3.4.96）が，

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{\mathrm{i}}D_m^{(-)}(x-y) + \frac{1}{\mathrm{i}}\int_{4m^2}^{\infty} D_{\sqrt{\lambda}}^{(-)}(x-y)\,d\rho(\lambda) \tag{4.1.2}$$

という形をもつことを意味する（われわれにとって重要なのは，（4.1.2）の積分の下限が m^2 より大きいということだけである）．《ほとんど局所的な場》$A(x)$ を，場

$$\tilde{A}(p) = h(p^2)\tilde{\varphi}(p) \tag{4.1.3}$$

の Fourier 変換として定義しよう．ここに $h(\lambda)$ は無限回微分可能でかつ台が有界な関数で

$$h(m^2)=1,\quad |p^2-m^2|>m^2 \text{ のときに } h(p^2)=0 \tag{4.1.4}$$

となるものとする（実際には，連続スペクトル領域 $p^2 \geqq 4m^2$ において $h(p^2)=0$ であるということだけが重要である）．場 $A(x)$ は，相対論的不変性とスペクトル条件を満足する．これに加えて，$A(f)\Psi_0 \in \mathscr{H}_1$ となり，かつ

$$(\Psi_0, A(x)A(y)\Psi_0)=\frac{1}{\mathrm{i}}D_m^{(-)}(x-y) \tag{4.1.5}$$

が成り立つ．

場 $A(x)$ は，三つの空間座標に関して平均すると時間座標 $x^0=t$ の滑らかな関数になることを次に示そう（これは自由場ももっている性質である）．より正確にいえば，もし $u(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}(R_3)$ なら，

$$A_u(t)=\int_{R_3} A(t,\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} \tag{4.1.6}$$

は，$\varphi(f)$ が定義されている稠密な集合 Ω 上で定義された演算子である．そのとき $\Phi \in \Omega$ ならベクトル $A_u(t)\Phi$ もまた集合 Ω に属し，かつ $A_u(t)\Phi$ は t に関して無限回微分可能であることがいえる．

この命題は，

$$A_u(t)=\int f(x^0-t,\boldsymbol{x})\varphi(x)\,d^4x \tag{4.1.7}$$

から導かれる．ただし関数 $f(x)$ は，

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\int \tilde{u}(\boldsymbol{p})h(p^2)e^{\mathrm{i}px}\,d^4p \tag{4.1.8}$$

で与えられるものである．実際，条件 $\tilde{u}(\boldsymbol{p})h(p^2) \in \mathcal{S}(R_4(p))$ を考慮すると，(4.1.8) から，固定した t に対して $f(x^0-t,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}(R_4(x))$ であり，この関数が t に関し無限回微分可能であることが結論される．

Klein=Gordon 方程式

$$(\Box+m^2)f(x)=0 \tag{4.1.9}$$

の解で，初期条件として $\boldsymbol{x}$ について無限に滑らかな急減少関数

$$f(0,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}(R_3),\qquad \dot{f}(0,\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^0}(0,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}(R_3)$$

をもつものは，《滑らかである》ということにしよう．この定義から，$f(x)$ が次の形に

書けることは容易にわかる：

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \theta(p^0)\delta(p^2-m^2)[e^{-ipx}g_+(\boldsymbol{p})+e^{ipx}g_-(\boldsymbol{p})]\,d^4p. \qquad (4.1.10)$$

ここに $g_\pm(\boldsymbol{p}) \in \mathcal{S}(R_3)$ である．これを確かめるには，

$$g_+(\boldsymbol{p})+g_-(\boldsymbol{p}) = \frac{2\omega}{(2\pi)^{3/2}}\int f(0,\boldsymbol{x})\,e^{-i\boldsymbol{px}}\,d^3\boldsymbol{x}$$

$$g_+(\boldsymbol{p})-g_-(\boldsymbol{p}) = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}}\int \dot{f}(0,\boldsymbol{x})\,e^{-i\boldsymbol{px}}d^3\boldsymbol{x}$$

に注意すればよい．上に述べたことから，もし $f(x)$ が Klein=Gordon 方程式の滑らかな解であるなら，演算子

$$A(f,t) = i\int_{x^0=t} f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}A(x)\,d^3\boldsymbol{x} \equiv i\int_{x^0=t}\left\{f(x)\,\frac{\partial A(x)}{\partial x^0}-\frac{\partial f(x)}{\partial x^0}A(x)\right\}d^3\boldsymbol{x} \qquad (4.1.11)$$

は稠密な集合 Ω の上で定義されていることが言える．

Haag=Ruelle の基本的な結論は，次の二つの定理にまとめられる．

[定理 4.1.1]

$$\Phi(t) = A(f_1,t)A(f_2,t)\cdots A(f_n,t)\Psi_0 \qquad (4.1.12)$$

とする．そのとき，$\mathcal{H}$ における強収束の意味で $t\to\pm\infty$ の極限 $\Phi^{\rm out}$ および $\Phi^{\rm in}$ が存在する．すなわち，

$$\lim_{t\to-\infty}\|\Phi(t)-\Phi^{\rm in}\| = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty}\|\Phi(t)-\Phi^{\rm out}\| = 0. \qquad (4.1.13)$$

これらの極限は，(固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ の枠内で) 演算子 (4.1.11) を定義するのに用いた特定の座標系にはよらない．

上に示したように $A(f,t)\Omega\subset\Omega$ であるから，(4.1.12) の右辺における同時刻の演算子 A の積が意味をもっていることに注意しよう．

記号《in》および《out》は，英語の《incoming》(入ってくる，入射する) と《outgoing》(出ていく) から取ったものである．《in》あるいは《out》のいずれかを表わすために，記号《ex》を用いることにしよう．ベクトル $\Phi^{\rm in}$ (または $\Phi^{\rm out}$) によって張られる Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{\rm in}$ (または $\mathcal{H}_{\rm out}$) と書く (正確には，$\mathcal{H}_{\rm ex}$ は，真空も含めてベクトル $\Phi^{\rm ex}$ の一次結合の全体がつくる空間を，ノルムの意味の収束に関して完備化したものである)．ベクトル (4.1.12) の $t\to\pm\infty$ の極限を，Φ が場を均らすために用いた関数 $f_1,\cdots,f_n$ に依存することをはっきり示すために，$\Phi^{\rm ex}(f_1,\cdots,f_n)$ のようにも書く．これらのベクトルの一次結合は核型空間 $\Omega_{\rm ex}$ をつくり，そこにおいて，ある漸近場 $\varphi^{\rm ex}$ が

定義でき，状態 Φ^{ex} は，真空に場の演算子 φ^{ex}（これは質量 m の自由場である）を作用させて得られる状態とみなすことができる．次の定理は，こうした事情をいい表わしている．

[定理 4.1.2] $\varphi^{\mathrm{ex}}(f)$ は，基底ベクトル $\Phi^{\mathrm{ex}}(f_1,\cdots,f_n)$ に対する作用が公式

$$\varphi^{\mathrm{ex}}(f)\Phi^{\mathrm{ex}}(f_1,\cdots,f_n)=\Phi^{\mathrm{ex}}(f,f_1\cdots,f_n) \tag{4.1.14}$$

によって与えられる線形演算子と定義しよう．

このとき，演算子 $\varphi^{\mathrm{ex}}(f)\,(\mathrm{ex}=\mathrm{in},\mathrm{out})$ は，質量が m の自由な中性スカラー場 $\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$（第3章，4.1節を見よ）から

$$\varphi^{\mathrm{ex}}(f)=\mathrm{i}\int_{x^0=t}f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{\mathrm{ex}}(x)\,d^3x \tag{4.1.15}$$

という式で定められる．ここに $f(x)$ は，質量 m の Klein=Gordon 方程式の解で負の振動数のみからなる．また，

$$U(a,\Lambda)\varphi^{\mathrm{ex}}(x)U^{-1}(a,\Lambda)=\varphi^{\mathrm{ex}}(\Lambda x+a) \tag{4.1.16}$$

が成り立つ．

定理4.1.1と定理4.1.2の証明は，次の二つの命題に基づいてなされる．その一つは，1.3節で定式化されかつ証明される，Klein=Gordon 方程式の滑らかな解に関する補題である．他の一つは，粒子のクラスターの漸近的振舞いに関する定理3.2.3である．上記の主要定理4.1.1と4.1.2の証明は，1.4節で行なう．ここでは主要定理の定式化について若干の注意と補足をするにとどめよう．

1) $f(x)$ と $\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$ とはいずれも（$f(x)$ は仮定によって，$\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$ については以下で証明するように）Klein=Gordon 方程式（4.1.9）をみたすから，積分（4.1.15）は t に依存しない．実際，(4.1.10) と (3.4.8) により，$\varphi^{\mathrm{ex}}(f)$ を明らかに時間によらない形

$$\varphi^{\mathrm{ex}}(f)=\int[g_-(\boldsymbol{p})a^{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{p})-g_+(\boldsymbol{p})a^{*\mathrm{ex}}(\boldsymbol{p})]\frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}} \tag{4.1.17}$$

$$(\omega_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2})$$

に書くことができる（基礎関数 $f(x)$ と場の演算子 $\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$ に対する Fourier 変換の定義で，指数関数の肩の符号が互いに逆に取ってあったことを思い起こそう）．つまり，この $\varphi^{\mathrm{ex}}(f)$ が t によらないということから，漸近条件を定式化するのに（4.1.11）のような均らし方を用いると具合がよいことがわかる．

2) $A(x)$ の定義から，ベクトル値一般関数

$$\Phi(x) = A(x)\Psi_0 \tag{4.1.18}$$

が Klein=Gordon 方程式をみたすことが出てくる．

問題 4.1.1 (4.1.5) を用いて上の命題を証明せよ（ヒント：基礎関数 $u(x)\in \mathcal{S}(R_4)$ をどのように選んでも，ベクトル

$$\Phi = \int [(\Box+m^2)u(x)]A(x)\Psi_0 d^4x$$

のノルムは0に等しいことを示せ)．

3) 上に述べた定理を考慮すると，$\Phi^{\mathrm{ex}}(f_1,\cdots,f_n)$ を n 個の漸近的に自由な粒子の状態を表わすベクトルとよぶのは自然であろう．

上の二番目の注意から，もし f が Klein=Gordon 方程式の滑らかな解であれば，ベクトル

$$\Phi(f,t) = \mathrm{i}\int_{x^0=t} f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}A(x)d^3x\Psi_0 \tag{4.1.19}$$

は実は時間によらないこと，すなわち，

$$\frac{d\Phi(f,t)}{dt} = 0 \tag{4.1.20}$$

であることが導かれる．この性質は，《一粒子状態の安定性》を表わしている．

1.3. Klein=Gordon 方程式の滑らかな解の性質

簡単のため，Klein=Gordon 方程式の滑らかな解で，負の振動数のみを含むものを考えよう[1)]（これは，(4.1.10) の右辺の第一項からなる)：

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{p}}x^0}}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}g(\boldsymbol{p})\right]e^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}d^3\boldsymbol{p} \tag{4.1.21}$$

$$(\omega_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}).$$

前と同様，$g(\boldsymbol{p})\in\mathcal{S}(R_3)$ とする．しかし実際には，この節のすべての結果は任意の滑らかな解，すなわち滑らかな正振動数解と負振動数解の任意の和に対して正しい（Klein=Gordon 方程式の任意の正振動数解は，ある負振動数解の複素共役になっていることに注意)．

積分 (4.1.21) において，角括弧のなかの関数は t に関しては解析的，他方 $\boldsymbol{p}$ の関数

1) いずれを正振動数の関数とよび，いずれを負振動数の関数とよぶかについては，文献によってまちまちである．Jost の本 [3] では，上の (4.1.21) の関数は Klein=Gordon 方程式の正振動数解とよばれている．われわれは，文献 [4] で用いた用語に従って，これを負振動数解とよぶ．

と考えたときは関数自身およびその t に関する導関数がいずれも基礎関数の空間 $\mathcal{S}(R_3)$ に属する．このことから，その Fourier 変換 $f(x)=f(t,\boldsymbol{x})$ は（t についても $\boldsymbol{x}$ についても）無限回微分可能で，それ自身および t に関する導関数が $\boldsymbol{x}$ の関数として空間 $\mathcal{S}(R_3)$ に属することが導かれる．以下において，われわれは関数 $f(t,\boldsymbol{x})$ の $|t|$ が大きいところの振舞いに興味がある．そこで，この節の目的は，次の補題を証明することである．

[補題 4.1.1] $f(t,\boldsymbol{x})$ を Klein=Gordon 方程式の滑らかな解であるとする．そのとき，f に応じてきまる定数 B が存在して，以下の関係が成り立つ：

$$|t|^{3/2}\sup_{\boldsymbol{x}}|f(t,\boldsymbol{x})|<B, \tag{4.1.22}$$

$$\int|f(t,\boldsymbol{x})|\,d^3\boldsymbol{x}<B(1+|t|^{3/2}), \tag{4.1.23}$$

$$\sqrt{t}\,\sup_{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}|\,|f(t,\boldsymbol{x})|<B. \tag{4.1.24}$$

証明． はじめに，方程式（4.1.9）の特別の負振動数解

$$F(x)=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{-\mathrm{i}px}}{(1+p^0)^3}\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)\,d^4p \tag{4.1.25}$$

に対して，補題を証明しよう．

恒等式

$$2(1+p^0)^{-3}=\int_0^\infty\alpha^2e^{-\alpha(1+p^0)}d\alpha$$

を用いて，積分（4.1.25）は次の形に変形できる：

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^2\,d\alpha\int e^{-\mathrm{i}p^0(t-\mathrm{i}\alpha)+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)\,d^4p\\&=-\mathrm{i}(2\pi)^{3/2}\int_0^\infty D_m^{(-)}(t-\mathrm{i}\alpha,\boldsymbol{x})e^{-\alpha}\alpha^2\,d\alpha\qquad(x=(t,\boldsymbol{x})).\end{aligned}$$

負振動数の Pauli=Jordan 関数に対して（3.A.4）の表現を入れると，

$$F(x)=\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{\alpha^2e^{-\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+\mathrm{i}x^0)^2}}K_1\left(m\sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+\mathrm{i}x^0)^2}\right)d\alpha,$$

$$\mathrm{Re}\sqrt{\boldsymbol{x}^2+(\alpha+\mathrm{i}x^0)^2}>0 \tag{4.1.26}$$

が得られる．

ここで，変形 Bessel 関数の漸近的振舞いに関する評価（たとえば，文献 [49] の第2巻，7.4.1を参照）

$$\lim_{z\to0}zK_1(z)=1,\qquad z^{1/2}e^zK_1(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\qquad(|z|\to\infty)$$

を用いると，

$$|K_1(z)| < A\left(\frac{1}{|z|}+\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right)e^{-\mathrm{Re}\,z}. \tag{4.1.27}$$

が得られる．他方，

$$\zeta \equiv \sqrt{x^2+(\alpha+\mathrm{i}x^0)^2} \equiv \sqrt{u+\mathrm{i}v} = \left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}\right]^{1/2}+\mathrm{i}\left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}\right]^{1/2}$$

と置けば，

$$|\zeta|^{-2} \leqslant 4\left|\frac{\eta}{v}\right|^2 \tag{4.1.28}$$

が成り立つ．ここに

$$\eta = \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}-|u|}{2}\right)^{1/2} \geqslant 0 \tag{4.1.29}$$

実際，不等式（4.1.28）は不等式

$$1 \leqslant 2\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v^2}(\sqrt{u^2+v^2}-|u|) = \frac{2\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}+|u|}$$

と同値であり，これは恒等的に正しい．

上に得られた不等式において，

$$v = 2\alpha t, \qquad u = x^2-t^2+\alpha^2$$

と置くと，$z = m\zeta$ のとき次の評価が得られる：

$$|D^{(-)}(t-\mathrm{i}\alpha, x)| < A_1\frac{\sqrt{\frac{\eta}{|t|}}+\sqrt{\alpha}}{\alpha^2}\eta^{3/2}e^{-m\eta}|t|^{-3/2}. \tag{4.1.30}$$

$\eta \geqslant 0$ だから，$|t| > 1$ に対し関数（$\sqrt{\eta/|t|}+\sqrt{\alpha}$）$\eta^{3/2}e^{-m\eta}$ は $A_2(1+\sqrt{\alpha})$ で上からおさえられる．(4.1.26) の一つ前の式に (4.1.30) を代入すると

$$|F(x)| < B|t|^{-3/2}\int_0^\infty e^{-\alpha}(1+\sqrt{\alpha})\,d\alpha \equiv B_1|t|^{-3/2} \tag{4.1.31}$$

に到達する．

さらに進んで，次の積分を評価しよう：

$$\int|D^{(-)}(t-\mathrm{i}\alpha, x)|\,d^3x = \int_{r^2\geqslant 2t^2}|D^{(-)}(t-\mathrm{i}\alpha, x)|\,d^3x+\int_{r^2\leqslant 2t^2}|D^{(-)}(t-\mathrm{i}\alpha, x)|\,d^3x$$
$$\equiv I_1+I_2.$$

二番目の積分は，被積分関数の最大値と積分区間の長さの積を越えないから (4.1.30) を用いて，

$$I_2 \equiv \int_{r^2\leqslant 2t^2}|D^{(-)}(t-\mathrm{i}\alpha, x)|\,d^3x \leqslant C_1\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\alpha^2}|t|^{3/2}$$

となる．

I_1 を評価するには，被積分関数が指数関数的に減少する事実を利用する．その結果

$$I_1 \leqslant C_2 \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{3/4}}$$

を得る．このようにして

$$I_1+I_2 \leqslant C \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\alpha^2} |t|^{3/2}.$$

この不等式の両辺に $\alpha^2 e^{-\alpha}$ をかけて，α について 0 から ∞ まで積分すると，次の結果が得られる：

$$\int |F(x)|\, d^3\boldsymbol{x} \leqslant D |t|^{3/2}. \tag{4.1.32}$$

このようにして，関数 F に対しては，不等式 (4.1.22) と (4.1.23) が正しいことが証明できた．またこの特定の関数に対しては，不等式 (4.1.24) もまた成り立つことが，上に示した評価を用いて簡単に証明できる．

そこで，一般の場合に移るために，Klein-Gordon 方程式の (4.1.21) 形の任意の滑らかな負振動数解が次の形に書けることに注意しよう：

$$\begin{aligned} f(t, \boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(p^2-m^2)\,\theta(p^0)\,e^{-ipx} g(\boldsymbol{p})\, d^4p \\ &= \int F(t, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\, h(\boldsymbol{\xi})\, d^3\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

ここに，

$$h(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{(1+\omega_{\boldsymbol{p}})^3}{2} g(\boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\xi}} d^3\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}(R_3). \tag{4.1.34}$$

そうすると，関数 $f(t, \boldsymbol{x})$ に対する不等式 (4.1.22) ～ (4.1.24) は，$F(t, \boldsymbol{x})$ に対する対応する評価を用いて容易に得られる．このとき，これらの不等式の右辺の定数に有限の正の量

$$\int_{R_3} |h(\boldsymbol{\xi})|\, d^3\boldsymbol{\xi} < \infty$$

をかけるだけでよい．

以上によって，補題 4.1.1 は証明された．

問題 4.1.2 四元ベクトル n が空間的あるいは等方的であるとき，$f(\lambda n)$ (4.1.21) は実数のパラメータ λ の関数として空間 $\mathcal{S}(R_1)$ に属することを示せ．特に，

$$|\lambda^k f(\lambda n)| < C_k(f, n) \qquad (n^2 \leqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.1.35}$$

あるいは，別の表わし方をすると，$r \equiv |\boldsymbol{x}| \geqslant |t|$ に対して

$$|f(t, \boldsymbol{x})| \leqslant \frac{C_k(f)}{(1+r)^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots).$$

若干の注意．　1.　不等式 (4.1.35) は，直線 λn $(-\infty < \lambda < \infty)$ と関数 $\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)g(p)$ の台とが共通部分をもたないなら，実際は時間的な n に対しても正しい (Hepp (1965 a))．

2.　Λ を任意の Lorentz 変換として，関数 $f_\Lambda(x)=f(\Lambda^{-1}x)$ は $f(x)$ と共に補題 4.1.1 のすべての条件をみたす．従ってその関数に対しても，(4.1.22) ～ (4.1.24) の評価が成り立つ．これに加えて，変換 Λ が Lorentz 群の単位元の任意のコンパクト近傍を動くとき，上述の評価はこの近傍において一様に成り立つ (つまり，定数 B が Λ によらない) (Streater (1967))．

3.　Klein=Gordon 方程式の滑らかな解の導関数はまたこの方程式の滑らかな解であるから，補題 4.1.1 はこれらの導関数に対しても成り立つ．

1.4.　定理 4.1.1 および 4.1.2 の証明

定理 4.1.1 の前半の証明． ベクトル (4.1.12) の列が $t\to\pm\infty$ で強収束することを証明するには，導関数 $d\Phi(t)/dt$ のノルムが変数 t の全域 $(-\infty,\infty)$ にわたって積分可能であることを示せば十分である．実際，もしそうなら，$t_1<t_2$ に対して，$t_1\to+\infty$ あるいは $t_2\to-\infty$ のとき，

$$\|\Phi(t_1)-\Phi(t_2)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\left\|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right\|dt \to 0 \qquad (4.1.36)$$

となるからである．

そこで，(4.1.36) を証明しよう．このため，$\|d\Phi(t)/dt\|^2$ を実質真空期待値の積の和に分解しよう (第3章，2.3 節を参照)．この分解の任意の各項は，次の形の積分をいくつかかけあわせたものである：

$$\begin{aligned} I_k(t) = \int_{x_i^0=t}\cdots\int f'_{i_1}(x_1)\cdots f'_{i_k}(x_k) \\ \times(\Psi_0, A'(x_1)\cdots A'(x_k)\Psi_0)^T d^3x_1\cdots d^3x_k. \end{aligned} \qquad (4.1.37)$$

ここで関数 f_i は Klein=Gordon 方程式の滑らかな解，f'_i と A' は f_i, A またはそれらを時間について微分したものを表わす．場 A 自身の真空期待値は 0 だから，$k\geqslant 2$ と考えて差しつかえない．ところで，もし与えられた項のすべての因子に対して $k=2$ なら，そのような項は一粒子状態の安定性 (4.1.20) によって 0 に等しい．そこで，$k\geqslant 3$ のときの関数 $I_k(t)$ の振舞いを調べよう．

定理 3.2.3 によれば，もし $u(x_1,\cdots,x_k)\in\mathcal{S}(R_{3k})$ なら，

$$F(a_1,\cdots,a_k) = \int u(x_1-a_1,\cdots,x_k-a_k)$$

$$\times(\Psi_0, A'(t, \boldsymbol{x}_1) \cdots A'(t, \boldsymbol{x}_k)\Psi_0)^T d^3\boldsymbol{x}_1 \cdots d^3\boldsymbol{x}_k \tag{4.1.38}$$

は差 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k$ の関数として $\mathcal{S}(R_{3(k-1)})$ に属する基礎関数である．このようにして，実質真空期待値

$$T(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}) = (\Psi_0, A'(t, \boldsymbol{x}_1) \cdots A'(t, \boldsymbol{x}_k)\Psi_0)^T$$

$$(\boldsymbol{\xi}_j \equiv \boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_{j+1}) \tag{4.1.39}$$

は $\mathcal{S}(R_{3(k-1)})$ においてたたみこみ可能となる（第1章，3.2節を参照）．従って補題1.3.2により，絶対値において，

$$c\prod_{l=1}^{k}(1+|\xi_l|^2)^{-2}$$

を越えない連続関数の導関数の有限個の和になる．

このことから次の評価が導かれる：

$$|I_k(t)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \int |f''_1(t, \boldsymbol{x}_1)|\, d^3\boldsymbol{x}_1 \prod_{l=2}^{k} \sup_{x_l} |f''_l(t, \boldsymbol{x}_l)| \left[\int \frac{d^3\xi}{(1+|\xi|^2)^2}\right]^{k-1} \tag{4.1.40}$$

ここで二重のダッシュをつけた f''_l などは，f_l またはそれの時空座標に関する微分を表わす*)．さらに不等式（4.1.22）および（4.1.23）を用いると

$$|I_k(t)| < c|t|^{-\frac{3}{2}(k-2)} \tag{4.1.41}$$

が得られる．$\|d\Phi/dt\|^2$ を I_k に分解したさい，$k \geqslant 4$ であるような I_k が少なくとも一つあるか，あるいは $k \geqslant 3$ の I_k が二つあるから，（4.1.41）から評価

$$\left\|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right\| \leqslant B|t|^{-\frac{3}{2}} \tag{4.1.42}$$

が導かれ，これから（4.1.36）がでる．よって，定理4.1.1の前半が証明された．

定理4.1.1の後半の証明． 次に，極限 Φ^{ex} は，ベクトル（4.1.12）を定義するのに用いた特定の Lorentz 座標系によらないことを示そう．

$\Lambda \in L_+^\uparrow$ としよう．演算子 $A(f,t)$（4.1.11）に対する Λ の作用は，次の式で定義される：

$$A(f,t) \to A_\Lambda(f,t) = \mathrm{i}\int_{x^0=t} f(\Lambda^{-1}x)\overleftrightarrow{\partial_0} A(\Lambda^{-1}x)\, d^3\boldsymbol{x}. \tag{4.1.43}$$

われわれの目標は，公式（4.1.12）で定義された Φ および

$$\Phi_\Lambda(t) = A_\Lambda(f_1, t) \cdots A_\Lambda(f_n, t)\Psi_0 \tag{4.1.44}$$

で定義された Φ_Λ に対して，

---

*) 空間座標に関する微分は，たたみこみ可能な関数の評価を補題1.3.2によって行なうときに生ずる．

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|\Phi_\Lambda(t)-\Phi(t)\|=0 \tag{4.1.45}$$

が成り立つことを示すことである．

これを証明するために，ノルムの平方

$$\|\Phi_\Lambda(t)-\Phi(t)\|^2 \tag{4.1.46}$$

をあらためて実質真空期待値に分解しよう．そのさいに現われるすべての表現が Λ に滑らかに依存することを考慮すると，上述の漸近的極限が無限小 Lorentz 変換に対して不変であることを示せば十分である．このうち三次元回転に関する不変性は明らかである．従って，次の無限小 Lorentz 変換

$$\Lambda^\epsilon=1-\varepsilon(x^j\partial_0-x^0\partial_j) \tag{4.1.47}$$

の $A(f,t)$ に対する作用だけを調べる．

このことは，差の平方 (4.1.46) の代わりに，導関数のノルムの平方，すなわち，

$$\|N_j\Phi_{\Lambda(\alpha)}\|^2=\left\|\frac{\partial\Phi_{\Lambda(\alpha)}}{\partial\alpha_j}\right\|^2 \tag{4.1.46 a}$$

を調べることと同等である（ここで Lorentz 群のパラメータとしては第2章，3.1節で用いたものと同じものを用いた）．

問題 4.1.3　ε の一次で次の式が成り立つことを示せ．

$$dA(f,t)=\mathrm{i}\,\varepsilon\int_{x^0=t}x^jf(x)(\square+m^2)A(x)d^3\boldsymbol{x} \tag{4.1.48}$$

（ヒント：関数 $f(x)$ が Klein=Gordon 方程式をみたすことを用いよ）．

ベクトル (4.1.18) が Klein=Gordon 方程式をみたすこと（問題 4.1.1 参照）を用いると，(4.1.48) から

$$\frac{dA(f,t)}{dt}\Psi_0=0 \tag{4.1.49}$$

が出る．

その結果，(4.1.46) を実質真空期待値 $I_k(t)$ (4.1.37) に分解したさいにも，前と同様 $k\geqslant 3$ の場合だけを考えればよいことになる．このような項はいずれも大きい $|t|$ に対して少なくとも $|t|^{-1/2}$ のように減少する．補題 4.1.1 に対する注意2を用いると，群のパラメータが有界領域のなかを動くとき，(4.1.46 a) はこれらのパラメータに関し一様に0に収束することが示される (Streater (1967))．このことから，(4.1.45) が導かれる．よって，定理 4.1.1 は証明された．

定理 4.1.2 の証明．　次のスカラー積

$$(A(f_1,t)\cdots A(f_n,t)\Psi_0, A(g_1,t)\cdots A(g_k,t)\Psi_0) \tag{4.1.50}$$

を実質真空期待値に分解しよう．上に用いたいろいろの評価によると，Aを二つ含む実質真空期待値の積になっている項を除いて，それ以外のすべての項は $|t|\to\infty$ で0になる．他方 (4.1.5) によれば，残っている項は，自由な中性スカラー場の理論においてこれに対応するスカラー積に等しい．このことから，(4.1.14) で定義された演算子 $\varphi^{\mathrm{ex}}(f)$ は (4.1.15) のように表現できることが導かれる．場 $\varphi^{\mathrm{ex}}(f)$ の Poincaré 群に属する変換に対する変換性 (4.1.16) は，定理 4.1.1 の後半の証明から得られる．よって定理 4.1.2 が証明された．

1.5. 漸近的完全性の要請．可能な一般化

これまでの議論において，われわれは，一般的な基本仮定のほかに，便宜上いくつかの特殊な仮定を用いた．それらの仮定とは，互いに関連している次の事がらを指す．すなわち，まず場 $\varphi(x)$ がスカラーでかつエルミートであること，Fock 空間 $\mathcal{H}$ が自由な中性スカラー粒子の空間と同じ構造をもっていること，しかも公式 (4.1.1) が成り立つこと（これは，場 $\varphi(x)$ が一粒子状態と直接に結びついていることを意味する）である．

Ruelle (1962) によって研究された一般の場合には，次の仮定がなされた．すなわち，空間 $\mathcal{H}$ を Poincaré 群の既約表現に従って Stieltjes 積分の意味で直和に分解したとき，そのなかに質量が m でスピンが s の離散表現に対応する部分空間 $\mathcal{H}_{ms}$ が含まれているという仮定である．これに加えて，$P(\varphi_\nu;f)\Psi_0\in\mathcal{H}_{ms}$ であるような (3.1.18) の形の多項式 $P(\varphi_\nu;f)$ の存在が仮定された．このような多項式が存在することは，もし m^2 が演算子 P^2 の孤立した固有値であれば，真空が巡回ベクトルであるという要請（仮定VII，第3章，1.3 節を見よ）から導かれる．一粒子状態の双曲面が P^2 の連続スペクトルのなかにある場合には，多項式 $P(\varphi_\nu;f)$ の存在を選択規則によって保証することができる．たとえば，核子一個の状態は中間子二個（一般には多数個）の状態に相当する連続スペクトルのなかにあるが，バリオン数 $B=1$ ということでそれらの状態から分離できる．多項式 P があるとき，公式

$$A(x)=U(x,1)\,P(\varphi_\nu;f)\,U^{-1}(x,1) \tag{4.1.51}$$

によってほとんど局所的な場 A を定義しよう．

これからあとは，前と同様に (1.2～1.4 節) 漸近状態が演算子 (4.1.51) を用いて構成される．このような構成は，いわゆる複合モデルに相当するものである．たとえば，スカラー（あるいはギ・スカラー）粒子は，二つのスピノル場からなる系の束縛状態として

生ずる．

上の定理が粒子の言葉で正当に解釈できるためには，われわれは第3章における公理 I ～ VII に加えて，次の《漸近的完全性の要請》を置かなくてはならない：

VIII. Hilbert 空間 $\mathscr{H}_{\rm in}$ ($t\to-\infty$ のときの漸近状態から成る) は状態ベクトルの空間 $\mathscr{H}$ の全体と一致する．

この基本仮定および *TCP* 定理（これは次章すなわち第5章の§2で説明する）から，$\mathscr{H}_{\rm out}$ もまた $\mathscr{H}$ と一致すること，従って

$$\mathscr{H}_{\rm in}=\mathscr{H}=\mathscr{H}_{\rm out} \tag{4.1.52}$$

が成り立つことが導かれる．その結果，演算子 $\varphi^{\rm in}(x)$ および $\varphi^{\rm out}(x)$ は同一の Hilbert 空間において作用することになるが，これらはさらに，ユニタリ同値である．すなわち，次の二つの条件によって一義的に定まるユニタリ演算子 S が存在する：

$$\varphi^{\rm out}(x)=S^{-1}\varphi^{\rm in}(x)S \tag{4.1.53}$$

$$S\Psi_0=\Psi_0. \tag{4.1.54}$$

演算子 S は《散乱演算子》とよばれる．それは入射粒子の状態 (in) と出ていく粒子の状態 (out) のあいだの遷移の確率を与える．漸近場の共変性 (4.1.16) に完全性の要請VIIIと真空の安定条件 (4.1.54) を合わせると，演算子 S が Poincaré 群の諸変換に対して不変であること，

$$U(a,\Lambda)SU^{-1}(a,\Lambda)=S \tag{4.1.55}$$

が導かれる．

要請 VIII は，第3章において定式化された他の基本仮定とは独立な仮定である．このことは，一般化された自由場（第3章，4.5節）を例にとって確かめてみることができる．

問題　4.1.4　$\rho(\lambda)$ を無限遠で0になる非負の連続関数として，次の関係

$$\mathrm{i}[\varphi(x),\varphi(y)]=\int_a^\infty D_\lambda(x-y)\rho(\lambda)d\lambda \tag{4.1.56}$$

が成り立つなら，空間 $\mathscr{H}_{\rm ex}$ は真空ベクトルだけから成ることを示せ．

要請 VIII を保証する（別の言葉でいえば，場の理論が完全に粒子の言葉で解釈できるようにする）ためにつけ加えるべき局所的な性格の条件はどのようなものかという問題は，Haag と Swiecaの論文 (1965) において論じられている．

§ 2. Lehmann=Symanzik=Zimmermann の漸近条件と因果的 Green 関数

2.1. はじめに

場の量子論における公理的方法の展開の初期に，すでに Lehmann, Symanzik および Zimmermann (1955) (以下 LSZ と略す) は，状態ベクトルの Hilbert 空間における演算子

$$\varphi(f,t) = \mathrm{i}\int_{x^0=t} f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(x)\,d^3x \qquad (4.2.1)$$

に対する弱収束を用いて漸近条件を定式化した．ここに $f(x)$ は Klein=Gordon 方程式の負振動数解で，条件

$$\mathrm{i}\int_{x^0=t} \bar{f}(x)\overleftrightarrow{\partial_0} f(x)\,d^3x = 1 \qquad (4.2.2)$$

に従って規格化されているものとする（簡単のため，今度も，質量が m のスカラー場が一つだけ存在する場合に話を限ろう）．言葉を変えていえば，次のことが漸近条件として仮定される：

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\Phi, \varphi(f,t)\Psi) = (\Phi, \varphi^{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(f,\tau)\Psi). \qquad (4.2.3)$$

ここで，前にも注意したように，$\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$ は自由場の方程式

$$K_x\varphi^{\mathrm{ex}}(x) = (\Box+m^2)\,\varphi^{\mathrm{ex}}(x) = 0 \qquad (\mathrm{ex} = \mathrm{in}, \mathrm{out}) \qquad (4.2.4)$$

を満足するから，$\varphi^{\mathrm{ex}}(f,\tau) \equiv \varphi^{\mathrm{ex}}(f)$ は実際は τ に依存しない．

そこで，

$$K_x\varphi(x) = j(x) \qquad (4.2.5)$$

と置くと，この $j(x)$ は定義によって Heisenberg のカレント[1]であるが，Heisenberg 場 $\varphi(x)$ と漸近場 $\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$ のあいだの関係は，形式的には

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi^{\mathrm{in}}(x)+\int D^{\mathrm{ret}}(x-y)\,j(y)\,d^4y\\ &= \varphi^{\mathrm{out}}(x)+\int D^{\mathrm{adv}}(x-y)\,j(y)\,d^4y\end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

によって与えられる．ここで D^{ret} および D^{adv} は，それぞれ，遅延型および先発型 Green 関数で，その定義は第 3 章の付録に与えてある．

上の二つの方程式から，引き算によって，二種類の漸近場の相互の関係は，

---

1) この呼び名は電気力学に起源をもっている．すなわち，電気力学においてベクトル・ポテンシャル A_μ は方程式 $\Box A_\mu(x) = j_\mu(x)$ を満足し，ここで $j_\mu(x)$ は保存される電流を表わす．

$$\varphi^{\text{out}}(x) = \varphi^{\text{in}}(x) + \int D(x-y)\, j(y)\, d^4y \tag{4.2.7}$$

となる．ここで $D(x)$ は(場の交換関係の右辺に現われる) Pauli=Jordan 関数 (3.4.3) である．方程式 (4.2.6) ～ (4.2.7) は Yang=Feldman の方程式とよばれる（もちろん，これらの方程式が場 $\varphi(x)$ に対する閉じた連立方程式と考えられるのは，カレント $j(x)$ が，たとえば φ の多項式の形で，あらかじめ与えられている場合だけである）．

さらに進んで，Lehmann, Symanzik, Zimmermann は，注目すべき漸化式を見いだした．この公式は摂動論によって示唆されたもので，散乱演算子 S の行列要素を，Heisenberg 場の演算子を時間の順序に従って並べたいわゆる T 積の真空期待値を用いて書き表わすことができる．Ω_{ex} からとったベクトル

$$\Phi^{\text{ex}}(f_1, \cdots, f_n) \equiv |f_1, \cdots, f_n^{\text{ex}}\rangle$$

に対しては，LSZ の漸化式は次の形をもつ：

$$\begin{aligned}\langle g_1 \cdots g_r^{\text{out}} | f_1 \cdots f_l^{\text{in}}\rangle &= \langle g_1 \cdots g_r^{\text{out}} | S | f_1 \cdots f_l^{\text{out}}\rangle \\ &= \mathrm{i}^{r+l} \int \cdots \int G^c(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_l) \\ &\quad \times \bar{g}_1(x_1) \cdots \bar{g}_r(x_r)\, f_1(y_1) \cdots f_l(y_l)\, d^4x_1 \cdots d^4x_r\, d^4y_1 \cdots d^4y_l.\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

ここで G^c は，いわゆる因果的 Green 関数である．

$$G^c(x_1, \cdots, x_n) = K_{x_1} \cdots K_{x_n} \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\} | 0\rangle \tag{4.2.9}$$

この式の右辺に現われる T 積[1]は，その変数のいずれの二つも相等しくないならば，公式

$$\begin{aligned}&T\{\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\} \\ &\quad = \sum_{\{i_1 \cdots i_n\}} \theta(x_{i_1}^0 - x_{i_2}^0) \cdots \theta(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0)\, \varphi(x_{i_1}) \cdots \varphi(x_{i_n})\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

によって定義される（和は，数字 $1, \cdots, n$ のすべての可能な置換 $i_1, \cdots, i_n$ にわたってとる）．

さて，この漸化式を，Wightman の理論の枠内で証明することができるかどうかが次の問題である．困難はすでに，公式 (4.2.6) ～ (4.2.10) に正確な意味を与えようとする試みにおいて現われる．たとえば，(4.2.10) の右辺は，演算子を値にもつ一般関数と不連続な θ-関数との積を含んでいる．このような積は一般に定義できない（実は摂動論に

[1] 別の言葉でいえば，時間の順序に従って並べられた，あるいはクロノロジカルな，場の演算子の積である（たとえば，文献 [4] の §18.4 を参照）．なお，局所可換性の基本仮定によって積(4.2.10) は座標系のとり方にはよらないことに注意しよう．

おける《紫外部発散》はこの種の積に関係している．これについては，4.2 節を見よ)．われわれはここで，Hepp (1965 a, b) によるこの問題の部分的解答を述べる．

すなわち空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}$ のベクトルのある稠密な集合においては，LSZ の漸近条件と Yang=Feldman の方程式とが成り立っていることを示そう．そのベクトルの集合とは，互いに離ればなれに飛び散っていく粒子の集まり，あるいは別の言葉でいえば，速度空間において個々の粒子の波束が互いに重なり合うことがないような状態を記述するものである．証明は次の事実に基づく．すなわち，上に述べたような状態は一粒子励起に対応する場からつくった多項式を真空にかけて得られる状態によって，いくらでも正確に近似できる．漸近条件は x 空間において，$p^0-\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ に共役な変数に関し，正則化された Green 関数が無限遠で収束することをいい表わすものであるが，このことは p 空間で，これらの関数が，質量殻 $p^0=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ の近傍では正則であることを保証している．従って，少なくとも離ればなれになっていく粒子の集まりを記述する運動量の組については，質量殻の上へ極限移行によって達することが正当化できる．このようにして，散乱振幅に対するLSZ の漸化式を基礎づけることが可能である．

2.2. 漸近条件と Yang=Feldman の方程式

簡単のため，再び質量が m の中性スカラー場 $\varphi(x)$ が一つだけある場合を考えよう．この場は，1.2 節の要請をみたすものとし，特に，Källén=Lehmann の表示 (4.1.2) が可能であるとしよう．そこでまた (4.1.11) の形に均らした演算子を導入しよう．これは

$$A(f,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\tilde{f}(p)\,\tilde{\varphi}(p)\,e^{i(\omega-p^0)t}\,d^4p \tag{4.2.11}$$

という形に書くこともできる．ここで $\tilde{f}(p)$ は $\mathcal{S}$ に属する基礎関数で，双曲面 $p^0=\omega$ のある近傍の外では 0 であるものとする (関数 $\tilde{f}(p)$ の台は領域

$$G_m=\{p\in R_4, 0<p^0<\sqrt{\boldsymbol{p}^2+4m^2}\} \tag{4.2.12}$$

に含まれ，その結果，Källén=Lehmann の方程式における連続スペクトル領域で $\tilde{f}(p)$ は 0 になっていると考えることができる．これについては，(4.1.4) を見よ)．

問題 4.2.1 公式 (4.2.11) は，$g_+(\boldsymbol{p})=0$ とし

$$\tilde{f}(p)=-(\omega+p^0)h(p^2)g_-(\boldsymbol{p}) \tag{4.2.13}$$

と置いた (4.1.11) の特別な場合であることを示せ．

まえにも注意したように (1.2 節を参照)，$A(f,t)$ は $\mathcal{H}$ における非有界演算子であるが，その定義域には稠密な核型空間 Ω が含まれている．これに加えて，$\tilde{f}\in\mathcal{S}(G_m)$ の

場合にはスペクトル条件により，

$$A(f,t)\,|0\rangle = 0 \tag{4.2.14}$$

となり，一方，(4.1.5) と (4.1.20) によって，

$$A^*(f,t)\,|0\rangle = |\hat{f}\rangle \tag{4.2.15}$$

である．ただし，ここで

$$\hat{f}(\boldsymbol{p}) = \tilde{f}^*(\omega, \boldsymbol{p}) \in \mathcal{S}(R_3)\,. \tag{4.2.16}$$

Haag=Ruelle の定理によれば，次の極限

$$\lim_{t\to\pm\infty} \prod_{j=1}^{n} A^*(f_j, t)|0\rangle = |\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_n\rangle^{\mathrm{ex}} \tag{4.2.17}$$

が $\mathcal{H}$ における強収束の意味で存在し，漸近状態の空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}$ の一つの基底を与える．

さて，今度は，(4.2.17) における収束の速さを調べよう．ただし，次のような仮定をする．すなわち，速度空間において，$\tilde{f}_j$ のどの二つを取ってもそれらの台は互いに共通部分をもたない，つまり，$\boldsymbol{p}_i \in \mathrm{supp}\,\tilde{f}_i$ に対しては，常に

$$\frac{1}{\omega_i}\boldsymbol{p}_i \neq \frac{1}{\omega_j}\boldsymbol{p}_j \qquad (i \neq j \text{ のとき}) \tag{4.2.18}$$

が成り立つものとするのである．すべての $\boldsymbol{p}_j \in \mathrm{supp}\,\hat{f}_j$ に対して (4.2.18) が成立しているとき，関数の集まり $\{\hat{f}_j\}$ $(\hat{f}_j \in \mathcal{S}(R_3))$ は互いに**〈重なりがない〉**ということにしよう．

最小の質量 m が正であるような局所場の理論においては，力の到達距離が有限であることの結果として，互いに重なりのない漸近状態 $|\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_n^{\mathrm{ex}}\rangle$ は t の増大とともに

$$\prod_{j=1}^{n} A^*(f_j, t)|0\rangle \tag{4.2.19}$$

というほとんど局所化可能な状態に急速に近づくことを示そう．

もうすこし正確にいえば，次の定理が成り立つことを証明する．

[定理 4.2.1]　互いに重なりのない関数の集まり，$\{\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_n\}$，$\tilde{f}_j \in \mathcal{S}(G_m)$ に対して不等式

$$\left\| \frac{d}{dt} \prod_{j=1}^{n} A^*(f_j, t)|0\rangle \right\| < C_N (1+|t|)^{-N} \tag{4.2.20}$$

が成立する．ここで，すべての N[1] に対して $C_N < \infty$ である．

われわれは，ここでは，定理 4.2.1 の証明の考え方だけを紹介し，詳細については読者

---

1) $N = 3/2$ のときには，(4.2.20) の形の不等式は，関数 $\tilde{f}_j$ が重なりをもたないという仮定なしに証明できたことを思い起こそう ((4.1.42) を見よ).

の研究にゆだねる.

(4.2.20) の左辺の平方を実質真空期待値の積の和に分解しよう. (4.2.14) と (4.2.15) によって

$$A(f_j,t)|0\rangle=\frac{d}{dt}A^*(f_j,t)|0\rangle=0$$

であるから, すべての一点関数は 0 であり, また, この分解のなかで二点関数のみを含むような積はすべて 0 に等しい. したがって, 定理 4.2.1 の証明は, 結局, 任意の $N>0$ と $k\geqslant 3$ に対して次の不等式を確かめることに帰着する:

$$\left|t^N\langle 0|\prod_{\nu=1}^{j}A'(f_{i_\nu},t)\prod_{\mu=j+1}^{k}A'^*(f_{i_\mu},t)|0\rangle^T\right|<C_N<\infty \qquad (4.2.21)$$

(C_N は t には依存しない). A' は場 A そのものまたは A の時間に関する微分を表わす. (4.2.21) を証明するには, 定理 3.2.3 と, 波束 $\tilde{f}_i$ が速度空間において互いに重なりをもたないという条件を用いる. $k\geqslant 3$ ということから, 不等式 $j\geqslant 2$ と $k-j\geqslant 2$ の少なくともどちらか一つは常に成り立つ. この二つの場合の議論はまったく同様である.

そこで第一の場合 ($j\geqslant 2$) だけを以下において論ずる. 並進不変性を用いると, (4.2.21) の左辺は書き直せて,

$$\begin{aligned}&\left|t^N\int\cdots\int\prod_{\nu=1}^{j}d^4p_\nu\tilde{f}_{i_\nu}(p_\nu)\,e^{i(\omega_\nu-p_\nu^0)t}\right.\\&\qquad\left.\times\prod_{\mu=j+1}^{k}d^4p_\mu\,\tilde{f}^*(-p_\mu)\,e^{-i(\omega_\mu+p_\mu^0)t}\,\tilde{w}^T(p_1,\cdots,p_k)\right| \qquad (4.2.22)\\&=\left|t^N\int\cdots\int\prod_{i=2}^{k}d^3p_i\chi(p_2,\cdots,p_k)\,e^{i\Omega(p_2,\cdots,p_k)t}\right|\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}&\chi(p_2,\cdots,p_k)\\&=\int d^4p_1\tilde{f}_{i_1}(p_1)\prod_{\nu=2}^{j}dp_\nu^0\tilde{f}_{i_\nu}(p_\nu)\prod_{\mu=j+1}^{k}dp_\mu^0\tilde{f}^*_{i_\mu}(-p_\mu)\tilde{w}^T(p_1,\cdots,p_k) \qquad (4.2.23)\end{aligned}$$

($\tilde{f}^*_i$ は $\tilde{f}_i$ に複素共役な関数を表わす),

$$\Omega(p_2,\cdots,p_k)=\left[m^2+\left(\sum_{i=2}^{k}p_i\right)^2\right]^{1/2}+\sum_{\nu=2}^{j}\omega_\nu-\sum_{\mu=j+1}^{k}\omega_\mu \qquad (4.2.24)$$

$$(\omega_\lambda=\sqrt{m^2+p_\lambda^2}).$$

(4.2.22) および (4.2.23) の被積分関数には, t に関する微分に相当してなお因子 $\omega_i-p_i^0$ が含まれていることがありうる. (4.2.22) を得るときには, 場 $\varphi(x)$ がエルミートであることを用い, そのことから導かれる関係 $\tilde{\varphi}^*(p)=\tilde{\varphi}(-p)$ を用いた. (4.2.23) から,

χ が基礎関数であること，すなわち $\chi\in\mathcal{S}(R_{3(k-1)})$ であることがわかる．実質 Wightman 関数 $\tilde{w}^T(p_1,\cdots,p_k)$ は四次元の δ–関数 $\delta(p_1+\cdots+p_k)$ に比例しているから，p_1 に関する積分を具体的に行なうことができて，Ω に対する表現 (4.2.24) が求められる．さらに，$\tilde{f}_{i_1}$ と $\tilde{f}_{i_2}$ は互いに重なりをもたないから，$\chi\neq 0$ であるような点において

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_2}=\left[m^2+\left(\sum_{i=2}^{k}p_i\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=2}^{k}p_i\right)+\omega_2^{-1}p_2=\omega_2^{-1}p_2-\omega_1^{-1}p_1\neq 0 \qquad (4.2.25)$$

が成り立つ．

(4.2.25) から，次のような単位の分解 $\{\alpha_i\}$ $(i=1,2,3)$ が存在することがわかる．すなわち，$\alpha_i(p)$ は無限に滑らかな有界関数であって，その和が1に等しく $(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\equiv 1)$ しかも $p_2\in\operatorname{supp}\chi(p_2,\cdots,p_k)\alpha_i(p_2)$ に対して $\partial\Omega/\partial p_2^i\neq 0$ であるようなものである．このとき，変数変換 $\Omega\leftrightarrow p_2^i$ は，$\chi\alpha_i\neq 0$ であるような領域においては正則である．従って，

$$\int\prod_\nu dp_\nu\chi(p_2,\cdots,p_k)\alpha_i(p_2)e^{i\Omega(p_2,\cdots,p_k)t}\in\mathcal{S}(R_1(\Omega)).$$

ここで $i=1,2,3$．これから (4.2.21) が導かれ，定理 4.2.1 が証明される．

いうまでもなく，定理 4.2.1 の上の証明は，積 $\tilde{f}_1(p_1)\cdots\tilde{f}_n(p_n)$ の代わりに $\tilde{f}(p_1,\cdots,p_n)\in\mathcal{S}((G_m)^n)$ を用いても，もし $(p_1,\cdots,p_n)\in\operatorname{supp}f$ に対して関数が重なりをもたないという条件 (4.2.18)[1]が成り立ってさえいれば，依然として正しい．

互いに重なりをもたないベクトル $\Phi^{\text{ex}}(\hat{f})$ の集合を Ω_0^{ex} と書くことにしよう．ただし，$\hat{f}$ は対称化された関数で，$\tilde{f}(p_1,\cdots,p_n)\in\mathcal{S}((G_m)^n)$ を用いて次の式によって定義されたものとする：

$$\hat{f}(p_1,\cdots,p_n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\{i_1\cdots i_n\}}\tilde{f}(\omega_{i_1}p_{i_1},\cdots,\omega_{i_n}p_{i_n}). \qquad (4.2.26)$$

この集合は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ においていたるところ稠密である．なぜなら，速度空間において重なりをもたない (4.2.26) の形の関数の集まりは，ノルムの平方が，

$$\int\prod_{i=1}^{n}d^4p_i\,\delta_+(p_i)\,|\tilde{f}(p_1,\cdots,p_n)|^2<\infty \qquad (4.2.27)$$

---

[1] 定理 4.2.1 から次のことが出てくる．すなわち，速度空間における波束が互いに重なりをもたないという条件の下で，Haag-Ruelle の極限 (4.2.17) は $|t|^{-1}$ の任意のベキよりも速く達せられる．しかも，このことは Minkowski 空間の空間部分の次元によらない（これについては，補題 4.1.1 の証明と比較せよ．この補題の証明はそのまま空間の次元が1の場合に引き移すことはできない）．特に，空間が一次元あるいは二次元の世界においても，合理的な散乱理論を展開できる．このことは，場の量子論の二次元モデル（たとえば，Thirring (1958) のモデル）の研究のさいに重要である．

であるような対称関数 $\tilde{f}(p_1, \cdots, p_n)$ の全体がつくる空間においていたるところ稠密だからである．ただし，上の式で

$$\delta_+(p) = \theta(p^0)\delta(p^2-m^2) \tag{4.2.28}$$

である．

Ω_0^{ex} においては，場の演算子からつくられる均らした多項式のすべてが定義されている（これらの量の最初の定義域は核型空間 Ω であった）ばかりでなく，それとともに，(4.1.15) の形の漸近場の演算子 $a^{(*)\mathrm{ex}}(\hat{f})$ もまた定義されている（ここで $a^{(*)\mathrm{ex}}$ は a^{ex} または $a^{*\mathrm{ex}}$ を表わす）．

さて，これで，LSZ の漸近条件を導く準備ができた．

[定理 4.2.2] $\Phi^{\mathrm{ex}} \in \Omega_0^{\mathrm{ex}}$，また $\tilde{f}_i \in \mathcal{S}(G_m)$ とする．そのとき，

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left\|\prod_{i=1}^{n} A^{(*)}(f_i, t)\,\Phi^{\mathrm{ex}} - a^{(*)\mathrm{ex}}(\hat{f}_i)\,\Phi^{\mathrm{ex}}\right\| = 0 \tag{4.2.29}$$

が成り立つ．ここで，まえと同様，括弧にいれた星印は場合に応じてエルミート共役を表わすものとする．

もし $\Phi^{\mathrm{ex}} \in \Omega_0^{\mathrm{ex}}$，$\Psi^{\mathrm{ex}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ex}}$ で，また $\tilde{f}_i \in \mathcal{S}(G_m)$，$\tilde{g}_i \in \mathcal{S}(R_4(p))$ であれば，次の式が成立する：

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\Psi^{\mathrm{ex}}, \prod_{i=1}^{k} A(g_i, t) \prod_{j=1}^{n} A^*(f_j, t)\,\Phi^{\mathrm{ex}}\right)$$
$$= \left(\Psi^{\mathrm{ex}}, \prod_{i=1}^{k} a^{\mathrm{ex}}(\hat{g}_i) \prod_{j=1}^{n} a^{*\mathrm{ex}}(\hat{f}_j)\,\Phi^{\mathrm{ex}}\right). \tag{4.2.30}$$

証明． ベクトル

$$\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j, t)\,\Phi^{\mathrm{ex}}(\hat{f})$$

を次の形のベクトル

$$\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j, t)\,\Phi(f, t)$$

によって近似しよう．定理 4.2.1 および積 $\prod A^{(*)}(f_j, t)$ が演算子を値にもつ緩増加一般関数であることを用いると，

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j, t)\frac{d}{ds}\Phi(f, s)\right\| \leqslant d_K(1+|s|)^{-K}(1+|t|)^{L} \tag{4.2.31}$$

が得られる．ここで L は固定されており，また任意の K に対して $d_K < \infty$ である．このことから，たとえば

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j,t)\Phi^{\text{out}}(\hat{f})-\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j,t)\Phi(f,t)\right\|$$
$$\leqslant\int_t^{\infty} ds\left\|\prod_{j=1}^{n} A^{(*)}(f_j,t)\frac{d}{ds}\Phi(f,s)\right\|<C_N(1+|t|)^{-N} \qquad (4.2.32)$$

が導かれる．この結果と（4.1.14）から，（4.2.29）および（4.2.30）が出てくる．

最後に，4.1節では単に形式的に書いた Yang=Feldman の方程式（4.2.6）もまた，空間 Ω_0^{ex} における等式として，はっきりした意味を与えられることを示そう．

任意の基礎関数 $\tilde{f}(p)\in\mathcal{S}(R_4)$ は次の三つの項の和として表わすことができる．すなわち，

$$\tilde{f}(p)=\tilde{f}_1(p)+\tilde{f}_2(p)+\tilde{f}_3(p).$$

ここで $\tilde{f}_i(p)\in\mathcal{S}(R_4)$ はそれぞれ次の性質をもつ：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\tilde{f}_1\subset\{|p^2-m^2|<m^2, p^0>0\},\\
&\operatorname{supp}\tilde{f}_2\subset\{|p^2-m^2|<m^2, p^0<0\}, \qquad (4.2.33)\\
&\operatorname{supp}\tilde{f}_3\subset\left\{|p^2-m^2|>\frac{m^2}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$\Psi^{\text{in}}\in\Omega_0^{\text{in}}$ のとき，無限に滑らかなベクトル値関数

$$F_1(s)=\sqrt{2\pi}\,\frac{d}{ds}A^*(f_1,s)\Psi^{\text{in}}$$

は，（4.1.42）により，区間 $-\infty<s\leqslant 0$ において条件

$$\|F_1(s)\|<c_1(1+|s|)^{-3/2}$$

を満足する．その結果，積分

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon s}F_1(s)\,ds$$

は $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$ に対して一様に収束し，また定理4.2.1によって次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi}(\varphi(f_1)^*\Psi^{\text{in}}-\varphi^{*\text{in}}(f_1)\Psi^{\text{in}})\\
&\quad=\int_{-\infty}^{0}F_1(s)\,ds=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{0}e^{\varepsilon s}F_1(s)\,ds\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{0}ds\int d^4p\,\tilde{f}_1^*(p)\,e^{is(p^0-\omega-i\varepsilon)}\,i(p^0-\omega)\tilde{\varphi}(-p)\Psi^{\text{in}}\\
&\quad=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{\tilde{f}_1^*(p)\tilde{j}(-p)}{(p^0+\omega)(p^0-\omega-i\varepsilon)}\Psi^{\text{in}}. \qquad (4.2.34)
\end{aligned}$$

ここでわれわれは，$p\in\operatorname{supp}\tilde{f}_1$ のとき $p^0+\omega>m>0$ であり，また

$$\tilde{j}(p) = (m^2-p^2)\tilde{\varphi}(p) \tag{4.2.35}$$

の関係があること，さらに $\varepsilon>0$ で

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{\tilde{f}^*(p)\,e^{is(p^0-\omega-i\varepsilon)}}{(p^0+\omega)(p^0-\omega-i\varepsilon)} = 0 \tag{4.2.36}$$

が成り立つという事実を利用した．

同様にして，

$$\varphi^*(f_2)\Psi^{\rm in}-\varphi^{*\rm in}(f_2)\Psi^{\rm in} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{s\to+0}\int d^4p\frac{\tilde{f}_2^*(p)\tilde{j}(-p)}{(p^0+\omega-i\varepsilon)(p^0-\omega)}\Psi^{\rm in} \tag{4.2.37}$$

も証明される．

質量殻と $\tilde{f}_3$ の台とが共通部分をもつことはないから，$\varphi^{\rm in}(f_3)\Psi^{\rm in}=0$，また

$$\varphi^*(f_3)\Psi^{\rm in} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d^4p\frac{\tilde{j}(-p)}{p^2-m^2}\Psi^{\rm in} \tag{4.2.38}$$

である．

このようにして，われわれは次の結果を得る．すなわち，$\Psi^{\rm ex}\in\Omega_0^{\rm ex}$ ならば，ベクトル値一般関数のあいだの等式として次の関係が成り立つ：

$$\varphi(x)\Psi^{\genfrac{}{}{0pt}{}{\rm in}{\rm out}} = \varphi^{\genfrac{}{}{0pt}{}{\rm in}{\rm out}}\Psi^{\genfrac{}{}{0pt}{}{\rm in}{\rm out}}+\int d^4y\,D^{\genfrac{}{}{0pt}{}{\rm ret}{\rm adv}}(x-y)j(y)\Psi^{\genfrac{}{}{0pt}{}{\rm in}{\rm out}} \tag{4.2.39}$$

((4.2.34) ～ (4.2.38) から (4.2.39) を得るときには，場 $\varphi(x)$ がエルミートであることを用いた)．

これが Yang=Feldman 方程式の正確な意味である．

2.3. 漸 化 式

さていよいよ，§2 のはじめ (2.1 節) で問題になった漸化式に進もう．われわれは，Wightman の公理論における Green 関数の存在という自明でない問題[1]を，均らした θ-関数を利用することによって回避しよう．あとで示すが，質量殻の上における散乱振幅は，この均らし方には依存しない．

χ を $\mathcal{D}(R_{n-1})$ から取った非負の基礎関数で，$(i_1,\cdots,i_n)$ を $(1,\cdots,n)$ の任意の置換とするとき対称性の条件

$$\chi(s_{i_1}-s_{i_2},\cdots,s_{i_{n-1}}-s_{i_n}) = \chi(s_1-s_2,\cdots,s_{n-1}-s_n) \tag{4.2.40}$$

を満足し，かつ規格化の条件

$$\int\cdots\int dt_1\cdots dt_{n-1}\chi(t_1,\cdots,t_{n-1}) = 1 \tag{4.2.41}$$

を満足するものとする．

---

[1] この問題に関して，Steinmann (1963 a) を見よ．

θ-関数の均らした積を次の公式によって定義しよう：

$$\theta_\chi(x_1^0-x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0-x_n^0)$$
$$=\int d(s_1-s_2)\cdots d(s_{n-1}-s_n)\,\chi(s_1-s_2,\cdots,s_{n-1}-s_n)$$
$$\times\theta(x_1-x_2-s_1+s_2)\cdots\theta(x_{n-1}-x_n-s_{n-1}+s_n). \tag{4.2.42}$$

この θ_χ は，0と1のあいだの値をとる無限に滑らかな関数で，もしも

$$\chi(s_1-s_2,\cdots,s_{n-1}-s_n)\to\delta(s_1-s_2)\cdots\delta(s_{n-1}-s_n) \tag{4.2.43}$$

とすれば，θ-関数の通常の積にもどることに注意しよう．

場の演算子の均らした T 積（これについては（4.2.10）と比較せよ），遅延（R）積および先発（A）積を，それぞれ次の公式によって定義しよう：

$$T_\chi(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\theta_\chi(x_{i_1}^0-x_{i_2}^0,\cdots,x_{i_{n-1}}^0-x_{i_n}^0)\varphi(x_{i_1})\cdots\varphi(x_{i_n}) \tag{4.2.44}$$

$$R_\chi(x_1;x_2,\cdots,x_n)=\mathrm{i}^{n-1}\sum_{\{i_2,\cdots,i_n\}}\theta_\chi(x_1^0-x_{i_2}^0,\cdots,x_{i_{n-1}}^0-x_{i_n}^0)$$
$$\times[\cdots[\varphi(x_1),\varphi(x_{i_2})],\cdots,\varphi(i_n)] \tag{4.2.45 a}$$

$$A_\chi(x_1;x_2,\cdots,x_n)=\mathrm{i}^{n-1}\sum_{\{i_2,\cdots,i_n\}}\theta_\chi(x_{i_n}^0-x_{i_{n-1}}^0,\cdots,x_{i_2}^0-x_1^0)$$
$$\times[\cdots[\varphi(x_1),\varphi(x_{i_2})],\cdots,\varphi(x_{i_n})] \tag{4.2.45 b}$$

ここで和は，$1,2,\cdots,n$（または $2,3,\cdots,n$）のすべての置換 $\{i_1,\cdots,i_n\}$（または $\{i_2,\cdots,i_n\}$）にわたって取る．これらの演算子を用いることによって，均らした Green 関数——因果的（G_χ^c，これについては(4.2.9)と比較せよ），遅延型（G_χ^{ret}）ならびに先発型（G_χ^{adv}）Green 関数——が定義される．それには，真空期待値を取って，変数の各々について Klein-Gordon 演算子を作用させればよい．

問題 4.2.2　$T_\chi(x_1,\cdots,x_n)$ を均らした T 積（4.2.44）とする．$T_\chi(x_2,\cdots,x_n)$ もやはり（4.2.44）の形の公式によって定義されるが，しかし場 $\varphi(x_1)$ がないとして，対称化は変数 $x_2,\cdots,x_n$ についてだけ行ない，一方（4.2.42）において $\theta(x_1^0-x_2^0-s_1+s_2)$ は1で置き換えるものとする．このとき，Γ を未来の光円錐のなかに向いた長さの十分大きい四元ベクトルとすれば，次の式が成り立つことを示せ．

$$T_\chi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}T_\chi(x_2,\cdots,x_n)\varphi(x_1), & x_i-x_1>\Gamma\\ \varphi(x_1)T_\chi(x_2,\cdots,x_n), & x_1-x_i>\Gamma.\end{cases} \tag{4.2.46}$$
$$(2\leqslant i\leqslant n)$$

問題 4.2.3　前問の結果を用いて，$\Phi^{\mathrm{out}}\in\Omega_0^{\mathrm{out}}$，$\Psi^{\mathrm{in}}\in\Omega_0^{\mathrm{in}}$ に対し次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$(a^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}_1)\Phi^{\mathrm{out}},\widetilde{T}_\chi(-p_2,\cdots,-p_n)\Psi^{\mathrm{in}})-(\Phi^{\mathrm{out}},\widetilde{T}_\chi(-p_2,\cdots,-p_n)a^{*\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}_1)\Psi^{\mathrm{in}})$$

$$=\mathrm{i}\sqrt{2\pi}\lim_{p_1^0\to\omega_1}[(p_1^2-m^2)(\Phi^{\mathrm{out}},\widetilde{T}\chi(-p_1,\cdots,-p_n)\Psi^{\mathrm{in}})]. \tag{4.2.47}$$

ここで行列要素は，$\mathcal{S}^*(G_m\times R_{4(n-1)})$ に属する一般関数と考える（領域 G_m は (4 2.12) で与えられている）(Hepp (1965 a)).

問題　4.2.4 $\hat{f}(\boldsymbol{p})\in S(R_3)$ を用いて，

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\delta_+(p)\hat{f}(\boldsymbol{p})e^{-\mathrm{i}px}d^4p \tag{4.2.48}$$

とする．このとき，もし $\Phi^{\mathrm{ex}},\Psi^{\mathrm{ex}}\in\Omega_0^{\mathrm{ex}}$ ならば次の漸化式が成立することを示せ：

$$(\Phi^{\mathrm{out}},\{a^{\mathrm{out}}(\hat{f})\,T\chi(x_2,\cdots,x_n)-T\chi(x_2,\cdots,x_n)\,a^{\mathrm{in}}(\hat{f})\}\Psi^{\mathrm{in}})$$
$$=-\mathrm{i}\int d^4x_1f(x_1)(\Phi^{\mathrm{out}},K_1T\chi(x_1,\cdots,x_n)\Psi^{\mathrm{in}}) \tag{4.2.49}$$

$$(\Phi^{\mathrm{in}},[R\chi(x_0;x_1,\cdots,x_{n-1}),a^{*\mathrm{in}}(\hat{f})]\Psi^{\mathrm{in}})$$
$$=\int d^4x_nf(x_n)(\Phi^{\mathrm{in}},K_nR\chi(x_0;x_1,\cdots,x_n)\Psi^{\mathrm{in}}) \tag{4.2.50}$$

$$(\Phi^{\mathrm{out}},[A\chi(x_0;x_1,\cdots,x_{n-1}),a^{*\mathrm{out}}(\hat{f})]\Psi^{\mathrm{out}})$$
$$=\int d^4x_nf(x_n)(\Phi^{\mathrm{out}},K_nA\chi(x_0;x_1,\cdots,x_n)\Psi^{\mathrm{out}}). \tag{4.2.51}$$

この節の基本的な結果は，次のように定式化することができる．

[定理 4.2.3]　$i\neq j$ のとき $p_i\neq p_j$ であれば，$n-k$ 個の粒子が入射して k 個の粒子が出ていく過程の遷移の振幅と，n 個の場の均らした T 積の真空期待値とのあいだに，次の関係が成り立つ：

$$\langle \boldsymbol{p}_1\cdots \boldsymbol{p}_k^{\mathrm{out}}|\boldsymbol{p}_{k+1}\cdots \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{in}}\rangle$$
$$=(-\mathrm{i}\sqrt{2\pi})^n\left[\prod_{j=1}^n(p_j^2-m^2)\langle 0|\widetilde{T}\chi(p_1,\cdots,p_k,-p_{k+1},\cdots,-p_n)|0\rangle\right]_{p_i^0=\omega_i}. \tag{4.2.52}$$

質量殻の外部へ外挿された χ に依存する関数

$$\int\cdots\int\prod_{j=1}^n d^3\boldsymbol{p}_jf_j(\boldsymbol{p}_j)\,(p_j^2-m^2)$$
$$\times\langle 0|\widetilde{T}\chi(p_1,\cdots,p_k,-p_{k+1},\cdots,-p_n)|0\rangle \tag{4.2.53}$$

は，もし速度空間において基礎関数 f_j の台が互いに重なりをもたないならば（すなわち，もし (4.2.53) の積分の領域内で $i\neq j$ なるかぎり $\omega_j^{-1}\boldsymbol{p}_j\neq\omega_i^{-1}\boldsymbol{p}_i$ が成り立つならば)，質量殻 ($p_j^0=\omega_j$) の近傍で無限に滑らかである．

もし，通常の均らしてない T 積 (4.2.10) の真空期待値が定義されていれば，それに対しては，$x_{i_1}^0>x_{i_2}^0>\cdots>x_{i_n}^0$ のとき，

$$\langle 0|T(x_1\cdots x_n)|0\rangle=\langle 0|\varphi(x_{i_1})\cdots\varphi(x_{i_n})|0\rangle \tag{4.2.54}$$

であるが，この場合公式 (4.2.52) は，T_χ を T で置き換えれば（すなわち，(4.2.43) に従って χ を δ で置き換えれば）依然として正しい．

この定理は，問題4.2.3および問題4.2.4の結果と次の補題を用いて証明される．

［補題 4.2.1］　一般関数

$$\prod_{j=k+1}^{l}(p_j^2-m^2)\langle p_1\cdots p_k^{\text{out}}|\widetilde{T}_\chi(\pm p_{k+1},\cdots,\pm p_l)|p_{l+1}\cdots p_n^{\text{in}}\rangle \qquad (4.2.55)$$

は，変数 $\omega_i^{-1}p_i$ のどれか二つが一致したときは0になるような基礎関数 $f\in\mathcal{S}(R_{3n})$ をかけて $p_1,\cdots,p_n$ について積分すれば，変数 $p_{k+1}^0-\omega_{k+1},\cdots,p_l^0-\omega_l$ に関して原点の近傍で無限回微分可能な関数である．

ここでは，補題4.2.1の証明の概略だけを述べる．詳細については，Hepp の原論文 (1965 a) を見よ．

$\{\tilde{f}_j\}\subset\mathcal{S}(G_m)$ を，互いに重ならない基礎関数の集まりとし，

$$f_j(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{f}_j(p)e^{i(p^0-\omega)t}e^{ipx}d^4p$$
$$\dot{f}_j(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}f_j(x,t) \qquad (j=1,\cdots,n) \qquad (4.2.56)$$

と置く．

このとき，積分

$$I(t_{k+1},\cdots,t_l)$$
$$=\int\langle\hat{f}_1\cdots\hat{f}_k^{\text{out}}|T_\chi(x_{k+1},\cdots,x_l)|\hat{f}_{l+1}\cdots\hat{f}_n^{\text{in}}\rangle\prod_{j=k+1}^{l}\dot{f}_j^{(*)}(x_j,t_j)d^4x_j \qquad (4.2.57)$$

は，変数 $t_{k+1},\cdots,t_l$ に関し $\mathcal{S}(R_{l-k})$ に属する基礎関数であることが確かめられる．そのためには，無限回微分可能な関数 (4.2.57) の t_j に関する導関数はすべて再び (4.2.57) の形に書くことができるから，任意に選んだ正数 $N_{k+1},\cdots,N_l$ に対して，

$$\sup_{t_{k+1}\cdots t_l}|I(t_{k+1},\cdots,t_l)t_{k+1}^{N_{k+1}}\cdots t_l^{N_l}|<\infty \qquad (4.2.58)$$

が成り立つことを示せば十分である．

(4.2.58) を証明するには，補題4.1.1の注意1を証明するときに用いた議論を利用しなければならない．

$C_\eta(f_j,t)$ を，少なくとも一つの $(p^0,\boldsymbol{p})$ が $\operatorname{supp}\tilde{f}_j$ の η 近傍（ここで $\eta>0$ は固定して考える）に含まれるような，点 $\boldsymbol{x}=t\omega^{-1}\boldsymbol{p}$ の集合とする．そのとき次の評価が成り立つ．

$$\boldsymbol{x}\notin C_\eta(f_j,t) \text{ のとき}\quad |f_j(x,t)|<C_{MN}[1+(x^0-t)^2]^{-M/2}[1+\boldsymbol{x}^2+t^2]^{-N/2}$$
$$\boldsymbol{x}\in C_\eta(f_j,t) \text{ のとき}\quad |f_j(x,t)|<C_M[1+(x^0-t)^2]^{-M/2}[1+\boldsymbol{x}^2+t^2]^{-3/4}. \qquad (4.2.59)$$

ここで，正の数 C_{MN} および C_M は η に依存することがありうる（しかし $\boldsymbol{x}$ と t には依存しない）．

t を固定したとき，関数 $f_j(x,t)$ それ自身ならびにそのすべての導関数は，その関数の《実質的な台》からの距離とともに急速に減少することがわかる．ここに，関数 f_j の《実質的な台》とは，

$$S_\eta(f_j,t)=\{x:x^0=t,\ \boldsymbol{x}\in C_\eta(f_j,t)\}$$

のことである

互いに重なりをもたない $\tilde{f}_{k+1},\cdots,\tilde{f}_l$ に対しすべての $S_\eta(f_j,1\pm\eta)$ は，η が十分小さいなら，どの二つをとっても互いに空間的にへだたっている．このことから，台 $S_\eta(f_j,(1+\eta_j)t)$ のあいだの距離は，$|\eta_j|<\eta$ のとき，t の一乗に比例して増大することがわかる．その結果，(4.2.57) における T_χ 積を場 $\varphi(x_j)$ の通常の積の積分を項とする和の形に書き表わすことができ，そこで定理 4.2.2 を用いれば (4.2.58) が証明される．

物理的に興味があるのは，二個の粒子が衝突して n 個の粒子になる反応である．この場合散乱振幅は，速度空間において互いに重ならない台をもつ先発型一般関数の質量殻への極限をとることによって得られる．次の定理は，このような極限移行が可能であるための条件を与えている．

[定理 4.2.4] $i\neq j$ のとき $\omega_i^{-1}\boldsymbol{p}_i\neq\omega_j^{-1}\boldsymbol{p}_j$ ならば，恒等式

$$\mathrm{i}(2\pi)^{-n/2}\langle p_3\cdots p_n^{\text{out}}|p_1p_2^{\text{in}}\rangle$$
$$=\lim_{p_j^0\to\omega_j}\left[\prod_{j=1}^{n}(p_j^2-m^2)\langle 0|\widetilde{A}_\chi(-p_1;-p_2,p_3,\cdots,p_n)|0\rangle\right]\qquad(4.2.60)$$

が成り立つ．

質量殻の外に外挿された次の表現

$$\prod_{j=1}^{n}(p_j^2-m^2)\langle 0|\widetilde{A}_\chi(-p_1;-p_2,p_3,\cdots,p_n)|0\rangle$$

は，変数 $p_j^0-\omega_j$ に関して 0 の近傍で無限回微分可能である（ただし，互いに重なりをもたない基礎関数をかけて $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ について積分したあとで）．

この定理を証明するには，まえに補題 4.2.1 を証明したとき行なった議論を用いる．反応 $2\to n-2$ の場合のスペクトル条件によると，$\langle 0|\widetilde{A}_\chi(-p;-p_2,p_3,\cdots,p_n)|0\rangle$ を普通の積の真空期待値に分解したとき，まえに LSZ の漸近条件が証明されなかった項は現われてこない（ここでいっているのは，$A^*(f_j,t)P(\varphi)|0\rangle$ のような構造をもつ項のことである．ただし，P は均らした場の多項式である．このような項が $t\to\pm\infty$ のとき収束するかどうかはわかっていない）．反応 $k\to n$ に対しては，同様のスペクトル条件は，一般に成り立たないことを注意しておこう．従って，$\langle 0|\widetilde{R}_\chi(\pm p_1,\cdots,\pm p_n)|0\rangle$ や $\langle 0|\widetilde{A}_\chi(\pm p_1,\cdots,\pm p_n)|0\rangle$ のような真空期待値の質量殻 $p_j^0=\omega_j$ の近傍における特異性に関しては，差しあたりなにもいうことができない．

最後に，われわれは以上において， Haag=Ruelle の散乱理論で今日までに得られたすべての結果を論じつくしたわけではないことを断わっておこう．論じなかったテーマのうちには，中間子-中間子の弾性散乱の振幅に対する分散関係をWightman の理論形式を用いて証明した Hepp の仕事[1]，および同様のやり方でS行列の一粒子特異性を調べた Hepp の論文 (1965 c) がある．

§ 3.　局所場理論の基本的要請をS行列によって定式化すること

3.1.　はじめに

§1 と§2 において見たように，場の量子論を Wightman のやり方の枠内で取り扱っても，相互作用を行なわない任意個の粒子からなる漸近状態を導入することができ，さらに漸近的完全性の要請 VIII がみたされている場合には，$t\to-\infty$ の状態（《入ってくる》粒子の状態）は $t\to+\infty$ の状態（《出ていく》粒子の状態）にユニタリ演算子Sを作用することによって得られる（(4.1.53) および (4.1.54) を見よ）．その上，演算子Sの行列要素，あるいは同じことだが《入ってくる》粒子の状態と《出ていく》粒子の状態のあいだの遷移の振幅は（少なくとも漸近状態の粒子の速度が互いに重なりをもたないような場合には）均らした因果的 Green 関数から極限移行で質量殻に移ることにより求められることが示された．もちろん，ここではS行列要素を具体的に計算することを問題にしているわけではない．なぜなら，均らした Green 関数そのものも，またそれを書きくだすのに用いられる Wightman 関数も，実際にはわかっていないのだから．われわれが第3章で行なうことができたのは，ただ，基本仮定 I～VII から出発して，場の積の真空期待値がもっているいくつかの一般的性質を導くことであったが，実は，これらの性質から，さらにS行列要素の振舞いについての情報をひきだすことが必要である．因果的 Green 関数の基本的な性質を定式化することは，この関数が (4.2.10) の形の通常のT積（均らしたT積ではない！）を用いて定義されていたとすれば困難なことではない．ところが，要請 I～VIII から出発したとき，果たしてこの（通常のT積を用いて定義される）因果的 Green 関数が存在するかどうかというむずかしい問題につきあたる．一方，Wightman の理論形式においては常に存在する均らした Green 関数は，それほど簡単な性質をもっておらず，この関数をもとにして散乱行列の要素に関する必要な情報をうることは，（前

---

[1] 輻射演算子を用いる理論をもとにして分散関係を一般的に導くことは，文献 [1] において与えられた．この問題については，われわれは本書の続巻において論ずるつもりでいる．

節でその一部を紹介した Hepp の結果が示しているように不可能ではないにしても）いちじるしく困難である.

ここでは，われわれは，この問題の歴史的発展に応じた別の立場をとることにする．すなわち，因果的，遅延型ならびに先発型 Green 関数が存在することを仮定して，それらの関数の性質を研究する．この仮定を Wightman のやり方の枠内で厳密に基礎づけることには，いまの段階では気を使わないことにする.

§2の冒頭ですでに注意したように，Lehmann, Symanzik および Zimmermann (1955, 1957) はこの道に沿って進んだ．それと独立に，ほぼ同じ時期に Bogoliubov とその共同研究者たち (Bogoliubov (1955)，および文献 [4]，[1] を参照のこと）は，本質的に等価なもう一つの方法を発展させた．それは，質量殻の外部へ接続した S 行列要素の性質を，Heisenberg 場の概念を用いずに直接に研究しようというものである（これは，Heisenberg (1943) の当初のプログラムに沿うものである）．この Bogoliubov, Medvedev および Polivanov（以下 BMP と略す）の方法の基礎になったのは，S 行列を漸近的自由場に関して汎関数的に微分するというやり方，および，この汎関数的導関数を用いて簡単に定式化できる微視的因果性の条件である．Heisenberg 場の概念は，この理論では S 演算子の一階の汎関数的導関数によって定義されるカレント演算子によって事実上置き換えられている．最近では，カレントが理論において基本的な役割を演ずるとする考え方がだんだん支持されるようになり，いわゆるカレント代数の理論において展開されている.

この§3では，LSZ の理論形式との関係を明らかにしながら，BMP の方法の基礎について述べる.

3.7 節では，Green 関数の性質のうちで特に散乱振幅と関連のある解析的性質を一般的に取り扱う．これらの性質は，微視的因果性とスペクトル条件から導かれる.

3.2. 漸近状態と散乱行列．その一般的性質

状態ベクトルの空間の基底として，どちらか一方の種類の漸近状態を考えよう．話をきめるために，《出ていく》状態とこれに対応する《出ていく》場（すなわち $t\to+\infty$ のときの漸近的状態ベクトルと演算子）をとろう．以下，§3で登場する場はすべてこの《出ていく》場だけであるから，記号を簡略にするために，out という添え字を省くことにする.

フェルミオンとボソンが共存する一般の場合を考え，それぞれの漸近場を $\psi_\lambda(x)$，φ_ρ

(x) としよう（ここで λ および ρ は，粒子の種類を区別するための添え字とする．従って，スピンが 1/2 の粒子に対しては，場の演算子 ψ_λ はさらにこのほかにスピノル添え字 α をもち，この α は四つの値をとる）．

場 φ および ψ は，自由場のすべての性質をもっている．特に，ボソンのスピンが 1，フェルミオンのスピンが 1/2 のときには，φ および ψ は，生成・消滅の演算子 $a^{(*)}(p)$，$b_\zeta^{(*)(\pm)}(p)$ と (3.4.8) および (3.4.33) の形の公式によって結ばれ，次の交換関係が成り立っている：

$$\left.\begin{aligned} [\varphi_\rho(x), a_\sigma^*(p)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\delta_{\rho\sigma}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega}} \\ [a_\sigma(p), \varphi_\rho(x)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\delta_{\rho\sigma}\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega}} \end{aligned}\right\} \quad (\omega \equiv \omega_p = \sqrt{m^2+p^2}), \tag{4.3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} [\psi_\lambda(x), b_{\lambda'\zeta}^{(+)}(p)]_+ &= [\psi_\lambda(x), b_{\lambda'\zeta}^{*(-)}(p)]_+ = 0, \\ [\tilde{\psi}_\lambda(x), b_{\lambda'\zeta}^{*(+)}(p)]_+ &= [\tilde{\psi}_\lambda(x), b_{\lambda'\zeta}^{(-)}(p)]_+ = 0, \\ [\psi_\lambda(x), b_{\lambda'\zeta}^{*(+)}(p)]_+ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\delta_{\lambda\lambda'}v_{\lambda\zeta}^{(+)}(p)\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{\omega}}, \\ [\psi_\lambda(x), b_{\lambda'\zeta}^{(-)}(p)]_+ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\delta_{\lambda\lambda'}v_{\lambda\zeta}^{(-)}(p)\frac{e^{ipx}}{\sqrt{\omega}}, \\ [\tilde{\psi}_\lambda(x), b_{\lambda'}^{*(-)}(p)]_+ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\delta_{\lambda\lambda'}\tilde{v}_{\lambda\zeta}^{(-)}(p)\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{\omega}}, \\ [\tilde{\psi}_\lambda(x), b_{\lambda'}^{(+)}(p)]_+ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}}\delta_{\lambda\lambda'}\tilde{v}_{\lambda\zeta}^{(+)}(p)\frac{e^{ipx}}{\sqrt{\omega}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

さて，散乱演算子 S は場 $\tilde{\psi}_\lambda, \psi_{\lambda'}, \varphi_\rho$ の汎関数であり，次のような標準積を項とする級数の形に書けると仮定しよう．

$$\begin{aligned} S = &\sum_{\{\lambda_k, \lambda'_n, \rho\}} \int\cdots\int S_{\lambda_1\cdots\lambda_k;\lambda'_1\cdots\lambda'_k;\rho_1\cdots\rho_n}(x_1, \cdots, x_k; x'_1, \cdots x'_k; y_1, \cdots y_n) \\ &\times : \tilde{\psi}_{\lambda_1}(x_1)\cdots\tilde{\psi}_{\lambda_k}(x_k)\psi_{\lambda'_1}(x'_1)\cdots\psi_{\lambda'_k}(x'_k)\varphi_{\rho_1}(y_1)\cdots\varphi_{\rho_n}(y_n) : d^4x_1\cdots d^4y_n \\ \equiv &\sum_\nu\int\cdots\int S_\nu(x_1\alpha_1, \cdots, x_\nu\alpha_\nu) : \chi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\chi_{\alpha_\nu}(x_\nu) : d^4x_1\cdots d^4x_\nu. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ここで $S_\nu \equiv S_{\lambda_1\cdots\rho_n}$ は，普通の数を値にもつ関数（一般的にいえば一般関数），χ_α はスピノル場 $\tilde{\psi}_\lambda, \psi_{\lambda'}$ または Bose 場 φ_ρ を表わす一般的記号である．

自由場の演算子 $\tilde{\psi}, \psi, \varphi$ の標準積とは，定義により，すべての生成演算子 $b_{\lambda\zeta}^{*(\pm)}$ および a_ρ^* がすべての消滅演算子 $b_{\lambda\zeta}^{(\pm)}$ および a_ρ の左側にあるような積であることを思い起こそ

う．この定義から，標準積の記号のなかでは Bose 場どうしおよび Bose場 と Fermi 場は互いに可換であり，Fermi 場どうしは反可換であることが導かれる．それゆえに，一般性をそこなうことなしに，関数 $S_{\lambda_1\cdots\rho_n}$ は変数 $y_j\rho_j$ に関しては対称であり，変数 $x_k\lambda_k$ および $x_l'\lambda_l'$ に関しては反対称であるとみなすことができる．

さて，われわれは，局所場理論のすべての要請をこの S 演算子および漸近的な一般化された状態ベクトル

$$|p_1\alpha_1\cdots p_F\alpha_F;q_1\rho_1\cdots q_n\rho_n\rangle$$
$$=b^{*(\varepsilon_1)}_{\lambda_1\zeta_1}(p_1)\cdots b^{*(\varepsilon_F)}_{\lambda_F\zeta_F}(p_F)a^*_{\rho_1}(q_1)\cdots a^*_{\rho_n}(q_n)|0\rangle \tag{4.3.4}$$

を用いて定式化したい．ただし上の式で，$\alpha_i=\{\lambda_i,\zeta_i,\varepsilon_i\}$ であり，ε_i は $\pm$ を表わす（(3.4.21) および (3.4.41) と比較せよ)．

はじめに質量殻の外へ出ないでも定式化できる S 行列の《一般的性質》を列記しよう．

1) 漸近状態によって張られる Gelfand の三つ組 $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ において群 G のユニタリ表現 $U(g)$ が実現できる．ただしこの G は，部分群として，固有スピノル Poincaré 群 $\mathcal{P}_0$，および Fermi 場に対する第一種のゲージ変換群

$$\psi_\lambda(x)\to e^{i\alpha}\psi_\lambda(x),\quad \tilde{\psi}_\lambda(x)\to e^{-i\alpha}\tilde{\psi}_\lambda(x),\quad \alpha=\text{const.} \tag{4.3.5}$$

を含むものとする．

状態ベクトルに対する Poincaré 群の作用については，第2章，5.2節に述べた．特に，一般化された状態ベクトル (4.3.4) に対する並進演算子の作用は，次のようになる．

$$U(a)|p_1\alpha_1\cdots p_F\alpha_F;q_1\rho_1\cdots q_n\rho_n\rangle$$
$$=\exp\left\{i\left(\sum_{j=1}^{F}p_j+\sum_{k=1}^{n}q_k\right)a\right\}|p_1\alpha_1\cdots q_n\rho_n\rangle$$
$$\left(p_j^0=\sqrt{M_j^2+\boldsymbol{p}_j^2}\ ,\ q_k^0=\sqrt{m_k^0+\boldsymbol{q}_k^2}\ \right). \tag{4.3.6}$$

ここで M_j はフェルミオンの質量，m_k はボソンの質量である．空間的にへだたった，相互作用しない漸近粒子という解釈にふさわしく，この $F+n$ 個の粒子からなる状態の全エネルギーおよび全運動量は，個々の粒子の四次元的エネルギー運動量の和として得られる．

(4.1.16) により，場 $\chi_\alpha(x)$ は並進に対して公式

$$\chi_\alpha(x+a)=U(a)\chi_\alpha(x)U^{-1}(a) \tag{4.3.6 a}$$

に従って変換される．

ゲージ変換 (4.3.5) のさいに，状態ベクトルにはフェルミオンと反フェルミオンの個数の差に依存する位相因子がかかる．

$$U(e^{i\alpha})|p_1\alpha_1\cdots q_n\rho_n\rangle = \exp\left\{-i\alpha\sum_{j=1}^{F}\varepsilon_j\right\}|p_1\alpha_1\cdots q_n\rho_n\rangle. \qquad (4.3.7)$$

強い相互作用の理論では，群Gはさらに不連続変換P, C, Tおよびアイソスピンの群を含むと考えるのが普通である[1]．

演算子Sは，すべての変換$U(g)$に対して不変であると仮定しよう．すなわち，

$$U(g)\,SU^{-1}(g) = S \qquad (4.3.8)$$

($g\in\mathcal{P}_0$のときは，(4.3.8)は，Wightmanの理論において得られた関係(4.1.55)に一致する)．

ゲージ変換(4.3.5)(4.3.7)に対する不変性は，(4.3.3)を書いたときに，その各項において場$\varphi_{\lambda'}$の数を場$\tilde{\varphi}_\lambda$の数に等しくとったことによってすでに取り入れられていることに注意しよう．ハドロン[2]の場だけを考えている場合には，この不変性は，バリオン数の保存の法則を表わしている．レプトン場に対しては，それはレプトン数の保存則を反映している．一般の場合には，ゲージ不変性とLorentz不変性を部分として含む条件(4.3.8)から，S行列要素が固有Poincaré群$\mathcal{P}_+^\uparrow$の一価表現に従って変換されることがいえる．

2)　並進に対する(状態ベクトルの)変換を(4.3.6)のように書いたとき，すでに《スペクトル条件の要請》が仮定されている．この場合もそうであるように《漸近状態の完全性の要請》はどのようなS行列理論の基礎にもあるが(1.5節の要請VIIIを見よ)，これと並べて，スペクトル条件を条件III(第2章，3.2節)とまったく同じ形に定式化することもできる．しかしここではハドロンの理論に関係のある強い形のスペクトル条件を次のように定式化しよう．すなわち，《真空とよばれる唯一つの，G不変でかつ規格化された状態$|0\rangle$が存在し，また(正の質量とエネルギーをもつ)(4.3.4)の形の一般化された物理的状態の集まりがあって，これらの状態と真空を合わせたものがΩ^*の(従ってまた$\mathcal{H}$の)完全系をなす》．スペクトル条件のこの実用的な定式化は．二つの演算子A, Bの積の行列要素を中間状態の完全系を使って分解するときに，よく用いられる．この分解

---

1) アイソスピンの群は群$SU(2)$で，これは粒子の種類を区別する添え字λ, ρに対してはたらく(たとえば文献[8]，あるいはBogoliubov (1966)を見よ)．この第1巻では，アイソスピンに関する対称性のことは考えない．

2) 強い相互作用を行なう粒子をハドロンという．それは，バリオン(すなわち核子と超核子)，π中間子，およびK中間子の総称である．厳密にいうと，われわれの理論形式にはハドロンの共鳴状態(たとえば，ベクトル中間子)を含めるべきでない．なぜなら，それらは非常に不安定な粒子であって対応する漸近場をもたないからである．

は，多少シンボリカルに

$$\langle\alpha|AB|\beta\rangle=\langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle+\sum_n\int d^3k\langle\alpha|A|nk\rangle\langle nk|B|\beta\rangle \tag{4.3.9}$$

という形に書かれる．ここで $\boldsymbol{k}$ は中間状態に現われる粒子の三次元運動量をまとめて書いたもの，n はその他の（離散的あるいは連続的な）量子数の全体を表わし，$\boldsymbol{k}$ と n とで中間状態は完全に特徴づけられる．

3) 《真空と一粒子状態は安定である》．すなわち，

$$S|0\rangle=|0\rangle,\qquad S|1\rangle=|1\rangle. \tag{4.3.10}$$

ここで $|1\rangle$ は一個の物理的粒子を表わす任意の状態である（Haag=Ruelle の理論における性質（4.1.20）と比較せよ）．

4) 規格化された状態 $|\Phi\rangle$ と $|\Psi\rangle$ のあいだの遷移の確率は，$|\langle\Phi|S|\Psi\rangle|^2$ で与えられる．状態 $|\Psi\rangle$ から他の任意の状態へ遷移する全確率が 1 であるためには，S 演算子が《ユニタリ》であると仮定しなければならない．すなわち，

$$SS^*=S^*S=1. \tag{4.3.11}$$

3.3. S 演算子の汎関数的導関数と微視的因果性

汎関数的級数（4.3.3）の，Bose 場 $\varphi_\rho(x)$ に関する汎関数的導関数を次の公式によって定義しよう：

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}$$

$$=\sum_{\{\lambda_k,\lambda'_n,\rho\}}\sum_{j=1}^{n}\delta_{\rho\rho_j}\int\cdots\int S_{\lambda_1\cdots\lambda_k\lambda'_1\cdots\lambda'_k\rho_1\cdots\rho_n}(x_1,\cdots,x_k;x'_1,\cdots,x'_k;y_1,\cdots,y_j=x,\cdots,y_n)$$

$$\times:\prod_{l=1}^{k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\{\tilde\psi_{\lambda_l}(x_l)\psi_{\lambda'_l}(x'_l)\varphi_{\rho_i}(y_i)\}:d^4x_1\cdots\widehat{d^4y_j}\cdots d^4y_n. \tag{4.3.12}$$

スピノル場に関する汎関数的導関数は，次の公式で定義される：

$$\frac{\delta S}{\delta\psi_\lambda(x)}=\sum_{\{\lambda_k,\lambda'_n,\rho\}}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\delta_{\lambda\lambda'_l}\int\cdots\int S_{\lambda_1\cdots\lambda_k\lambda'_1\cdots\lambda'_k\rho_1\cdots\rho_n}$$

$$\times(x_1,\cdots,x_k;x'_1,\cdots,x'_l=x,\cdots,x'_k;y_1,\cdots,y_n)$$

$$\times:\prod_{r=1}^{k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{k}\prod_{j=1}^{n}\tilde\psi_{\lambda_r}(x_r)\psi_{\lambda'_i}(x'_i)\varphi_{\rho_j}(y_j):d^4x_1\cdots\widehat{d^4x'_l}\cdots d^4y_n, \tag{4.3.13}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)}=\sum_{\{\lambda_k,\lambda'_n,\rho\}}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\delta_{\lambda\lambda_l}\int\cdots\int S_{\lambda_1\cdots\lambda_k\lambda'_1\cdots\lambda'_k\rho_1\cdots\rho_n}$$
$$\times(x_1,\cdots,x_l=x,\cdots,x_k;x'_1,\cdots,x'_k;y_1,\cdots y_n)$$
$$\times:\prod_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{k}\prod_{r=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}\tilde{\psi}_{\lambda_i}(x_i)\psi_{\lambda'_r}(x'_l)\varphi_{\rho_j}(y_j):d^4x_1\cdots\widehat{d^4x_l}\cdots d^4y_n. \qquad (4.3.14)$$

(公式 (4.3.12) ～ (4.3.14) において，$\widehat{d^4y_j}$ のように書いたのは，y_j についての積分を行なわないという意味である).

(4.3.12) ～ (4.3.14) の標準積の記号のなかでは，(4.3.3) においてと同様に，最初からすべての $\tilde{\psi}_\lambda$ が先にきて，そのあとに $\psi_{\lambda'}$ が並んでいるものとしている（そうでなかったとしても，そのように並べ換えることができる．ただしそのさいに項の符号が変わる場合がある).

汎関数的導関数の上の定義は， Bose 場の増分 $\delta\varphi_\rho(x)$ は古典論においてと同様に，他のいかなる場とも交換するが，Fermi 場の増分 $\delta\psi_\lambda(x),\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)$ は，標準積の記号のなかでは，すべての Fermi 場と互いに反可換であると考えることを意味する．これに加えて，われわれは，ψ_λ の増分は標準積のなかでいつも右側に，$\tilde{\psi}_\lambda$ の増分は左側にくくりだすことにした．この意味で (4.3.13) は ψ_λ に関する《右導関数》を，(4.3.14) は $\tilde{\psi}_\lambda$ に関する《左導関数》を定義する，ということもある（文献 [4] §47.1を見よ)．上の定義によれば，Bose 場に関する汎関数的微分は互いに順序を入れ換えてもよいが，スピノル場に関する左（もしくは右）微分は反可換である．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_{\rho'}(y)}&=\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(y)\,\delta\varphi_\rho(x)},\\ \frac{\delta^2 S}{\delta\psi_\lambda(x)\,\delta\psi_{\lambda'}(y)}&=-\frac{\delta^2 S}{\delta\psi_{\lambda'}(y)\,\delta\psi_\lambda(x)},\\ \frac{\delta^2 S}{\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)\,\delta\tilde{\psi}_{\lambda'}(y)}&=-\frac{\delta^2 S}{\delta\tilde{\psi}_{\lambda'}(y)\,\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)},\\ \frac{\delta^2 S}{\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)\,\delta\psi_{\lambda'}(y)}&=\frac{\delta^2 S}{\delta\psi_{\lambda'}(y)\,\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.15)$$

これらの汎関数的導関数は，

$$\langle p_1\alpha_1\cdots p_F\alpha_F;q_1\rho_1\cdots q_n\rho_n|S|p'_1\alpha'_1\cdots p'_{F'}\alpha'_{F'};q'_1\rho'_1\cdots q'_{n'}\rho'_{n'}\rangle$$
$$=\langle 0|b^{(\epsilon_1)}_{\lambda_1\zeta_1}(p_1)\cdots a_{\rho_n}(q_n)\,Sb^{*(\epsilon'_1)}_{\lambda'_1\zeta'_1}(p'_1)\cdots a^*_{\rho'_{n'}}(q'_{n'})|0\rangle \qquad (4.3.16)$$

というような行列要素を調べるとき自然に出てくるのである．

この式で生成演算子を左に，消滅演算子を右に移すとき生成・消滅演算子と S 演算子の交換関係がでてきて，それが次の形をもつ：

$$[S, a_\rho^*(q)] = \int \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} [\varphi_\rho(x), a_\rho^*(q)] \, d^4x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2\omega_q}} d^4x,$$
$$[a_\rho(q), S] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} \frac{e^{iqx}}{\sqrt{2\omega_q}} d^4x, \tag{4.3.17}$$

$$\left.\begin{aligned}
[S, b_{\lambda\zeta}^{*(+)}(p)] &= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \varphi_\lambda(x)} v_{\lambda\zeta}^{(+)}(p) e^{-ipx} d^4x, \\
[S, b_{\lambda\zeta}^{*(-)}(p)] &= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \tilde{\psi}_\lambda(x)} \tilde{v}_{\lambda\zeta}^{(-)}(p) e^{ipx} d^4x, \\
[b_{\lambda\zeta}^{(+)}(p), S] &= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \tilde{\psi}_\lambda(x)} \tilde{v}_{\lambda\zeta}^{(+)}(p) e^{ipx} d^4x, \\
[b_{\lambda\zeta}^{(-)}(p), S] &= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p}} \int \frac{\delta S}{\delta \psi_\lambda(x)} v_{\lambda\zeta}^{(-)}(p) e^{ipx} d^4x.
\end{aligned}\right\} \tag{4.3.18}$$

問題 4.3.1 S 演算子の展開 (4.3.3) および交換関係 (4.3.1), (4.3.2) を用いて (4.3.17) と (4.3.18) を導け) 公式 (4.3.18) を求めるときには，展開 (4.3.3) の各項におけるスピノル場の数は常に偶数であるという事実を用いることが必要である．なお，(4.3.18) において $b^{(*)}$ と S の《交換関係》は $b^{(*)}$ と場 ψ の《反交換関係》を用いて書き表わせることに注意).

ここで，われわれは，原理的性格をもつ非常に重要な問題にぶつかったことになる．

われわれは，質量殻の外への外挿のことはまったく考えないかのように，S 行列の汎関数的導関数を定義し，形式的に (4.3.17) や (4.3.18) の関係を導いたのだが（しかもその上，φ_ρ や ψ_λ は定まった質量をもつ自由場の正準交換関係に従うということを用いている)，しかし，立ち入って調べてみると，汎関数的微分の概念そのものが，必然的に，質量殻の外へ出ることを要求しているということがわかる．

すなわち，次の点が問題である．《自由場の方程式》をみたす場 φ_ρ と ψ_λ の積分 (4.3.3) を知っても（あるいは別の言葉でいうと，すべての可能な物理的漸近状態相互のあいだの行列要素を知っても）汎関数的導関数の定義に用いた関数 $S_{\lambda_1 \cdots \rho_n}(x_1, \cdots, y_n)$ を一義的に定めることはできない．実際，$(\Box y_n + m^2)\varphi_{\rho_n}(y_n) = 0$ なら，$S_{\lambda 1 \cdots \rho_n}$ に $(\Box y_n + m^2) K(x_1, \cdots, y_n)$ の形の関数をつけ加えても (4.3.3) の積分の値は変わらない（なぜなら，部分積分によって Klein-Gordon 演算子を φ_{ρ_n} の方に移すことができるから)．ただし，上の K は，$y_n \to \infty$ で十分に速く 0 に近づく関数であるとした．

そんなわけで，汎関数的導関数 (4.3.12) ～ (4.3.14) を定義するためには散乱の行列

を質量殻の外にまで外挿することがどうしても必要である．明らかに，そのような外挿の仕方はたくさんある．この任意性は，次のような要請を置くことによって，ある程度までせばめることができよう．すなわち，外挿された S 演算子は，従来どおり不変性の条件およびユニタリ条件をみたすものとし，またその作用の下で，真空と物理的（ということは外挿されないということであるが）一粒子状態が依然として安定であるとする．特に，ユニタリ条件（4.3.11）を微分することによって，次の関係が得られる．

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(x)} S^* = -S \frac{\delta S^*}{\delta \varphi_\rho(x)}. \tag{4.3.19}$$

S 行列を質量殻の外へ拡張するさいの任意性をさらにいちじるしく制限することは，以下に列挙するような S 行列の《局所的性質》を定めることによって行なわれる．実はこれらの局所的性質は，質量殻の上における行列要素についての補足的情報も含んでいるのである．

1)　まず第一に，次のことを要求する：《交換関係（4.3.17）と（4.3.18）は自由場の交換関係を用いて導かれたものであったが，それらの関係が外挿された S 行列に対しても，つまり展開（4.3.3）に現われる場 φ_ρ と ψ_λ が自由場の方程式をみたすことを仮定しないときにも，そのまま成り立つ》．

この要求を置くことによって，われわれは，任意の S 行列要素（4.3.16）を次の形の《輻射演算子》

$$H_n(x_1\alpha_1, \cdots, x_n\alpha_n) = \frac{\delta^n S}{\delta \chi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \delta \chi_{\alpha_n}(x_n)} S^* \tag{4.3.20}$$

の真空期待値に帰着させることができる．ここで χ_{α_j} は，（4.3.3）におけると同様に，場 $\tilde{\psi}_\lambda, \psi_{\lambda'}$ あるいは φ_ρ のいずれか一つを表わす．真空期待値をとる記号のなかで汎関数的導関数を S^* にかけてもよいことは，真空の安定性（4.3.10）による．（4.3.20）の形の輻射演算子を用いることの利点は，以下の議論において明らかになるであろう．

問題　4.3.2　（4.3.3）の係数として入ってくる関数 S_ν は，輻射演算子（4.3.20）を用いて次のように表わせることを示せ：

$$S_{\lambda_1 \cdots \lambda_k \lambda'_1 \cdots \lambda'_k \rho_1 \cdots \rho_n}(x_1, \cdots, x_k; x'_1, \cdots, x'_k; y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \frac{1}{(k!)^2 n!} \langle 0 | H_{2k+n}(x_1\lambda_1, \cdots, x_k\lambda_k; x'_1\lambda'_1, \cdots, x'_k\lambda'_k; y_1\rho_1, \cdots, y_n\rho_n) | 0 \rangle. \tag{4.3.21}$$

輻射演算子は，その定義から，《ボソンの変数》$y_j\rho_j$ の入れ換えに対しては対称であり，《フェルミオン変数》$x_i\lambda_i$（あるいは $x'_i\lambda'_i$）の相互の入れ換えに対して反対称であ

る．以下では，〈輻射演算子〉という言葉を，S の汎関数的導関数と S^* の汎関数的導関数との積という形をもつ，より一般的な表現に対しても用いることにする．$\delta H_\nu(x_1, \cdots, x_\nu)/\delta\varphi(x)$ のようなものがその一例である．

2）　輻射演算子は演算子を値にもつ一般関数であると考えることは自然である．特に次のことを仮定しよう：《演算子（4.3.20）の真空期待値は空間 $S^*(R_{4n})$ に属する，すなわち緩増加一般関数である》.

3.5 節でわれわれは，一見，単に形式的な要求のように思われる上の仮定から，どのような物理的な結論が出てくるかを論じよう．また，条件 2）のいくつかの可能な一般化およびそれらと微視的因果性との関係について考察しよう．

3）《微視的因果性》．　ボソンならびにフェルミオンのカレントの演算子を，一階の輻射演算子を使って，次の等式で定義しよう：

$$\begin{aligned} j_\rho(x) &= \mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*, \\ J_\lambda(x) &= -\mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\tilde{\psi}_\lambda(x)}S^*, \\ \tilde{J}_\lambda(x) &= \mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\psi_\lambda(x)}S^*. \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

この呼び名の起源は，量子電気力学の Lagrange 形式のうちに見いだすことができる．その場合の相互作用ラグランジアンは，

$$\mathcal{L}(x) = -:j^\mu(x)A_\mu(x):$$

という形をしている．ここに，

$$j^\mu(x) = -e:\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)}. \tag{4.3.23}$$

普通やるように，$S = T\left\{\exp\left(\mathrm{i}\int\mathcal{L}(x)d^4x\right)\right\}$ と置くと，（結合定数 e に関する）摂動論の第一次において輻射演算子

$$\mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)}S^*$$

は電流（4.3.23）に一致することが，容易に確かめられる．

ユニタリ条件から導かれる結果（4.3.19）を用いると，Bose 場 $\varphi_\rho(x)$ がエルミートならばカレント j_ρ もまたエルミートであることが容易にわかる．

$H(x)$ を（4.3.22）のカレントのうちのいずれかであるとし，$\chi(y)$ は上と同様 $\tilde{\psi}_\lambda$, $\psi_{\lambda'}$ あるいは φ_ρ のうちの一つとする．そのとき，《微視的因果性の条件》は，

$$y \lesssim x \text{ のとき，} \quad \frac{\delta H(x)}{\delta\chi(y)} = 0 \tag{4.3.24}$$

の形に書かれる（$y\leq x$ は，時空点 y が時空点 x より過去にあるか，あるいは互いに空間的位置にあること，すなわち $(x-y)^2\geqslant 0$ で $x^0>y^0$ であるか，あるいは $(x-y)^2<0$ であることを表わす）．

この条件は，場の量子論の Lagrange 形式における事情を一般化したものである．局所的ラグランジアンをもつ通常の理論では，この条件は自動的にみたされている．

問題 4.3.3 $\mathcal{L}(x)$ は漸近場 $\chi_\alpha(x)$ の局所的な関数であるとしよう（すなわち，点 x における場の振舞いだけによるとする）．このような関数は，$\chi_\alpha(x)$ が自由場の方程式をみたさない場合でも意味をもっている　さらに，S 演算子が時間的に順序づけられた指数関数*)

$$S=T\left[\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathcal{L}(x)d^4x\right\}\right] \qquad (4\ 3.25)$$

で定義されているとしよう（$\mathcal{L}(x)$ も S も意味をもっているものとする）．そのとき因果性の条件(4.3.24) は自動的にみたされていることを示せ．別の言葉でいえば，この場合次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{\delta}{\delta\chi_\beta(y)}\left\{\frac{\delta S}{\delta\chi_\alpha(x)}S^*\right\}=0\ \ (y\leq x). \qquad (4.3.26)$$

局所的ラグランジアンを用いて時間的に順序づけられた指数関数の形に表わした S 演算子が，実際，因果律に関するわれわれの直観的表象を反映しているという事実は，文献 [4] において詳細に論じられているので，ここではこれ以上触れない．その代わり，LSZ の定式化との対応を与えるいくつかの公式を引用しておこう．それらの公式は，われわれの要請を別の観点から説明することになる．

3.4. LSZ の理論とのつながり

求める対応は，カレント (4.3.22) を (4.2.5) の形のカレントと同一視することによって得られる．特に，Bose 場とカレントに対しては，

$$\boldsymbol{j}_\rho(x)=\mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho^{\mathrm{out}}(x)}S^*=(\Box+m^2)\boldsymbol{\varphi}_\rho(x) \qquad (4.3.27)$$

の関係が成り立つ（誤解をさけるために，ここでは漸近場を表わす添え字 out を復活し，また，Heisenberg 場 $\boldsymbol{\varphi}_\rho$ を表わすのに太字を用いた）．

以下において次のことを示そう．まず，少なくとも形式的には（という意味は，不連続

---

*) その定義は，

$$T\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\mathrm{i}\int\mathcal{L}(x)d^3x\right]^n\right\}$$

であって，例として $n=2$ の項を書いてみれば，

$$T\left\{\frac{1}{2!}\left[\mathrm{i}\int\mathcal{L}(x)d^4x\right]^2\right\}=-\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int_{-\infty}^{t_2}dt_1\int d^3x_2\int d^3x_1\,\mathcal{L}(x_2,t_2)\,\mathcal{L}(x_1,t_1)$$

となる．

な θ-関数と演算子を値にもつ一般関数との積が存在するかどうか，等々に関するいくつかの自明でない問題を考慮外に置いたとき，ということである)，S 行列とその汎関数的導関数に課せられた条件から，Heisenberg 場 φ_ρ の局所的性質が出てくることを示す．ただし，場 φ_ρ はカレント j_ρ と Yang=Feldman の方程式 (4.2.6) によって結ばれているものとする．次いでわれわれは，逆に，(方程式 (4.2.6) を含む) LSZ の基本仮定と (4.3.27) とから，質量殻の上におけるカレントの行列要素に対して一連の結論が導かれ，これによって，微視的因果律と矛盾しない外挿された S 行列を得る可能性が与えられることを示す．簡単のため，Bose 場の場合だけを考察しよう．

はじめに，BMP のやり方に従って，二階の輻射演算子のあいだに成り立ついくつかの恒等式を証明する．これらの恒等式から，特に，カレント (4.3.22) の局所可換性が導かれる．

次の等式

$$j_\rho(x) = \mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*$$

を $\varphi_\sigma(y) \equiv \varphi_\sigma^{\mathrm{out}}(y)$ について微分し，さらに (4.3.11) と (4.3.19) を用いると，次の式を得る：

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} = \mathrm{i}\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(y)\,\delta\varphi_\rho(x)}S^* + \mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*S\frac{\delta S^*}{\delta\varphi_\sigma(y)}$$

$$= \mathrm{i}\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(y)\,\delta\varphi_\rho(x)}S^* + \mathrm{i}j_\rho(x)\,j_\sigma(y). \tag{4.3.28 a}$$

同様にして，

$$\frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta\varphi_\rho(x)} = \mathrm{i}\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)}S^* + \mathrm{i}j_\sigma(y)\,j_\rho(x) \tag{4.3.28 b}$$

が得られる．

(4.3.28 a) から (4.3.28 b) を引き，さらに，Bose 場に関しては汎関数的微分の順序を入れ換えてもよいことを用いると，

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} - \frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta\varphi_\rho(x)} = \mathrm{i}[j_\rho(x), j_\sigma(y)] \tag{4.3.29}$$

が得られる．

このことと因果性の条件とから，互いに空間的にへだたった二点におけるカレントの演算子は可換であることが導かれる．さらに，因果性の条件 (4.3.26) を直接 $x \neq y$ のときの (4.3.28) に適用すれば，二階の汎関数的導関数とカレントの T 積のあいだの次の関

係が得られる：

$$H_2(x\rho, y\sigma) = \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\delta\varphi_\sigma(y)} S^* = -T(j_\rho(x)j_\sigma(y)).$$

このことから，すべての x と y に対して，

$$H_2(x\rho, y\sigma) = -T(j_\rho(x)j_\sigma(y)) - \mathrm{i}\Lambda_{\rho\sigma}(x, y) \tag{4.3.30}$$

の成り立つことが導かれる．ここに $\Lambda_{\rho\sigma}$ は《準局所的な演算子》で，

$$\Lambda_{\rho\sigma}(x, y) \equiv \Lambda_{\sigma\rho}(y, x) = 0 \qquad (x \neq y) \tag{4.3.31}$$

という性質をもつ．

問題　4.3.4　場 φ_ρ がエルミートならば，準局所的演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}$ もまたエルミートであることを示せ（ヒント：(4.3.19) の汎関数的微分 $\delta/\delta\varphi_\sigma(y)$ をとり，得られた恒等式を (4 3.30) およびそのエルミート共役と比較せよ）．

公式 (4.2.10) に従って T 積を具体的に書くと

$$T(j_\rho(x)j_\sigma(y)) = \theta_{xy}j_\rho(x)j_\sigma(y) + \theta_{yx}j_\sigma(y)j_\rho(x). \tag{4.3.32}$$

ここで $\theta_{xy} \equiv \theta(x^0 - y^0)$ である．そうすると，(4.3.30) を (4.3.28) に代入して

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} = \mathrm{i}\theta_{yx}[j_\rho(x), j_\sigma(y)] + \Lambda_{\rho\sigma}(x, y) \tag{4.3.33}$$

を得る．

さて，次に，LSZ の理論と BMP の理論とにおいてそれぞれの意味における局所的性質が互いに同値である，ということの証明に移ろう（不変性とかユニタリ性とかいった一般的性質は，二つの理論において事実上同一であることに注意しよう）．

BMP の基本仮定が正しいとしよう．すでに示したように，微視的因果性の条件からはカレントの局所可換性が出てくる．さて，Yang-Feldman の方程式 (4.2.6) による場 $\boldsymbol{\varphi}_\rho$ の定義，すなわち，

$$\boldsymbol{\varphi}_\rho(x) = \varphi_\rho^{\mathrm{out}}(x) + \int D_{m_\rho}^{\mathrm{adv}}(x-y)j_\rho(y)\,d^4y \tag{4.3.34}$$

と BMP の局所性の基本仮定とを用いて，次の関係が成り立つことを示そう：

$$(x-y)^2 < 0 \qquad \text{のとき} \qquad [\boldsymbol{\varphi}_\rho(x), j_\sigma(y)] = 0. \tag{4.3.35}$$

そのため，まずはじめに漸近場を用いた S 行列の展開 (4.3.3) および自由場 $\varphi_\rho^{\mathrm{out}}(x)$ の交換関係 (3.4.2) から，

$$[\varphi_\rho^{\mathrm{out}}(x), j_\sigma(y)] = -\mathrm{i}\int D_{m_\rho}(x-x')\frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta\varphi_\rho^{\mathrm{out}}(x')}d^4x' \tag{4.3.36}$$

が得られることに注意しよう．(4.3.33)，(4.3.36) および等式

$$D_m(x) = D_m^{\text{ret}}(x) - D_m^{\text{adv}}(x) \tag{4.3.37}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
&[\varphi_\rho(x), j_\sigma(y)] \\
&\quad = \int \{D_{m_\rho}^{\text{ret}}(x-x')\theta_{x'y} - D_{m_\rho}^{\text{adv}}(x-x')\theta_{yx'}\}[j_\rho(x'), j_\sigma(y)]\, d^4x' \\
&\qquad - \mathrm{i}\int D_{m_\rho}(x-x')\Lambda_{\rho\sigma}(x', y)\, d^4x'
\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

が得られる．遅延型関数および先発型関数の性質によって，(4.3.38)の右辺における D^{ret} を含む項は $x > y$ のときだけ0でない値をもち，一方 D^{adv} を含む項は $y < x$ のときだけ0でない その結果，(4.3.38) の初めの二つの項は，空間的な $x-y$ に対しては0になる．右辺の最後の項もまた，準局所的演算子の性質 (4.3.31) によって0である．なぜなら，Pauli=Jordan の不変関数 $D_m(x-y)$ が空間的変数に対しては0になるからである．このようにして，局所可換性 (4.3.35) が証明された．

同様にして，上よりいくらか長い計算により

$$(x-y)^2 < 0 \qquad \text{のとき} \qquad [\varphi_\rho(x), \varphi_\sigma(y)] = 0 \tag{4.3.39}$$

も証明できる．

このように，LSZ の理論における局所性は，BMP の理論の基本仮定と Heisenberg 場の定義 (4.3.34) から結果として出てくるものである．

こんどは，局所可換性の条件 (4.3.39) が与えられたとしよう．カレント j_ρ は場 φ_ρ に Klein=Gordon 演算子を作用させたものとして定義され ((4.3.27) を見よ)，また漸近条件は Yang=Feldman の方程式 (4.3.34) の形で与えられているとする．さらに，ユニタリな S 行列が漸近場 $\varphi_\sigma^{\text{out}}$ を用いて (4.3.3) のような汎関数的級数の形で与えられ，この S 行列の汎関数的導関数としてカレント j_ρ が (4.3.22) のように表わされること，および，《出ていく》場とこのカレントのあいだの交換関係が再び等式 (4.3.36) によって与えられることを仮定しよう．これらの仮定のもとで，S 行列を質量殻の外部へ外挿するさい任意性のあった部分を，微視的因果性の条件 (4.3.24) がみたされるように定めることができる．このことを以下において示そう．

このため，まず，汎関数的導関数 $\delta j_\rho(x)/\delta\varphi_\sigma(y)$ をまた (4.3.33) の形に表わそう．ただし，こんどは $\Lambda_{\rho\sigma}(x, y)$ は任意の演算子であると考え，その性質はこれから定める．われわれの目的は，場とカレントのあいだの局所可換性 (4.3.35) (これは (4.3.39) と

(4.3.27）の結果である）から，質量殻の上における演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}$ の準局所性（すなわち条件（4.3.31)）が出てくることを示すにある．明らかに，そのとき演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}$ は準局所的演算子として質量殻の外部にまで接続でき，(4.3.33）を考慮すれば微視的因果性の条件の成り立つことが保証される．

一般の場合に成り立つ等式（4.3.38）を用いれば，条件（4.3.35）は，

$$\int D_{m_\rho}(x-x')\Lambda_{\rho\sigma}(x', y)\, d^4x' = 0 \qquad (x \sim y) \tag{4.3.40}$$

という形に書くことができる．

上に注意したように，条件（4.3.40）は，$\Lambda_{\rho\sigma}$ が準局所的演算子であればみたされる．われわれにとって必要なのは，それほど自明でないその逆の関係を証明することである．すなわち，公式（4.3.40）から出発して，演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}$ の準局所性に似たいくつかの性質を導くことである．まずはじめに，並進に対する理論の不変性を用いよう．これから，

$$\Lambda_{\rho\sigma}(x, y) = e^{iPy}\Lambda_{\rho\sigma}(x-y, 0)e^{-iPy} \tag{4.3.41}$$

が出る．ただし，P はエネルギー・運動量演算子である．運動量がそれぞれ p' と p である任意の二つの状態のあいだでとった（4.3.41）の行列要素は，

$$\langle p'|\Lambda_{\rho\sigma}(x, y)|p\rangle = e^{i(p'-p)y}\lambda(x-y) \tag{4.3.42}$$

の形になる．ここで，

$$\lambda(x) = \langle p'|\Lambda_{\rho\sigma}(x, 0)|p\rangle \tag{4.3.43}$$

(もちろん，λ は x のほかに p, p', ρ および σ にも依存する．しかしこれらの変数に対する依存性には興味がないので，記号を簡略にするためそれらの変数をいちいち書くことはしない)．

状態 $\langle p'|$ と状態 $|p\rangle$ のあいだで等式（4.3.40）の行列要素をとり，(4.3.42）と（4.3.43）を考慮すれば，

$$f(x-y) \equiv \int D_m(x-x')\lambda(x'-y)\, d^4x' = 0 \qquad (x \sim y)$$

を得る．(3.4.3）によって関数 $f(x)$ の Fourier 変換は双曲面 $k^2 = m^2$ の上を除いて0である．すなわち，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \varepsilon(k^0)\delta(k^2-m^2)\tilde{\lambda}(k)e^{ikx}d^4k \tag{4.3.44}$$

のように書ける．ここで，

$$\tilde{\lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \lambda(y)e^{-iky}d^4y.$$

さて，以下の考察は次の補題に基礎をおいている．

[補題 4.3.1]　$\mathcal{S}^*(R_4)$ からとった一般関数 $f(x)$ が (4.3.44) のように表わされ，空間的な x に対しては 0 であるとする．そのとき，(4.3.44) によって双曲面 $k^2=m^2$ の上で定義された関数 $\tilde{\lambda}(k)$ は，この双曲面の上で k の多項式である．

証明．　k^0 についての積分を実行すれば (4.3.44) は三次元の Fourier 変換の形に書くことができる[1]．すなわち，

$$f(x)=\frac{1}{4\pi \mathrm{i}}\int\{\tilde{\lambda}(\omega_{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k})e^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}x^0}-\tilde{\lambda}(-\omega_{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k})e^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}x^0}\}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_{\boldsymbol{k}}},$$

$$\omega_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}.$$

これから，Fourier の逆変換を用いて，次の関係を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\tilde{\lambda}(\omega_{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k})-\tilde{\lambda}(-\omega_{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k})]&=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\omega_{\boldsymbol{k}}\int f(0,\boldsymbol{x})e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}d^3\boldsymbol{x},\\ \frac{1}{2}[\tilde{\lambda}(\omega_{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k})+\tilde{\lambda}(-\omega_{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{k})]&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int \dot{f}(0,\boldsymbol{x})e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}d^3\boldsymbol{x}.\end{aligned}\qquad(4.3.45)$$

ただし，

$$\dot{f}(x)\equiv\frac{\partial f(x)}{\partial x^0}.$$

空間的変数に対して $f(x)$ は 0 になることから，(一般) 関数 $f(0,\boldsymbol{x})$ および $\dot{f}(0,\boldsymbol{x})$ はいずれも原点に集中した台をもつことが導かれる．従って，定理 1.2.1 (第 1 章，2.4 節) により，それらは $\delta(\boldsymbol{x})$ とその導関数の有限個の一次結合である．このことと (4.3.45) とから，補題 4.3.1 の主張が出る．

この補題から，もしボソンの運動量のうち添え字 ρ に対応するものが質量殻の上にあれば，演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}(x,y)$ は準局所的とみなしうることが導かれる．なぜなら，$k^2=m_\rho^2$ のとき，

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\langle p'|\Lambda_{\rho\sigma}(x,y)|p\rangle d^4x=P_{\rho\sigma}(k)e^{\mathrm{i}(p'-p+k)y}$$

が成立するが，多項式の Fourier 変換は δ-関数とその導関数の一次結合であるから．

特に，次の交換関係

$$[j_\rho(x),a_\sigma^{\mathrm{out}}(k)]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{\mathrm{i}ky}}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)}d^4y$$

---

[1] 注意．この一般関数 $f\in\mathcal{S}^*(R_4)$ は Klein-Gordon 方程式をみたすから，これを $\boldsymbol{x}$ の一般関数とみなすことができる．しかも，$u(\boldsymbol{x})\in\mathcal{S}(R_3)$ として $\int f(x)u(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}$ をつくると，これは x^0 について通常の微分可能な関数である．

にカレントの汎関数的導関数（4.3.33）を代入し，$\Lambda_{\rho\sigma}$ の対称性を考慮すれば，演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}$ は準局所的であると考えることができる．

このように，演算子を値にもつ一般関数 $\Lambda_{\rho\sigma}$ の質量殻の上での振舞いは，この $\Lambda_{\rho\sigma}$ をいたるところで準局所的演算子の形で定義し，そうすることによって微視的因果性の条件がみたされるようにすることを可能にする．

S 行列の公理論においては，$\Lambda_{\rho\sigma}$ のような準局所的な項の存在を見落としてはならないということを強調しておこう．このような項がなければ，通常の Lagrange 形式における摂動論との対応をつけることができない（これについては，たとえば，Medvedev=Polivanov (1961) を見よ）．

最後に，Heisenberg 場 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ は，Yang=Feldman の方程式によってばかりでなく，また次の公式

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = T_W(\varphi^{\text{out}}(x)S)\,S^* \tag{4.3.46}$$

によっても，S 演算子と漸近場を用いて表わせるということに注意しよう．ただし，上の公式の T_W はいわゆる Wick の T 積であり，演算子 S が《出ていく》場の標準積に展開されているとして $T_W(\varphi^{\text{out}}S)$ は T 積を標準積に展開する Wick の定理（たとえば，文献 [4] の第3章を見よ）に従って定義される．自由スカラー場に対する T_W 積は通常の T 積に一致し，いちばん簡単な，因子が二個の場合には，

$$T_W(\varphi(x)\varphi(y)) = T(\varphi(x)\varphi(y)) = :\varphi(x)\varphi(y): + \frac{1}{\mathrm{i}}D^c(x-y)$$

という公式によって与えられることを思い起こそう．ここに，D^c は因果的 Green 関数 (3.A.9) である．一般の場合には，T_W 積は通常の T 積（ときに Dyson の T 積とよばれることがある）とは一致しない．その原因は，演算 T_W は場の変数に関する微分と可換であるのに対し，演算 T はそうでないことにある（この問題のもっと立ち入った議論は，Medvedev=Polivanov (1964) にある）．等式（4.3.46）は，形式的には T 積と T_W 積のあいだの違いを無視して，時間間隔が半無限の場合の S 行列の公式を用いれば得られる（たとえば，文献 [6] の第17章，§4を見よ）．

3.5.　局所性と矛盾しないように一般関数のクラスを選び出すこと

これまでわれわれはいつも，理論のなかに現われる特異な関数（たとえば，Wightman 関数，輻射演算子の真空期待値など）は緩増加一般関数であり，空間 S^* に属すると考えてきた．その理由は，S^* のなかには十分に多くの関数（特に，いわゆる δ-関数とそのす

べての導関数，多項式によっておさえられるようなすべての通常の関数，等々）が含まれているという点にある．このクラスのなかに無限遠で指数関数的に増大するような関数が入っていないという事実は，通常の量子力学において Schrödinger 方程式の解のうち急速に増大するようなものは物理的に見て許されないと考えることとちょうど対応している．

しかしながら，一般関数のクラスとして上述のものを選んだということは，一つの独立の仮説であって，この仮説からいくつかの自明でない物理的結論が出てくるということを理解しなければならない．運動量空間において S 行列要素が多項式によっておさえられるということは，上の仮説から出てくる重要な結果である．

くりこみのできないラグランジアンに対する摂動論において，その S 行列要素は，摂動の各次において p の大きいところでは多項式のようにふるまい，この多項式の次数は摂動の近似をよくするに従って限りなく増大するということが知られている．また，質量のあるベクトル場の理論である種のゲージの選び方をすると，その場合の Green 関数は多項式によってはおさえられないという研究がある．もし，こうした事情が，くりこみのできない理論における正確な S 行列要素は大きい運動量に対して任意の多項式よりも速く増大することを示していると考えるならば，そのことはすなわち，くりこみのできない理論は，一般関数のクラスを上述のように選んだのでは（つまり，3.3 節の要請 2）のもとでは）除外されてしまうということを意味するだろう．

しかし一方，もしわれわれが x 空間における局所性，特に微視的因果性の原理を保存したいと思うならば，p 空間における一般関数の増大のしかたは任意ではあり得ないということを次に示そう．

不必要な計算によって問題を複雑にしないように，以下では，一変数の関数 $f(t)$ について論ずることにしよう．関数 $f(t)$ といったがこれは実は一般関数，すなわち，基礎関数 $u(t)$ のある空間 Ω において定義された線形汎関数であるとする．ただしこの場合の，基礎関数の空間 Ω がどのようなものであるかは，さしあたり定めずにおく．関数 f の局所的性質について語ることができるためには，特に，たとえば $t<0$ では $f(t)=0$ というような要請が意味をもつためには，空間 Ω は十分に多くの基礎関数を含まなければならない（上に例としてあげたような要請は，微視的因果性を定式化するときに現われる）．これらのことは必ずしもいつも成り立っているというわけではなくて，関数 $f(t)$ の局所的性質について語ることができるのは，その Fourier 変換 $\tilde{f}(\omega)$ がある許された増大の

しかたをする場合に限るのである．これは次の例によって確認できる．

関数 $\tilde{f}(\omega)$ の空間 Ω_a^* が，$\mathcal{S}^*$ の一般関数とともに，無限遠で $e^{b\omega}$（ただし $|b|<a$で，$a>0$ は固定されているとする）のように振舞うようなすべての通常の関数を含んでいるとしよう．空間 Ω_a^* を，次のノルムをもった無限回微分可能な関数 $u(\omega)$ からなる可算ノルム空間 Ω の上で定義された線形汎関数の空間と考えることができる：

$$p_n(u)=\max_{k\leqslant n}\sup_{\omega}\left|\exp(a|\omega|)\frac{d^k u(\omega)}{d\omega^k}\right| \qquad (n=0,1,2,\cdots). \qquad (4.3.47)$$

容易に確かめられるように，$D\subset\Omega_a\subset\mathcal{S}$ である．

ノルム (4.3.47) が有界であることから，Ω_a からとった関数の Fourier 変換 $\tilde{u}(t)$ は，

$$-a<\operatorname{Im}t<a \qquad (4.3.48)$$

の範囲で解析的であり，この帯状の領域の内部で t が無限遠に近づくとき，$|t|$ の任意の負のベキよりも速く0になることが導かれる．Fourier 変換の集まりであるこの空間を $\tilde{\Omega}_a$ と書くことにしよう．$\tilde{\Omega}_a$ のなかでは，通常のやり方によって一般関数の局所的性質を定義することはできない．なぜなら，その空間には有界な台をもつ関数は含まれていないからである．それどころか，一般関数 $\tilde{f}\in\tilde{\Omega}_a^*$ に対しては，与えられた区間においてそれらが何らかの普通の関数 $\varphi(t)$ に一致するというようなことをいっても一般に意味がない．特に，$t<0$ で $\tilde{f}=0$ という要請は意味を失ってしまう．

問題は，$\tilde{\Omega}_a$ のなかには有界な台をもつ（恒等的に）0 でない関数が存在しないので，$\tilde{\Omega}_a$ の上の線形汎関数に対しては，台の自然な定義が存在しないという点にある．

例として次の級数を考えてみよう：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}\delta^{(n)}(t). \qquad (4.3.49)$$

ここで，$0<b<a$ とする．この級数は空間 Ω_a^* において収束する．なぜなら，次の級数

$$(f,u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{(n)}(0)}{n!}(-b)^n=u(-b) \qquad (4.3.50)$$

は解析関数 $u(t)$ の Taylor 級数にほかならないからである（$b<a$ としたから）．

さらに，級数 (4.3.49) の各項の台は $t=0$ に集中している（従って，特に実数軸の負の部分に沿って0である）にもかかわらず，(4.3.50) によれば点 $-b$ は級数の和の台と考えられる（点 $-b$ を囲んでしかも領域 (4.3.48) の内部にすっかり含まれる任意の閉曲線 C_b 上の点も同様である．なぜなら，Cauchy の公式によって，

$u(-b)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_b}\frac{u(z)}{z+b}dz$ が成り立つからである).

他方，すでに第1章で注意したように，級数 (4.3.49) (あるいは (4.3.50)) は，$\mathcal{S}^*$ の収束に関しては発散する．これは，$\mathcal{S}^*$ の一般関数が定まった局所的性質をもっていることに対応する．

そこで，局所的性質についてなお語りうる一般関数のクラスのうちで最も広いものは何だろうか，という問題が生ずる．

Fourier 変換を用いると，上の問題に対する答は，だいたいにおいて，次のように定式化することができる．すなわち，〈局所化可能な〉関数 $f(t)$ の Fourier 変換 $\tilde{f}(\omega)$ は，どんな指数関数よりも遅く増大しなければならない．x 空間の基礎関数のなかに有界な台をもつ関数の稠密な集合が存在することこそ，一般関数の局所的性質の通常の定義を可能にする保証であるという点に注意しよう．上で考察した空間 Ω_a^* の例で見たように，もし $\tilde{f}(\omega)$ が指数関数的に増大するものであったら，$f(t)$ の局所的性質を一義的に定義することは不可能である．だが，これから簡単に紹介する Jaffe (1967) の結果は，上に述べたように増え方がもっと弱い場合には，局所的性質が定式化できることを示している．

まず，運動量空間の基礎関数の一つのクラスを定義することから始めよう．

$R_4(p)$ の無限に滑らかな関数 u から成り，

$$N_n(g\,;u)=\sup_{\substack{p\in R_4\\ k\leqslant 2n}}\{g(n|p|^2)(1+|p|^2)^n\,|D^k u(p)|\}\qquad(4.3.51)$$

という可算ノルムをもつ空間 $\mathcal{S}(g)$ の族を考える．ここに，D^k は階数 k の微分演算子

$$D^k=\frac{\partial^{k_0+k_1+k_2+k_3}}{\partial p_0^{k_0}\,\partial p_1^{k_1}\,\partial p_2^{k_2}\,\partial p_3^{k_3}}$$

であり，$|p|^2$ は Euclid ノルムの平方，すなわち $|p|^2=(p^0)^2+\boldsymbol{p}^2$ を表わす．$g(z)$ は，実数軸の非負の部分においては負になることがない導関数をもつような整関数とする．すなわち，

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu\qquad(c_\nu\geqslant 0).\qquad(4.3.52)$$

関数 $g(z)$ の選び方に応じて問題にしている族の要素として異なった可算ノルム空間が得られる．

空間のこのクラスは，$|p|\to\infty$ のときにいろいろの速さで0になる基礎関数を含んでいるという意味で，十分に広い (それはまた，一般関数の $|p|$ が大きいときの振舞いがいろいろあるということにもなる)．それで，$g(z)=1$ とすると，空間 $\mathcal{S}(g)$ は第1章§2で定義した基礎関数の空間 $\mathcal{S}(R_4)$ になる．もし $g(z)$ が1/2次の整関数であれば，すなわち $g(|p|^2)$ が大きい $|p|^2$ に対して $e^{b|p|}$ $(b>0)$ のように振舞うならば，$\mathcal{S}(g)$ のすべての関数は無限遠で任意の指数関数 $e^{-nb|p|}$ よりも速く減少し，従って $\mathcal{S}^*(g)$ の一般関数のうちには肩が一次である指数関数のすべてが含まれる．Jaffe (1967) は，$\mathcal{S}(g)$ の基礎関数の Fourier 変換がつくる空間 $\tilde{\mathcal{S}}(g)$ のなかに座標を変数とする有界な台をもつ関数が含まれているために，(4.3.52) の形の関数 $g(z)$ に課すべき必要十分条件を見いだし

た．それは，次の積分が収束することである[1]．

$$\int_1^\infty \frac{\ln g(w^2)}{w^2}dw < \infty. \tag{4.3.53}$$

$\mathcal{S}(g)$ の位相がノルム (4.3.51) の系列によって定義されることから，$\mathcal{S}^*(g)$ の一般関数の増大は，n をある値に固定して，$g(n|p|^2)|p|^{2n}$ より速くはないことが可能である．別の言葉でいうと，もし十分大きな $|p|$ に対し一般関数 f が通常の関数 $f(p)$ に一致したとすると，ある n と $c_f>0$ とがあって，次の関係が成り立つ：

$$|f(p)| < c_f g(n|p|^2)(1+|p|^2)^n. \tag{4.3.54}$$

例として，無限遠でそれぞれ $\exp w$，$\exp(w/\ln w)$ および $\exp[w/\ln w(\ln\ln w)^{1+\varepsilon}]$（ここで $\varepsilon>0$）のように振舞う関数 $g(w^2)$ によって特徴づけられる三つの空間 $\mathcal{S}(g)$ を考えよう．そのうちで，第三の空間だけが局所的性質の定式化に使える．なぜなら，この場合にだけ，条件 (4.3.53) がみたされるからである．

終わりに Jaffe における問題の提起は，最も一般的なものではないことに注意しよう．一般関数の局所的性質を定義すること（特に，一般関数の台の概念を定義すること）は，有界な台をもつ関数を利用しないでも（たとえば Martineau (1963) のような考え方で）試みることができる．それで，次のような仮説が立つ：すなわち，問題をそのように十分に一般的に提起するならば，(4.3.53)，(4.3.54) よりももっと弱い制限をみたす一般関数のクラス，すなわちその無限遠における増大のしかたが，肩が一次であるような任意の指数関数よりも速くはない，

$$|f(p)| \leqslant c_\varepsilon e^{\varepsilon|p|} \qquad (\text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対して})$$

というようなものまでいけるだろう (Meiman (1964) と Khoruzhii (1967) を参照せよ)．

この節で考察した問題は，理論の局所性という要請だけに注目するなら，その場合に許される一般関数のクラスに対する制限を，どのようにして弱めることができるかという問題であった．まえに注意したように，一般関数のクラスのこのような拡張は，もしわれわれがくりこみのできない理論をも含むような理論形式をつくりたいと思うならば，一見したところ必要である．他方，基礎関数が時間的な方向に急速に減少しなければならないという要請は，あまりにきびしすぎるように思われる．この要請は，たとえば，Klein-Gordon 方程式の滑らかな解においてはみたされていない．そして，S 行列要素の質量殻の上での境界値が存在するということの証明を困難にしている．くりこみ可能な理論の場合においてさえ一般に，基礎関数および一般関数の〈最適な〉クラスを選ぶという問題は，最終的な解決に達したとは考えられない．しかしこの問題が，理論の今後の発展において一層はっきりするだろうことは，ほぼ間違いない．

---

[1] 証明は，準解析的関数に関する古典的な定理（たとえば，文献 [47] の第1章を見よ）から簡単に得られる．

3.6. 遅延型および先発型輻射演算子

第3節において散乱行列と輻射演算子の局所的性質を研究したさいに，われわれは S演算子を《出ていく》場の関数と考えた．その結果，因果性の条件（4.3.26）において未来の光円錐が特別の役割を演ずることになった．もし《出ていく》場の代わりに《入ってくる》場を用い，カレント j_ρ も次の等式

$$j_\rho(x) = \mathrm{i}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho^{\mathrm{in}}(x)} \tag{4.3.55}$$

によって定義したとしたら，因果性の条件（4.3.24）は次の形になったであろう：

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma^{\mathrm{in}}(y)} = 0 \qquad (x \lesssim y \text{ のとき})$$

（x と y のあいだの不等号が逆になっている）．ところで，散乱の行列要素を調べるさいに重要なことは，それらが遅延型 Green 関数（これは変数 $x-y$ に関して未来の光円錐の内部でのみ0でない）の極限値であると同時に先発型 Green 関数（これは過去の光円錐の内部でのみ0でない．これらの定義については第1章3.2節を見よ）の極限値にもなっていることである．

遅延型ならびに先発型関数の性質を平行的に考察するためには，同時に《入ってくる》場と《出ていく》場とを導入する必要はないということを以下に示そう．

この目的のためには，汎関数的微分 $\delta/\delta\varphi_\rho \equiv \delta/\delta\varphi_\rho^{\mathrm{out}}$ とならんで，さらに次の形の第二の微分演算子を導入することが必要である．それは，

$$D_{\varphi_\rho(x)}A = S\left[\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(x)}(S^*AS)\right]S^* \tag{4.3.56}$$

であって，ここで（また以下においても）《出ていく》場に対する添え字〈out〉を省いてある．

元 $a, b, \cdots$ をもつ抽象的な代数 $\mathfrak{A}$ において，積の微分の規則

$$D(a\cdot b) = Da\cdot b + a\cdot Db \tag{4.3.57}$$

を満足する任意の線形演算子 D を微分とよぶ．汎関数的微分 $\delta/\delta\varphi_\rho$ はもちろん，（4.3.56）の演算 D_{φ_ρ} もまた条件（4.3.57）をみたしていることは，容易に確かめられる．このことによって，演算 D_{φ_ρ} を〈微分〉とよぶことは正当である．

この演算は，先発型関数を自然な形で導入することを可能にする．実は，この演算は，《入ってくる》場に関して微分をとることと同値なのである．実際，カレント $j_\rho(x)$ は，新しい微分を用いれば，（4.3.55）とまったく同じ形をした次の公式によって表わされ

る：

$$j_\rho(x) \equiv \mathrm{i}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^* = \mathrm{i}S^*D_{\varphi\rho}(x)S. \tag{4.3.58}$$

これを証明するには，(4.3.56) で $A=S$ と置いてこれを (4.3.58) に代入し，ユニタリ条件 (4.3.11) を用いればよい．

さらに，演算 D をもう一度行なえば，

$$D_{\varphi_\sigma(y)}j_\rho(x) = \frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)}+\mathrm{i}[j_\sigma(y), j_\rho(x)] = \frac{\delta j_\sigma(y)}{\delta\varphi_\rho(x)} \tag{4.3.59}$$

が得られる．

(4.3.59) の二番目の等式は，恒等式 (4.3.29) によって正しい．(4.3.59) を見れば，$\delta/\delta\varphi_\rho \to D\varphi_\rho$ の置き換えをしたとき，因果性の条件で変数のあいだの不等号が逆になることがわかる．

微分 (4.3.56) を続けて用い，ユニタリ条件を利用すれば，

$$D^2_{\varphi\rho_1(x_1)\varphi\rho_2(x_2)}A \equiv D_{\varphi\rho_1(x_1)}(D_{\varphi\rho_2(x_2)}A) = S\frac{\delta^2(S^*AS)}{\delta\varphi\rho_1(x_1)\delta\varphi\rho_2(x_2)}S^* \tag{4.3.60}$$

が得られ，これと，汎関数的微分演算 $\delta/\delta\varphi_{\rho_1}$, $\delta/\delta\varphi_{\rho_2}$ が可換であることから，演算 $D_{\varphi\rho}$ 同志の交換可能性がでてくる．従って，微視的因果性の条件を次のような一般的な形に書くことができる．すなわち，不等式 $x_j \lesssim x$ $(j=1,\cdots,n)$ のうちのいずれか一つでもみたされていれば，

$$\frac{\delta^n j_\rho(x)}{\delta\varphi\rho_1(x_1)\cdots\delta\varphi\rho_n(x_n)} = 0 \tag{4.3.61}$$

が成り立つ．また，不等式 $x_j \gtrsim x$ $(j=1,\cdots,n)$ のうちのいずれか一つでもみたされていれば，

$$D^n_{\varphi\rho_1(x_1)\cdots\varphi\rho_n(x_n)}j_\rho(x) = 0 \tag{4.3.62}$$

が成り立つ．

3.7. 四点 Green 関数．解析性の原始領域

簡単のためボソンの場合に話を限って，最も重要な例である四点 Green 関数

$$\begin{aligned}(2\pi)^4 G^c(p_1, p_2, p_3, p_4)\,\delta(p_1+p_2+p_3+p_4) \\ = \mathrm{i}\int\cdots\int\langle 0|H_4(x_1\rho_1, x_2\rho_2, x_3\rho_3, x_4\rho_4)|0\rangle \\ \times e^{\mathrm{i}(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)}\prod_{j=1}^4 d^4x_j\end{aligned} \tag{4.3.63}$$

を調べよう．ここに，H_4 は公式 (4.3.20) で $n=4$ として定義される四階の輻射演算子

である.

問題 4.3.5 並進不変性の条件 ((4.3.6), (4.3.6 a) を見よ) によって, (4.3.63) の右辺もまた四次元の δ-関数 $\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)$ を含むことを示せ.

等式 (4.3.63) によって定義される関数 G^c は, 四点の《因果的 Green 関数》とよばれる.

(4.3.63) において運動量 p_j は, 一般には質量殻の上にのっていないことに注意しよう. この因果的 Green 関数は6個の過程の散乱振幅と結ばれている. これらの振幅のうちの最初の三つは次の形をもつ:

$$\langle p_1\rho_1, p_2\rho_2|T|-p_3\rho_3, -p_4\rho_4\rangle, \quad p_j^2=m_j^2, \quad p_1^0, p_2^0>0, \quad p_3^0, p_4^0<0, \tag{4.3.64 a}$$

$$\langle p_1\rho_1, p_3\rho_3|T|-p_2\rho_2, -p_4\rho_4\rangle, \quad p_1^0, p_3^0>0, \quad p_2^0, p_4^0<0, \tag{4.3.64 b}$$

$$\langle p_1\rho_1, p_4\rho_4|T|-p_2\rho_2, -p_3\rho_3\rangle, \quad p_1^0, p_4^0>0, \quad p_2^0, p_3^0<0. \tag{4.3.64 c}$$

残りの三つは, (4.3.64) において初めの状態と終りの状態の位置を交換することによって得られる. これらの公式において,

$$T=\mathrm{i}(S-1) \tag{4.3.65}$$

である.

たとえば, 振幅 (4.3.64 a) は G^c を用いて,

$$\langle p_1\rho_1, p_2\rho_2|T|-p_3\rho_3, -p_4\rho_4\rangle$$
$$=\frac{\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)}{(4\pi)^2\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}G^c(p_1\rho_1, \cdots, p_4\rho_4) \tag{4.3.66}$$

のように表わされる.

具体的に書かなかった逆過程の振幅は, TCP 不変性によって, 事実上, 上に書いた振幅と一致する (これについては, 第5章を見よ. なお, ここで場 φ_ρ はエルミートであり, 中性のボソンの散乱振幅を問題にしていることに注意せよ).

振幅 (4.3.64) およびそれらの逆過程の振幅から出発して, 32個の異なった遅延型, 先発型, および混合型の Green 関数が導かれるけれども, それらの各々は, ある領域においては G^c と一致する. これらの関係を明らかにすることは, 遅延型および先発型関数の Fourier 変換が簡単な解析的性質をもつ (第1章の付録, 定理 1.A.1 を見よ) という見地から見るとき, 特に有用である. 因果的 Green 関数 G^c は, 結局, 保存則

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0 \tag{4.3.67}$$

をみたす複素運動量 k_j のただ一つの解析関数として定義され, 実在する散乱過程の振幅

は，この解析関数のいろいろ異なった境界値として得られることになろう．

そこで，われわれは，四点関数の場合の遅延型および先発型 Green 関数の完全系の定義に進もう．

いま j, k, l, n を数字 1, 2, 3, 4 の任意の置換とする．また，簡略化した記号

$$\delta_k \equiv \frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho_k}(x_k)}, \quad D_k \equiv D_{\varphi_{\rho_k}(x_k)}, \quad j_k \equiv j_{\rho_k}(x_k) \tag{4.3.68}$$

を導入しよう．次の等式によって定義される四つの〈純粋に遅延的な〉関数 R_n と，四つの先発的な関数 A_n が存在する：

$$\begin{aligned} R_n &= R_n(x_n; x_j, x_k, x_l) = \langle 0|\delta_j\delta_k\delta_l j_n|0\rangle, \\ A_n &= A_n(x_n; x_j, x_k, x_l) = \langle 0|D_j D_k D_l j_n|0\rangle \\ &(n = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \tag{4.3.69}$$

演算 δ_j は互いに可換であり，また D_k も互いに可換であるから，関数 R_n および A_n は j, k, l の置換によっては変わらない．さらに，次のような混合型の遅延型および先発型関数を定義しよう：

$$\begin{aligned} R_{nj}(x_j, x_k, x_l, x_n) &= \langle 0|D_j\delta_k\delta_l j_n|0\rangle = \langle 0|\mathrm{i}[j_j, \delta_k\delta_l j_n] + \delta_j\delta_k\delta_l j_n|0\rangle \\ &= \langle 0|\delta_k\delta_l\delta_n j_j + \mathrm{i}\{[j_n, \delta_k\delta_l j_j] + [\delta_k j_n, \delta_l j_j] + [\delta_l j_n, \delta_k j_j]\}|0\rangle, \end{aligned} \tag{4.3.70}$$

$$\begin{aligned} A_{nj}(x_j, x_k, x_l, x_n) &= \langle 0|\delta_j D_k D_l j_n|0\rangle \\ &= \langle 0|\mathrm{i}\{[\delta_j j_k, \delta_n j_l] + [j_k, \delta_j\delta_n j_l]\} + \delta_j\delta_k\delta_n j_l|0\rangle \\ &= \langle 0|\mathrm{i}\{[\delta_j j_l, \delta_n j_k] + [j_l, \delta_j\delta_n j_k]\} + \delta_j\delta_l\delta_n j_k|0\rangle \\ &(n, j = 1, 2, 3, 4\ (n \neq j)). \end{aligned} \tag{4.3.71}$$

定義から関数 R_{nj} および A_{nj} は変数 x_k, x_l の順序によらず，従って二つの添え字 n, j をもち，互いに異なる 24 個の関数があることがわかる．

微視的因果性の一般的条件 (4.3.61), (4.3.62) から，もし変数 x_k, x_l あるいは x_n のどれか一つでも x_j を頂点にもつ未来光円錐のなかに入っていなかったら，関数 R_j は 0 になること，またもし x_k, x_l, x_n のどれか一つでも x_j を頂点にもつ過去光円錐のなかになかったら，A_j が 0 になることが導かれる．別の言葉でいえば，これらの一般関数の台は，円錐 $\overline{V}_j^{\pm}$ に含まれている．すなわち，

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}\, R_j &\subset \overline{V}_j^+ \equiv \{x\,|\,x_k - x_j \in \overline{V}_+, x_l - x_j \in \overline{V}_+, x_n - x_j \in \overline{V}_+\}, \\ \mathrm{supp}\, A_j &\subset \overline{V}_j^- \equiv \{x\,|\,x_j - x_k \in \overline{V}_+, x_j - x_l \in \overline{V}_+, x_j - x_n \in \overline{V}_+\}. \end{aligned} \tag{4.3.72 a}$$

問題 4.3.6 次のことを示せ．a) もし点 x_k あるいは x_l の一つでも x_n を頂点にもつ未来光円錐のなかにないか，あるいはこれらの点がいずれも x_j を頂点にもつ未来光円錐の外部にあるならば，R_{nj} は 0 である．b) もし $x_k \gtrsim x_n$ または $x_l \gtrsim x_n$ が成り立つか，あるいは $x_j \lesssim x_k$ でかつ $x_j \lesssim x_l$ が成り立てば，A_{nj} は 0 に等しい．別の言葉でいうと，

$$\operatorname{supp} R_{nj} \subset \overline{V}_{kln} \cup \overline{V}_{lkn},$$
$$\operatorname{supp} A_{nj} \subset \overline{V}_{njk} \cup \overline{V}_{njl}. \tag{4.3.72 b}$$

ここに，

$$V_{njk} \equiv \{x \,|\, x_n - x_k \in V_+, x_n - x_l \in V_+, x_j - x_k \in V_+\}. \tag{4.3.73}$$

定理 1.A.1 によると，関数 R および A の台がもつこれらの性質から，(4.3.63) の形の公式

$$(2\pi)^4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) G^Z(k) = \int \cdots \int Z(x) e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4)} \prod_{i=1}^{4} d^4x_i \tag{4.3.74}$$
$$(Z = R, A;\, x = (x_j, x_k, x_l, x_n),\ \ k = (k_j, k_k, k_l, k_n))$$

によって定義されるそれらの関数の Fourier 変換 G^R および G^A の一定の解析的性質がでてくる．

まず，関数 $G^{R_n}(k_j, k_k, k_l, k_n)$ は，〈未来の〉管状領域

$$T^+(n) = \{k = p + iq \in \mathcal{K} \,|\, q_a \in V_+, a = j, k, l\} \tag{4.3.75}$$

において解析的である．ここで $\mathcal{K}$ は，保存則 (4.3.67) をみたすベクトル $(k_1, \cdots, k_4)$ がつくる 12 次元の複素空間である．また関数 G^{A_n} は，これと反対側の（〈過去の〉）管状領域 $T^-(n)$ において解析的である．

次に，関数 $G^{R_{nj}}$ は少なくとも次の管状領域

$$T^+(nj) = \{k \in \mathcal{K} \,|\, q_j \in V_-, q_k + q_j \in V_+, q_l + q_j \in V_+\} \tag{4.3.76}$$

において解析的であることを示そう．

これを証明するために，$\mathcal{K}$ において次の関係が成り立つことに注意しよう：

$$G^{R_{nj}}(k_j, k_k, k_l)$$
$$= \int \cdots \int R_{nj}(x_j, x_k, x_l, 0) e^{i(k_jx_j+k_kx_k+k_lx_l)} d^4x_j d^4x_k d^4x_l. \tag{4.3.77}$$

この関数 (4.3.77) は，

$$\operatorname{Im}(k_jx_j + k_kx_k + k_lx_l) \equiv q_jx_j + q_kx_k + q_lx_l > 0 \tag{4.3.78}$$

がすべての $(x_j, x_k, x_l) \in \operatorname{supp} R_{nj}(x_j, x_k, x_l, 0)$（ただし座標原点は除く）に対して成り立っているような領域では確かに解析的である．

領域 $T^+(nj)$ (4.3.76) において，(4.3.78) が実際に成り立っていることを確かめるには，(4.3.72 b) と (4.3.73) により，この領域で次の不等式が正しいことに注意すれ

ば十分である：

$$x_k - x_j \in \overline{V}_+ \text{ ならば } q_j x_j + q_k x_k + q_l x_l \geqslant (q_k + q_j) x_k + q_l x_l,$$
$$x_l - x_j \in \overline{V}_+ \text{ ならば } q_j x_j + q_k x_k + q_l x_l \geqslant (q_j + q_l) x_l + q_k x_k. \tag{4.3.79}$$

同様にして，反対側の管状領域

$$T^-(nj) = \{(k \in \mathcal{K} \mid q_j \in V_+, q_j + q_k \in V_-, q_l + q_j \in V_-\} \tag{4.3.80}$$

における GA_{nj} の解析性が証明される．

上述のいろいろの Green 関数に対する解析性の原始領域 $T^{\pm}(n)$ ならびに $T^{\pm}(nj)$ は，いずれも錐体であることに注意しよう．別の言葉でいうと，もし $k = (k_1, k_2, k_3, k_4) \in T^{\pm}$ なら，λ を正の数として，$\lambda k \in T^{\pm}$ である．

それゆえに，異なった解析性の領域を直観的に表現するためには，座標原点に中心をもつ何らかの固定した球とその領域との交わりを表示すれば十分である．さらに，領域 $T^{\pm}$ は，運動量の実部に関しては管状である．このことは，$T^{\pm}$ の定義 (4.3.75)，(4.3.76) および (4.3.80) には $\mathrm{Im}\, k_a = q_a$ に対する条件しか含まれていないので，運動量の実部 $\mathrm{Re}\, k_a = p_a$ はまったく任意であるということからわかる．このように，ベクトル k の虚部の空間において，領域 $T^{\pm}$ の特徴を示すことが重要となる．はっきりさせるために，ベクトル q_a の0成分がつくる次のような三次元空間

$$Q^{(0)} \equiv \{\{q_a^0\} \mid q_1^0 + q_2^0 + q_3^0 + q_4^0 = 0\} \tag{4.3.81}$$

において，いろいろの解析性の領域を表示してみよう．上に述べたことから，単位球

$$\sum_{a=1}^{4} (q_a^0)^2 = 1 \tag{4.3.82}$$

と超平面 $Q^{(0)}$ との共通部分である三次元球面を考えれば十分である．この球面と領域 $T^{\pm}$ の交わりを次の図に示す*)．

---

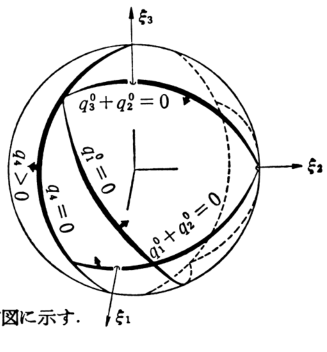
*) (4.3.81) の条件 $\sum_a q_a^0 = 0$ を用いて q_4^0 を消去すると，(4.3.82) は，三次元の球面，

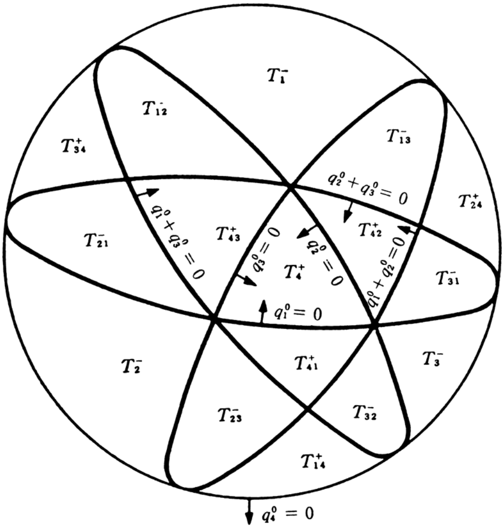
$$S: \qquad \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = 1$$

を与える．ただし，(ijk) を (123) の巡回置換として，

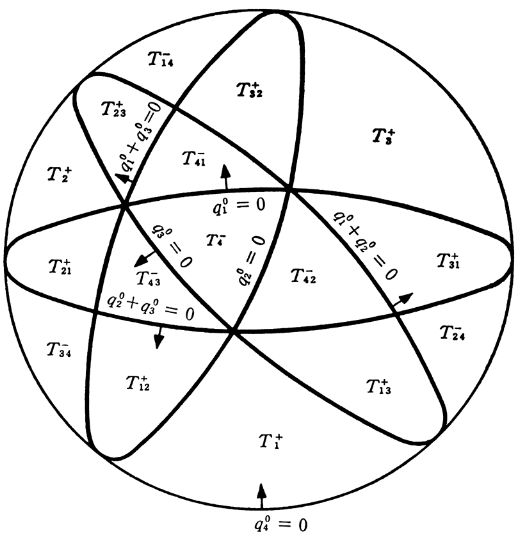
$$\xi_i = q_j + q_k$$

と置いた．この球面 S を ξ 空間のベクトル (1, 1, 1) に向かって見たときに見える半球面が図の a) であり，このベクトルの矢尻の方から見たものが b) になる．図の円内の境界線は半球面の上の半大円であって，例として図 a) の二本の境界線 $q_1^0 = 0$，$q_2^0 + q_3^0 = 0$ を立体的に右図に示す．





a) $q_4^0<0$ の半球



b) $q_4^0>0$ の半球

図で見るように，球面全体が上記の解析性の領域（およびそれらの境界）によっておおいつくされている．これらの領域は32個あって，16個ずつが各半球 $q_4^0 \lessgtr 0$ の上にある．われわれの選んだ Green 関数系 (4.3.69) ～ (4.3.71) が完全だというのは，このことである．

3.8. スペクトル条件および種々の四点 Green 関数が互いに一致する運動量空間の領域

この節では，実の運動量空間のさまざまな領域において関数 $G^Z(p)$ が互いに一致するための条件を，基本仮定の一つであるスペクトル条件（すなわち3.2節の条件2））から導きだそう．

準備として，カレントの行列要素が0になるための条件を示しておく．

われわれは以下で，カレントの真空期待値が0であることを前提としよう．すなわち，

$$\langle 0|j(x)|0\rangle = 0. \tag{4.3.83}$$

もしもカレント j（あるいは同じことだが，それと結びついた場 φ）が，真空の量子数とは異なった量子数をもつならば（たとえば，π 中間子のときのように j がギ・スカラーであるとか，K 中間子の場合のように0でないストレンジネスをもつ，など），そのときは条件 (4.3.83) は自動的にみたされている[1]（しかし，すべての場合に，行列要素の並進不変性によって $\langle 0|j(x)|0\rangle = \langle 0|j(0)|0\rangle$ は定数に等しいから，この定数をカレント j から引くことによって，(4.3.83) が成り立つようにすることができる）．

さて，次の補題を証明しよう．

［補題 4.3.2］ 真空と安定な一粒子状態のあいだでとったカレントの行列要素は0に等しい．

証明． $|k\alpha\rangle$ を安定な一粒子状態とし，$a_\rho(p)$ を場 $\varphi_\rho(x)$ の消滅演算子としよう．安定性の条件 (4.3.10) と等式 (4.3.17) から次式を得る：

$$0 = \frac{\sqrt{2\omega_p}}{(2\pi)^{5/2}}\langle 0|[a_\rho(p), S]|k\alpha\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\langle 0|j_\rho(x)|k\alpha\rangle e^{ipx}d^4x = \delta(p-k)\langle 0|j_\rho(0)|k\alpha\rangle.$$

p についてこれを積分すれば，

---

[1] 今日知られているすべての素粒子は，そのような量子数をもっている．ただ，いくつかの短寿命の共鳴状態に対してのみ，すべての量子数が真空のそれと相等しいということがある．しかし，共鳴状態に対しては，元来，それに相当する漸近場 φ や，従って (4.3.22) の形の等式によって定義される局所的カレントは考えることができない．

$$S|k\alpha\rangle = |k\alpha\rangle \text{ ならば } \langle 0|j_\rho(0)|k\alpha\rangle = 0 \tag{4.3.84}$$

を得る．これが，証明すべきことであった．

[補題の系] スペクトル条件と上に証明した補題とから，任意の演算子 A と任意の状態 $|i\rangle, |f\rangle$ に対し，次の等式が成り立つことが出てくる：

$$\int\langle f|Aj_\rho(x)|0\rangle e^{ipx}d^4x = \int\langle 0|j_\rho(x)A|i\rangle e^{ipx}d^4x = 0 \qquad (p^2 < M_\rho^2). \tag{4.3.85}$$

ここに M_ρ は，ボソン ρ が遷移しうる多粒子状態のうち最もエネルギーの低いもののしきい値である．上の命題を証明するには，カレント j_ρ と演算子 A のあいだに中間状態の完全系をはさみ，(4.3.83)，(4.3.84) に注意するだけでよい．実際に自然界に存在するギ・スカラー中間子に対して，M_ρ はこの中間子が三個存在する状態のしきい値である（核子－反核子状態はこれよりも大きい質量をもつ）．

質量殻の外では，安定性の条件は適用できないことに注意しよう．もし適用できるとして，

$$\langle 0|a_\rho(p)S = \langle 0|a_\rho(p) \qquad (p^2 \neq m_\rho^2)$$

を仮定すると，等式 (4.3.84) は（単に一粒子状態に対してだけでなく）任意の状態 $|k\alpha\rangle$ に対して成り立つことになり，その結果 $j_\rho(x)|0\rangle = 0$ ということになってしまう．これは，Federbush=Johnson の定理（第5章を見よ）によると $j_\rho(x) \equiv 0$ を導き，この結論は，自由場というごく簡単な理論においてしか成立しない．同じ理由で，二点の遅延型 Green 関数

$$G_{\rho\alpha}^{\mathrm{ret}}(k) = \int\langle 0|\frac{\delta j_\rho(0)}{\delta\varphi_\alpha(x)}|0\rangle e^{ikx}d^4x \tag{4.3.86}$$

も恒等的に 0 ではない．この関数は，行列要素 (4.3.84) の質量殻の外への接続として生ずるものである．

問題 4.3.7 等式 (4.3.33) を用い，(4.3.31) を考慮して次のことを示せ．因果的交換関係(3.4.95) の真空期待値に対する Källén=Lehmann の表示から出発し，$\int_{M^2}^\infty \lambda^{-1}d\sigma(\lambda) < \infty$ を仮定して遅延型 Green 関数に対する Källén=Lehmann の表示

$$G_{\rho\alpha}^{\mathrm{ret}}(k) = P_1(k) + P_2(k)\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_{M_{\rho\alpha}^2}^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{k^2-\lambda+i\varepsilon k^0} \tag{4.3.87}$$

を導くことができる．ただし P_1 と P_2 は多項式である[1]（ヒント：積の Fourier 変換は各因子の変

[1] スカラー場（およびカレント）の場合，多項式 $P_1(k)$ と $P_2(k)$ は k^2 だけによる．補題4.3.1によれば，次式が成り立つ：

$$G_{\rho\alpha}^{\mathrm{ret}}(k)|_{k^2=m^2} = 0. \tag{4.3.88}$$

換のたたみこみに等しいという定理を利用し，これを，$\theta(x^0)$ と交換子 $[j_\rho(0), j_\alpha(x)]$ の真空期待値の積に適用せよ．ただし，(3.4.94) に注意すること).

さて，関数 G^Z が互いに一致する領域を定めよう．まず，(p は実であるとして) 次の等式が成り立つことを示そう．

$$p_j^2 < M_j^2 \text{ のとき}, \quad G^{A_n}(p) = G^{A_{nj}}(p), \qquad G^{R_n}(p) = G^{R_{nj}}(p), \tag{4.3.89}$$

$$(p_j+p_l)^2 = (p_n+p_k)^2 < M_{jl}^2 \text{ のとき}, \quad G^{R_{nj}}(p) = G^{A_{kl}}(p). \tag{4.3.90}$$

ここで M_j と M_{jl} は，それぞれ粒子 j または粒子対 jl が遷移しうる多粒子状態のうちで，最も低いもののしきい値に等しい正の数である．また，$\{j, n, k, l\}$ は数字 1, 2, 3, 4 の置換を表わす．

(4.3.89) の各等式の証明は同様にできるから，例として二番目のものを証明しよう．

(4.3.69)，(4.3.70) および (4.3.74) により，

$$\begin{aligned} &G^{R_n}(p) - G^{R_{nj}}(p) \\ &= \int\cdots\int \langle 0|(\delta_j - D_j)\,\delta_k\delta_l j_n(0)|0\rangle e^{i(p_jx_j+p_kx_k+p_lx_l)} d^4x_j d^4x_k d^4x_l \\ &= i\int\cdots\int \langle 0|[\delta_k\delta_l j_n(0), j_j(x_j)]|0\rangle e^{i(p_jx_j+p_kx_k+p_lx_l)} d^4x_j d^4x_k d^4x_l \end{aligned} \tag{4.3.91}$$

を得る．最後の等式は，恒等式

$$\delta_\rho A - D_\rho A = i[A, j_\rho(x_\rho)] \tag{4.3.92}$$

の結果である．(4.3.92) の特別の場合が (4.3.59) である．

(4.3.91) に補題 4.3.2 の系 (4.3.85) を入れると (4.3.89) の二番目の等式が得られる．

(4.3.90) を証明するために，差

$$\begin{aligned} &G^{R_{nj}}(p) - G^{A_{kl}}(p) \\ &= i\int\cdots\int \langle 0|\left[\frac{\delta j_n(0)}{\delta\varphi_k(x_k)}, \frac{\delta j_j(x_j)}{\delta\varphi_l(x_l)}\right]|0\rangle e^{i(p_jx_j+p_kx_k+p_lx_l)} d^4x_j d^4x_k d^4x_l \end{aligned} \tag{4.3.93}$$

を考えて，これが $(p_j+p_l)^2 < M_{jl}^2$ のとき 0 になることを示そう．

そのために，交換関係の真空期待値を中間状態の完全系で展開し，まず中間状態が真空であるような項は，互いに消し合うことに注意しよう．さらに，スペクトル条件を用いれば，$q \neq 0$ でかつ $(p_j+p_l)^2 < M_{jl}^2$ のとき，

$$\int\cdots\int \langle 0|\frac{\delta j_j(x_j)}{\delta\varphi_l(x_l)}|q\rangle e^{i(p_jx_j+p_lx_l)} d^4x_j d^4x_l$$

$$= (2\pi)^4\delta(p_j+p_l-q)\int\langle 0|\frac{\delta j_j(0)}{\delta\varphi_l(x)}|0\rangle e^{ip_lx}d^4x = 0 \qquad (4.3.94)$$

となる．ここに M_{jl} は，ボソン二個を含む状態 jl と同じ量子数をもつ（真空について）最も低い状態のしきい値である．

3.9. Steinmann の恒等式

24 個の関数 R_{nj} (4.3.70) と A_{nj} (4.3.71) の全部が独立であるわけではない．それらのあいだには Steinmann (1960) によって見いだされた 6 個の恒等式が成り立っている．

実際，順序を考えない対 jn の各々について，すべての実の x に対して正しい一つの恒等式

$$R_{nj}+R_{jn} = A_{kl}+A_{lk} \qquad (4.3.95)$$

がある．ここに n, j, k, l は数字 1, 2, 3, 4 の置換である．

問題 4.3.8 (4.3.95) が正しいことを確かめよ．

ヒント：A_{kl} に対し (4.3.71) の最後の等式を用い，A_{lk} に対しては終わりから二番目の等式を用いると，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} R_{nj}+R_{jn} &= A_{kl}+A_{lk} \\ &= \langle 0|i\{[j_j, \delta_k\delta_l j_n]+[j_n, \delta_k\delta_l j_j]\}+\delta_k\delta_l(\delta_j j_n+\delta_n j_j)|0\rangle. \end{aligned} \qquad (4.3.96)$$

このようにして，24 個の関数 R_{nj} および A_{kl} は，《Steinmann の四つ組》とよばれる六つのグループに分けられ，その各々に対して恒等式 (4.3.95) が成り立っている．

273 ページの図で，四つの隣りあった領域に対応する関数が，四つ組として一括されていることを特に注意しておこう．領域のそのような四つ組の各々は，直線 $q_1^0=0$，$q_2^0=0$，$q_3^0=0$ および $q_4^0=0$ によって限られ，一方，一つの四つ組 (nj) にまとめられた四つの領域を互いに分かつ内部の線は，方程式 $q_j^0+q_k^0=0=q_n^0+q_l^0$ と $q_j^0+q_l^0=0=q_n^0+q_k^0$ によって与えられる．

それぞれ円錐 $\overline{V}_{kln}$ (4.3.73) の内部に集中している 24 個の一般関数 f_{kln} を導入して，Steinmann の恒等式が成り立つようにすることができ，実際，台が

$$\mathrm{supp}\, f_{kln} \subset \overline{V}_{kln} = \{x\,|\,x_k-x_n \in \overline{V}_+,\, x_k-x_j \in \overline{V}_+,\, x_l-x_n \in \overline{V}_+\} \qquad (4.3.97)$$

である一般関数を用いて，

$$R_{nj} = f_{kln}+f_{lkn}, \qquad (4.3.98\,\mathrm{a})$$

$$A_{kl} = f_{kln}+f_{klj} \qquad (4.3.98\,\mathrm{b})$$

と書ければ，等式 (4.3.95) は自動的にみたされる．

台が（4.3.97）で与えられ（4.3.98）の関係をみたす一般関数 f_{kln} は，（この条件によって一義的には決まらないけれども）確かに存在することを次に示そう．

このために，$k<l$ に対して，

$$f_{kln}=\theta_{ln}A_{kl} \tag{4.3.99}$$

と定義しよう．ここで，

$$\theta_{ln}\equiv\theta(x_l^0-x_n^0)\theta((x_l-x_n)^2). \tag{4.3.100}$$

A_{kl} は一般関数であり，θ_{ln} は不連続関数であるから，それらの積（4.3.99）は一般に一義的には決められない．だが，われわれにとって重要なのは，（3.3.99）の形の積のうちに，（4.3.98 b）を成り立たせるようなものが，たとえ一つでも，とにかく存在するということである．この最後の条件は，実際（4.3.72 b）と（4.3.73）とによって，

$$(\theta_{ln}+\theta_{lj})A_{kl}=A_{kl} \tag{4.3.101}$$

が成り立つことで保証される．さらに，

$$f_{lkn}=R_{nj}-f_{kln}\qquad(k<l) \tag{4.3.102}$$

と置いてみよう．

問題　4.3.9　恒等式（4.3.95）を利用すれば，（4.3.99）と（4.3.102）によって，

$$A_{lk}=f_{lkn}+f_{lkj} \tag{4.3.103}$$

であることを示せ．

関数 f_{lkn} $(k<l)$ の台が $\overline{V}_{lkn}$ の内部に集中していることを示すのが，残された課題である．

定義（4.3.102）と（4.3.72）とから，明らかに，$k<l$ なら，

$$\operatorname{supp} f_{lkn}\subset\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{kln} \tag{4.3.104}$$

の関係がある．

そこで，実際に

$$C\overline{V}_{lkn}\ \text{において}\ f_{lkn}=0 \tag{4.3.105}$$

であることを示そう．ここに $C\overline{V}$ は，座標差 x_j-x_k のつくる12次元空間全体に関してとった集合 $\overline{V}$ の補集合である．

この目的のために恒等式

$$C\overline{V}_{lkn}=C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{kln})\cup C(\overline{V}_{lkn}\cup\overline{V}_{klj}\cup\overline{V}_{lkj}) \tag{4.3.106}$$

を利用しよう．

問題 4.3.10 (4.3.106) を確かめよ (ヒント：$C(A\cup B)=CA\cap CB$ に注意せよ).

(4.3.104) によれば，f_{lkn} は，(4.3.106) の右辺の二つの因子のうち最初のものにおいては0になる. (4.3.105) を確立するには，あと

$$C(\bar{V}_{lkn}\cup\bar{V}_{lkj}\cup\bar{V}_{klj}) \text{ において } f_{lkn}=0 \tag{4.3.107}$$

であることを証明しなくてはならない. そこでまず，この領域では $A_{lk}=R_{jn}=0$ であることに注意しよう. 実際，(4.3.72) に従って，

$$C(\bar{V}_{lkn}\cup\bar{V}_{lkj}\cup\bar{V}_{klj}) = C(\mathrm{supp}\, R_{jn})\cup C(\mathrm{supp}\, A_{lk}). \tag{4.3.108}$$

このことと，Steinmann の恒等式 (4.3.95) とから，領域 (4.3.108) において $A_{kl}=R_{nj}$ であることが出てくる. 他方，

$$C\bar{V}_{klj}\supset C(\bar{V}_{lkn}\cup\bar{V}_{lkj}\cup\bar{V}_{klj}) \text{ において } A_{kl}=f_{kln}.$$

ところが，そのとき (4.3.102) から (4.3.107) が導かれる. このようにして，等式 (4.3.105) が証明された.

§4. くりこまれた摂動展開を基本原理から導くこと

4.1. はじめに

等式 (4.3.29)，(4.3.30) および (4.3.33) の各々は，散乱演算子 S に対する方程式と考えることができる. 準局所的演算子 $\Lambda_{\rho\sigma}$ が与えられ，それを用いてまた，S 演算子を何らかのパラメータ g に関してベキ展開したときの第一項が与えられるならば，上の方程式から，われわれは摂動級数の全体を得ることができる. そのさいに生ずるある種の任意性は，運動量空間における S 行列要素の増え方に対して，ある〈最小の〉ベキを指定すれば取り除かれる.

このような構成法の基本的な考え方をここで述べよう. 出発点の方程式として，(4.3.30) をとろう. (4.3.30) の両辺に S を右からかけて (4.3.32) を用いると，

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\delta\varphi_\sigma(y)} = \mathrm{i}g\Lambda(\rho x,\sigma y)+\theta_{xy}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}+\theta_{yx}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \tag{4.4.1}$$

を得る. ここに，

$$\theta_{xy}=\theta(x^0-y^0),\quad g\Lambda(\rho x,\sigma y)=-\Lambda_{\rho\sigma}(x,y)S$$

である.

さて，S を g のベキ級数の形

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{i}g)^n S_n \tag{4.4.2}$$

に求めることを考えよう（ただし $g=0$ のとき $S \equiv 1$ であるとした）．そうすると，(4.4.1) は係数 S_n に対する一連の漸化式を与える．それらの最初のものは，

$$\frac{\delta^2 S_1}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)} = \Lambda(\rho x, \sigma y) \tag{4.4.3}$$

という形をもつ．この式は，準局所的演算子 Λ を何らかの局所的《ラグランジアン》

$$L = \int \sum_{n,\rho_j} L_{\rho_1 \cdots \rho_n} : \varphi_{\rho_1}(x) \cdots \varphi_{\rho_n}(x) : d^4x \tag{4.4.4}$$

の二階の汎関数的導関数と考えなければならないことを示唆している（この式で場 φ_ρ のなかには，特に，与えられた場 φ の導関数があってもよい）．

(4.3.1) によると，

$$\frac{\delta\varphi_\rho(x)}{\delta\varphi_\sigma(y)} = \delta_{\rho\sigma}\delta(x-y) \tag{4.4.5}$$

であり，このことから演算子

$$\Lambda(\rho x, \sigma y) = \frac{\delta^2 L}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)} \tag{4.4.6}$$

が準局所的であること，さらにこの場合，連立方程式 (4.4.3) が積分可能条件 ($\Lambda(\rho x, \sigma y) = \Lambda(\sigma y, \rho x)$) をみたすことが出てくる．

(4.4.3) の一般解は次の形をもつ：

$$S_1 = L + \sum_\rho \int C_\rho(x)\varphi_\rho(x)\,d^4x + A.$$

ここに A は定数，C_ρ は通常の数を値にもつ関数である（われわれは，場 $\varphi_\rho(x)$ が次の意味において演算子の完全系をつくると仮定している．すなわち，考察の途中に出てくるどの演算子も，これらの場の標準積を項とする級数の形に表わされる，とするのである）．すべての g について，等式

$$\langle 0|S|0\rangle = 1, \qquad \langle \mathbf{1}|S|0\rangle = 0 \tag{4.4.7}$$

が成り立つことを要請しよう．ここで $\langle \mathbf{1}|$ は任意の一粒子状態である．質量殻の上で g が物理的値をとるとき，(4.4.7) は安定性の条件 (4.3.10) の結果であることに注意しよう．(4.4.7) から

$$n \geqslant 1 \text{ に対し } \langle 0|S_n|0\rangle = \langle 1|S_n|0\rangle = 0 \tag{4.4.8}$$

であることが出る．ここで $n=1$ とすると，$A = C_\rho(x) = 0$ であることがわかり，

$$S_1 = L \tag{4.4.9}$$

が得られる.

さて，(4.4.1) で g^2 の係数を等しいと置き，

$$\frac{\delta^2 S_2}{\delta\varphi_\rho(x)\delta\varphi_\sigma(y)} = \theta_{xy}\frac{\delta L}{\delta\varphi_\rho(x)}\frac{\delta L}{\delta\varphi_\sigma(y)} + \theta_{yx}\frac{\delta L}{\delta\varphi_\sigma(y)}\frac{\delta L}{\delta\varphi_\rho(x)} \tag{4.4.10}$$

が得られる．このような手続きが繰り返して行なえることは明らかである．その場合，S_n は，$k \leqslant n-1$ での S_k の積分を用いて定義される．

問題 4.4.1 準局所的演算子 Λ が (4.4.6) の形をもち，L が (4.4.4) の形の局所ラグランジアンであるなら，〈時間的に順序づけられた指数関数〉

$$S = T(e^{igL}) \tag{4.4.11}$$

は形式的に，汎関数的導関数の連立方程式 (4.4.1) および付加条件 (4.4.6) をみたすことを示せ．これらの方程式の解で，上に述べた逐次近似によって得られるものは，演算子 (4.4.11) ただ一つであることを確かめよ．

このようにしてわれわれは，通常の摂動論が，少なくとも形式的には，S 行列を用いる公理論的理論形式に含まれていることを知った．しかも，摂動級数は方程式 (4.4.1), (4.4.6) と付加条件 (4.4.7) とから，実際問題としては一義的に求められる．しかしながら，このような乱暴なやり方では，当然ながらまた摂動論のよく知られた困難がすべて出てきてしまう．g の二次ですでに S 演算子の二階の汎関数的導関数 (4.4.1) の真空期待値は，厳密にいうと，よく定義されていない（その Fourier 変換が発散する）．困難の原因は方程式 (4.4.1) そのものにある．すなわち，何度も注意したように，θ-関数と，演算子を値にもつ一般関数（いまの場合でいえば $\delta S/\delta\varphi_\rho(x)\cdot S^*\cdot\delta S/\delta\varphi_\sigma(y)$）との積は，一般には定義されていないのである．

そこで，少なくとも有限次の摂動には無意味な表現が現われないように方程式 (4.4.1) にはっきりした数学的意味を与えることができるかという問題が生ずる．この問題に対する答は肯定的で，そのことはいろいろの異なったやり方で確かめられる．ここでは，Pugh その他の人びとによって提案された方法 (Pugh (1963, 1965, 1966), Rohrlich (1964), Rohrlich and Wilner (1966), Chen (1967)) を述べよう．この方法の基本的な考えは，方程式において θ-関数をある積分射影演算子で置き換えることである．摂動論に現われる交換関係の関数に対するこの演算子の作用は一義的に定められる．このようにして，各段階で有限の表現だけを扱いながら，くりこまれた摂動級数を得ることができる．この級

数が収束するかどうかという問題は，この場合にも，ラグランジアンを用いる通常の方法の場合と同様にまだ解決されていない[1]．

いま，例として二つのスカラー場 $\psi(x)$ と $\varphi(x)$ が湯川型の相互作用をしている場合を考えてみよう．この場合の相互作用ラグランジアンは，

$$gL = g\int : \psi^2(x)\varphi(x) : d^4x \tag{4.4.12}$$

という形をしている．ここでは，摂動論の二次だけを詳細に検討する．

摂動級数を用いるのはこの章においてだけで，あとの章では，われわれは再び場の量子論の一般原理だけから出発して議論を行なうということを特に断っておこう．ここで摂動級数を研究する目的は，ただ，S 行列を用いる公理論的理論形式と通常の Lagrange 形式のあいだの対応をつけるためである．それに，このような研究は，述べられた理論形式の現実的内容に関して，いっそう直観的なイメージを与える．たとえば，この直観的レベルの話に限っても，上に述べたような公式 (4.4.11) の形式的な導き方を通じて，そもそもの出発点で $\Lambda(\rho x, \sigma y)$ のような形の準局所的演算子を導入しなければならない積極的必然性が理解できる．実際，もし $\Lambda=0$ だったら，$S\equiv 1$ を得ることになる．このことに関連して，方程式 (4.4.1)，(4.4.6) は最も一般的なものではないことに注意しよう．$g\Lambda(\rho x, \sigma y)$ の代わりに，次のような級数を用いることもできる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^n \Lambda_n(\rho x, \sigma y). \tag{4.4.13}$$

別の言葉でいえば，新しい準局所的演算子は，摂動論の第一次に現われるだけでなく，そのすべての次数において現われうる．その際に生ずる不定性は，運動量空間において Green 関数に適当な境界条件を課することによって除去できる．方程式 (4.4.1) にこのような一般的な準局所的項を考えることは，4.4 節において必要になる．

4.2. 摂動の二次における自己エネルギーの発散の性質

ここでわれわれは，場 ψ に対する二点の因果的 Green 関数を摂動の二次で調べよう．なお，ψ とはラグランジアン (4.4.12) に出てくるもののことである．この近似における問題の Green 関数は，

---

[1] 形状因子をもつモデルには，摂動級数が有限の収束半径で収束する例——Frank (1962)[*] もあるし，級数が発散する例——Jaffe (1965) もある（なお，Reiss (1962) を見よ．この論文には，摂動級数の収束（または発散）に関連したそれ以前の仕事が多数引用されている）．

[*] 上に引用されている Frank の論文は中間子が反跳のない核子と相互作用する場合の研究であるが，反跳も入れた場合の収束が Y. Kato (1961) によって証明されている．

$$(2\pi)^4 \mathrm{i}\, G^c_{(2)}(p)\,\delta(p+q) = \iint \langle 0|\frac{\delta^2 S_2}{\delta\phi(x)\,\delta\phi(y)}|0\rangle e^{\mathrm{i}(px+qy)}\, d^4x d^4y \qquad (4.4.14)$$

であるが，これを通常の θ-関数を用いた表現（4.4.10）から出発して調べてみることにしよう．そうして積分（4.4.10）の発散が，実際に，不連続な θ-関数を一般関数にかけたことから生じていることを示し，$G^c_{(2)}$ から発散を除いた，いわゆる正則化した Green 関数の表現を通常の方法によって見いだすことにしよう．次の節では，まったく同じ最終結果が，方程式（4.4.1）における θ-関数を適当な積分演算子で置き換えることによっても得られることを示す．このとき，置き換えのあとでは，計算のどの段階においても，発散は現われない．

（4.4.1），（4.4.10）および（4.4.12）から

$$\frac{\delta^2 S_2}{\delta\phi(x)\,\delta\phi(y)}$$
$$= \theta_{xy} : \phi(x)\varphi(x) :: \phi(y)\varphi(y) : + \theta_{yx} : \phi(y)\varphi(y) :: \phi(x)\varphi(x) : \qquad (4.4.15)$$

が得られる．場 ϕ と φ は相互に可換であるとし，また，それぞれ質量が M および m の自由スカラー場の性質をもつと仮定する．すなわち，

$$(\Box + M^2)\phi(x) = (\Box + m^2)\varphi(x) = 0. \qquad (4.4.16)$$

これを用いて，（4.4.14）を次の形に変形することは困難ではない：

$$G^c_{(2)}(p)$$
$$= -\mathrm{i}\int [\theta(x^0)\, D^{(-)}_M(x)\, D^{(-)}_m(x) + \theta(-x^0)\, D^{(-)}_M(-x)\, D^{(-)}_m(-x)] e^{\mathrm{i}px}\, d^4x. \qquad (4.4.17)$$

ここに関数 $D^{(-)}$ は，公式（3.A.4）によって定義されている．（4.4.17）の積分を実行するときには，積の Fourier 変換は各因子の Fourier 変換のたたみこみであるという事実を利用することにしよう．

まずはじめに積 $D^{(-)}_M(x)\, D^{(-)}_m(x)$ の Fourier 変換を求めよう．因子の各々は $x^2=0$ で特異性をもっているが，積およびその Fourier 変換は，$\mathcal{S}^*$ に属する一般関数として存在することを示そう．このことは，同一の錐体のなかに台をもつ二つの一般関数のたたみこみはいつでも存在するという一般的事実の特別な場合である．

（3.A.4）を用いると，

$$F_{Mm}(k) \equiv -\int D^{(-)}_M(x)\, D^{(-)}_m(x)\, e^{\mathrm{i}kx} d^4x$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint \theta(-p^0)\,\delta(p^2 - M^2)\,\theta(-q^0)\,\delta(q^2 - m^2)\,\delta(p+q+k)\, d^4p d^4q \qquad (4.4.18)$$

を得る．

問題　4.4.2　関数 $F_{Mm}(k)$ (4.4.18) は，領域 $k^0 \geqq \sqrt{(M+m)^2+\boldsymbol{k}^2}$ の外部では0であること，従って，

$$F_{Mm}(k) = \theta(k^0)\theta(k^2-(M+m)^2)F_{Mm}(k) \tag{4.4.19}$$

であることを示せ．

（ヒント：公式 (4.4.18) のなかの四元ベクトル k は，それぞれ双曲面 V_M^+ および V_m^+ にのっているベクトル $-p$ と $-q$ の和であるということを利用せよ）．

$F_{Mm}(k)$ (4.4.18) を実際に計算するために，四次元の δ-関数 $\delta(p+q+k)$ を用いて p に関する積分を取り除き，q^0 軸を時間的ベクトル k の方向に選んで，さらに新しい変数 q^2, ω および $\boldsymbol{n}$ を導入しよう：

$$q^0 = -\omega, \qquad \boldsymbol{q} = \sqrt{\omega^2-q^2}\,\boldsymbol{n}.$$

ただし $\boldsymbol{n}^2 = 1$ とする．q^2 に関する積分，および三次元の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を定義している角度に関する積分を行なうと，

$$F_{Mm}(k) = \frac{\theta(k^0)\theta(k^2-(M+m)^2)}{2\pi}\int_m^{k^0}\sqrt{\omega^2-m^2}\,\delta(k^2+m^2-M^2-2\sqrt{k^2}\,\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{8\pi k^2}\theta(k^0)\theta(k^2-(M+m)^2)\sqrt{[k^2-(M+m)^2][k^2-(M-m)^2]}\,. \tag{4.4.20}$$

ここで，公式

$$\mathrm{i}\theta(x^0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}Ex^0}}{E-\mathrm{i}0}dE$$

を考慮すれば，(4.4.17) で与えられる Green 関数に対して，

$$(2\pi)^5G_{(2)}^c(p)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}dE\int d^4k\int d^4x\,\frac{e^{\mathrm{i}px}}{E-\mathrm{i}0}F_{Mm}(k)\,[e^{\mathrm{i}(Ex^0-kx)}+e^{-\mathrm{i}(Ex^0-kx)}] \tag{4.4.21}$$

という表現を得る．さらに，(4.4.20) によれば，

$$F_{Mm}(k) = [1+\varepsilon(k^0)]\theta(k^2-(M+m)^2)F(k^2) \tag{4.4.22}$$

であることに注意しよう．ここで

$$F(z) = \frac{\sqrt{[z-(M+m)^2]\,[z-(M-m)^2]}}{16\pi z} \tag{4.4.23}$$

である．(4.4.21) の積分を完遂するために，次の補題を利用しよう．

[補題 4.4.1]　$k^2 < 0$ のとき $F_1(k^2) = 0$ であれば公式

$$\frac{1}{(2\pi)^5}\int\cdots\int\frac{\varepsilon(k^0)F_1(k^2)+F_2(k^2)}{E-\mathrm{i}0}e^{\mathrm{i}px}2\cos(Ex^0-kx)\,dEd^4kd^4x$$

$$= \mathrm{i}F_2(p^2)+\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{F_1(\lambda)}{\lambda-p^2}d\lambda \tag{4.4.24}$$

が成り立つ．ここに $\mathcal{P}$ は積分の主値を表わす記号である．

証明. cos を次の公式に従って分解しよう．

$$2\cos(Ex^0-kx) = e^{i(Ex^0-kx)}+e^{-i(Ex^0-kx)}.$$

そして，(4.4.24) の左辺を二つの積分に分け，二番目の積分では変数を $k\to -k$, $E\to -E$ のように置き換える．公式

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{E-i0}-\frac{1}{E+i0}\right) = i\delta(E),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E-i0}+\frac{1}{E+i0}\right) = \mathcal{P}\frac{1}{E}$$

を用い，$k^2=\lambda$ と置けば，容易に (4.4.24) に達する．

この補題を公式 (4.4.21) に適用すれば，

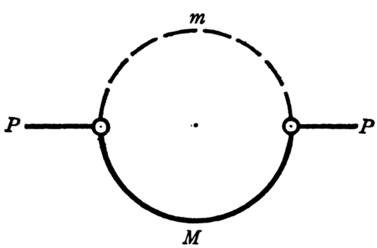
$$G^c_{(2)}(p) = i\theta(p^2-(M+m)^2)F(p^2)+\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{\lambda-p^2}d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{\lambda-p^2-i0}d\lambda \qquad (4.4.25)$$

が得られる．ここに $F(z)$ は (4.4.23) によって与えられている．

上に得られた積分（より正確にいえばその実数部分）が無限遠において対数的に発散することは当然予期されたことである．二つの $D^{(-)}$ 関数の積の Fourier 変換は，(4.4.20) からわかるように，通常の（連続かつ有界な）関数であるから，困難がまさしく積 $D^{(-)}_M(x)D^{(-)}_m(x)$ を $\theta(x^0)$ に乗ずることから生じていることは明らかである．

標準的な摂動論では，積分 (4.4.25) における発散は，積分記号下にある関数からその関数の点 $p^2=M^2$ における値を引き去ることによって除かれる．これは，関数 $G^c_{(2)}(p)$ が自己エネルギー[1]のダイヤグラムに相当するものであり，そのダイヤグラムの外線には



[1] 通常の摂動論における Feynman の規則は，たとえば，文献 [4] や [6] に述べられている．図に示したダイヤグラム（線はいずれもスカラー粒子）に対する発散の除かれた表現は，文献 [50] のいわゆる Feynman のパラメータ表示で与えられる．

質量Mの粒子が対応しているからである．

発散の除かれた Green 関数は，

$$G^{c}_{(2)r}(p) = \frac{p^2-M^2}{\pi}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-M^2)(\lambda-p^2-i0)} \tag{4.4.26}$$

である．

4.3.　基礎方程式（4.4.1）の発散を除いた形

前の節では，逐次近似法を用いて方程式 (4.4.1) を解いたときに得られた解の発散が，

$$\theta_{xy}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)} \tag{4.4.27}$$

の形の項から生じていることを確かめた．こんどは，これを

$$\begin{aligned}\Theta_{\rho x,\sigma y}&\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}\right)\\ &\equiv(\Box_x+m_\rho^2)(\Box_y+m_\sigma^2)\theta_{xy}\iint D^{\mathrm{adv}}_{m_\rho}(x-\xi)\,D^{\mathrm{ret}}_{m_\sigma}(y-\eta)\\ &\qquad\times\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(\xi)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(\eta)}d^4\xi d^4\eta\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

で置き換えても，方程式（4.4.1）は依然として有効であることを示そう．上の式で D^{ret} と D^{adv} は，それぞれ，遅延型および先発型 Green 関数 (3.A.13) である．次の 4.4 節でわれわれは，このような置き換えをすれば，計算のどの段階においても有限の量しか出てこないようなやり方で，発散の除かれた Green 関数が求められることを見るであろう．

演算子 $\Theta_{\rho x,\sigma y}$ の基本的な性質を列挙することから始めよう．

問題　4.4.3　次の恒等式が成り立つこと

$$\Theta_{\rho x,\sigma y}(\theta_{xy}F(x,y)) = \Theta_{\rho x,\sigma y}(F(x,y)) \tag{4.4.29}$$

あるいは同じことだが，

$$\Theta_{\rho x,\sigma y}(\theta_{yx}F(x,y)) = 0 \tag{4.4.29 a}$$

であることを示せ．

（ヒント：(3.A.13) によれば一般関数 D^{ret} および D^{adv} の台はそれぞれ未来および過去の光円錐のなかにあること，すなわち，

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{adv}}(x-\xi) &= \theta_{\xi x}d((x-\xi)^2)\\ D^{\mathrm{ret}}(y-\eta) &= \theta_{y\eta}d((y-\eta)^2)\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

であるということを利用せよ．ただしここで，$\lambda<0$ のとき，$d(\lambda)=\delta(\lambda)-\theta(\lambda)\ (m/2\sqrt{\lambda})J_1(m\sqrt{\lambda}) = 0$ である）．

問題　4.4.4　$\Theta_{\rho x,\sigma y}$ が射影演算子の性質をもつこと，すなわち，

$$\Theta^2_{\rho x,\sigma y} = \Theta_{\rho x,\sigma y} \tag{4.4.31}$$

また

$$\Theta_{\rho x,\sigma y}\Theta_{\sigma y,\rho x} = 0 \tag{4.4.32}$$

であることを示せ. ただし, この演算子をあまり特異性の強くない一般関数 $F(x,y)$ に作用させるものとする ($x=y$ のときの $F(x,y)$ の特異性が, $\delta(x-y)$ のたかだか一階までの導関数の程度であることを要求すれば十分である). (ヒント: (3.A.11) によれば次の関係があること

$$(\Box+m_\rho^2)D_{m_\rho}^{\mathrm{adv}}(x)=(\Box+m_\sigma^2)D_{m_\sigma}^{\mathrm{ret}}(x)=\delta(x)$$

および θ を局所可積分関数に乗ずるさいには次の等式

$$\theta_{xy}^2=\theta_{xy}, \qquad \theta_{xy}\theta_{yx}=0 \tag{4.4.33}$$

が正しいことを利用せよ).

ここで等式 (4.4.1) は意味をもつものとして, この式の両辺に次の射影演算子[1]

$$\Pi=\Theta_{\rho x,\,\sigma y}+\Theta_{\sigma y,\,\rho x} \tag{4.4.34}$$

を作用させよう.

結局, 等式 (4.4.29) を用いて,

$$\Pi\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\varphi_\sigma(y)}=\mathrm{i}g\Pi\Lambda(\rho x,\sigma y)+\Theta_{\rho x,\,\sigma y}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}\right)$$
$$+\Theta_{\sigma y,\,\rho x}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\right) \tag{4.4.35}$$

が得られる. ここで, 次の補題が必要になる.

[補題 4.4.2] $f_{n_1n_2}(x,y)$ を $x^0=y^0$ に特異性をもたない任意の関数とするとき, 次の形の任意の一般関数

$$F(x,y)=\sum_{n_1+n_2\leqslant 3}\frac{\partial^{n_1+n_2}}{(\partial x^0)^{n_1}(\partial y^0)^{n_2}}\left[\delta(x^0-y^0)f_{n_1n_2}(x,y)\right] \tag{4.4.36}$$

は方程式

$$\Theta_{\rho x,\,\sigma y}F(x,y)=\Theta_{\sigma y,\,\rho x}F(x,y)=\Pi F(x,y)=0 \tag{4.4.37}$$

を満足する.

証明. 関数 (4.4.36) が実際に方程式 (4.4.37) をみたしていることを確かめるため, (4.4.36), (4.4.30) を (4.4.28) に代入し, 部分積分を行なって ξ^0 と η^0 に関する微分を関数 D^{ret} と D^{adv} の方へ移そう. そのさいに得られる項のうち, (4.4.30) に出てくる θ-関数のたかだか一階までの微分を含むものは, (4.4.33) によって0になる. 最も高次の特異性をもった項は, 容易にわかるように, $\theta_{xy}\partial D^{\mathrm{adv}}(x^0-y^0,x_m')/\partial x^0$ の形の因子を含み, これは次の恒等式

---

[1] 等式 (4.4.31) と (4.4.32) が成り立たないような一般関数 $F(x,y)$ に作用させた場合にも, 等式 $\Pi^2=\Pi$ は正しいことが示せる (Pugh (1963) および Chen (1967) を見よ).

$$\theta(x^0)\frac{\partial}{\partial x^0}D^{\mathrm{adv}}(x)=\frac{\partial}{\partial x^0}\{\theta(x^0)D^{\mathrm{adv}}(x)\}-\delta(x^0)D^{\mathrm{adv}}(x),$$

$$\theta(x^0)D^{\mathrm{adv}}(x)=0,\quad \delta(x^0)D^{\mathrm{adv}}(x)=\delta(x^0)\delta(x^2)=0 \tag{4.4.38}$$

によってやはり0になる．上の最後の等式を得るには，$\delta(-\boldsymbol{x}^2)=\delta(\boldsymbol{x}^2)=2\pi\sqrt{\boldsymbol{x}^2}\,\delta(\boldsymbol{x})=0$ を用いた．

$n_1+n_2=4$ のときには，(4.4.37) の左辺に，$\theta_{xy}\delta(x^0-y^0)$ のようなよく定義されていない表現が現われるが，そのことを確かめるのは読者にまかせる（われわれはすでに摂動論における発散がこのような形の積に関連して現われることを確認した）．

上に証明された補題は，演算子 Θ において，すでに発散が除かれていることを示している．関数 θ_{xy} は，$x^0=y^0$ に δ-関数的な特異性をもつ一般関数にはかけられないけれども，演算子 Θ は，$\delta(x^0-y^0)$ とその三階までの導関数には作用させることができる．しかしながら，(4.4.28) の形の積分に現われるたたみこみはいつでも存在するとは限らないから，発散を除くのにいつでも θ_{xy} から，演算子 $\Theta_{\rho x,\sigma y}$ に移ればよいと考えてはならないことに注意すべきである．ここに述べた発散の除き方，つまり〈正則化〉は，いま扱っている問題にうまく合うように定義したものであり，またこの場合には実際それが適当でかつ有効な方法であることをわれわれは次の節で確かめる（演算子 $\Theta_{\rho x,\sigma y}$ が質量 m_ρ, m_σ に依存とするのは偶然ではない）．

補題4.4.2から，準局所的演算子 Λ が $\delta(x^0-y^0)$ の三階以上の導関数を含まないならば，方程式 (4.4.35) における項 $\Pi\Lambda$ は0であることがわかる．上で考察した，ラグランジアン (4.4.12) をもつモデルでは，次の演算子

$$\Lambda_{\phi\phi}(x,y)=\varphi(x)\delta(x-y) \tag{4.4.39}$$

は明らかに上の条件をみたすから，

$$\Pi\Lambda_{\phi\phi}(x,y)=0 \tag{4.4.40}$$

である．以下では，(4.4.40) が成立するような準局所的演算子だけを考えることにしよう．方程式 (4.4.35) を S 演算子の二階の汎関数的導関数について解くために，(4.4.31) および (4.4.32) によれば，

$$\Pi\Theta_{\rho x,\sigma y}=\Theta_{\rho x,\sigma y},\quad \Pi\Theta_{\sigma y,\rho x}=\Theta_{\sigma y,\rho x} \tag{4.4.41}$$

であることに注意する．そうすると，

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\delta\varphi_\sigma(y)}=\mathrm{i}g\Lambda(\rho x,\sigma y)+\Lambda'(x,y)$$

$$+\Theta_{\rho x,\sigma y}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}+\Theta_{\sigma y,\rho x}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \tag{4.4.42}$$

が得られる．ここに $\Lambda'(x,y)$ は，同次方程式

$$\Pi\Lambda'(x,y)=0 \tag{4.4.43}$$

の任意の解である．この解が g に関して（g^2 から始まる）高次の項だけを含むと仮定しよう．この項は，S 行列要素が運動量空間で最小のベキで増大することを保証する条件から決定されるであろう．Λ' の選び方の任意性は，時間に関して準局所的な (4.4.36) の形の付加項によって与えられる (Pugh (1963) を見よ)．g のベキの各次数で理論が相対論的不変でなければならないという要求は，展開係数 $\Lambda'^{(n)}$ を（時間に関してだけでなく）すべての座標に関して準局所的な演算子だけの任意性を除いて定めることを可能にする．

方程式 (4.4.42) は，S 行列に対して発散を除いた摂動級数を見いだすさいの出発点となる．それは，形式的に方程式 (4.4.1) から得られた．しかしながら，おそらく方程式 (4.4.42) だけが正確な意味をもつのであって，これに対し方程式 (4.4.1) は，少なくとも摂動論においては，意味のない発散する積分を導く．われわれは，3.4 節で方程式 (4.3.30) に達したときのように，因果性の条件 (4.3.26) から出発して直接に (4.4.42) に達することがあるいはできたかもしれない．しかしここでは，論理的観点からはあまり首尾一貫していないが〈歴史的な〉叙述の方法を採用した．なぜなら，そのようなやり方によって初めて，〈簡単で自然な〉方程式 (4.4.1) を扱う代わりになぜもっと長い方程式 (4.4.42) に移らなければならなかったか，その理由を明らかにすることができるからである．

上に述べたこと，特に条件 (4.4.40) からわかるように，$\theta\to\Theta$ の置き換えがよい結果に導くのは，準局所的演算子が $x=y$ であまり強い特異性をもたない場合だけであるということを注意しておこう．しかし，この制限は原則にかかわるようなものではない．$\Lambda(x,y)$ の特異性があらかじめ与えられている限りどんなものであっても，そのような理論の発散を除くことはできる．そのためには，Θ の代わりに次の演算子

$$\begin{aligned}&\Theta^{(n)}_{\rho x,\sigma y}(F(x,y))\\&=(\Box_x+m_\rho^2)^n(\Box_y+m_\sigma^2)^n\theta_{xy}\int D^{\mathrm{adv}}_{m_\rho}(x-\xi_1)D^{\mathrm{adv}}_{m_\rho}(\xi_1-\xi_2)\cdots\\&\quad\times D^{\mathrm{adv}}_{m_\rho}(\xi_{n-1}-\xi_n)D^{\mathrm{ret}}_{m_\sigma}(y-\eta_1)D^{\mathrm{ret}}_{m_\sigma}(\eta_1-\eta_2)\cdots\\&\quad\times D^{\mathrm{ret}}_{m_\sigma}(\eta_{n-1}-\eta_n)F(\xi_n,\eta_n)d^4\xi_1\cdots d^4\xi_n d^4\eta_1\cdots d^4\eta_n\end{aligned} \tag{4.4.44}$$

を導入すれば十分である．上の式で，n は十分大きい正の整数であるとする (Chen

(1967) を見よ)．$n=1$ のときには，特別の場合として演算子 Θ が得られることに注意しよう．

スカラー場で相互作用が場の導関数を含まないようなモデル（もっと一般には，いわゆるくりこみ可能な理論（文献 [4] を参照)）を考えるときは，$n>1$ の場合に移る必要はない．

4.4. 二つのスカラー場が相互作用している場合の方程式 (4.4.42) を逐次近似法によって解くこと

もう一度，しかし今回は方程式 (4.4.42) から出発して，ψ 場の因果的 Green 関数 G^c を摂動の二次で考えることにしよう ((4.4.14) を見よ)．$p^2\to\infty$ のとき $G^c_{(2)}(p)$ の増え方が $\ln p^2$ よりも速くはないとすると，発散の除かれた表現 (4.4.26)，(4.4.23) が求められ，しかも計算のどの段階においても完全に定義された有限の表現だけしか出てこないということを以下に示そう．

Λ が公式 (4.4.39) によって与えられ，$\Lambda'=g^2\Lambda_2(x,y)+g^3\Lambda_3+\cdots$ である場合に，(4.4.42) の g^2 の係数を比較することにより，(4.4.15) で θ_{xy} を $\Theta_{Mx,My}$ で置き換えたものが得られる．ここで演算子 Θ の添え字のなかに出てくる M は，場 ϕ に対して公式 (4.4.28) を用いるとき Klein=Gordon 演算子として質量 M のものを用いなければならないことを示している．次いで，(4.4.42) を (4.4.14) に代入すると

$$
\begin{aligned}
G^c_{(2)}(p)\delta(p+q) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int\cdots\int \Lambda_2^{(0)}(x,y)e^{i(px+qy)}d^4x d^4y \\
&-\frac{i}{(2\pi)^4}\int\cdots\int e^{i(px+qy)}(\Box_x+M^2)(\Box_y+M^2) \\
&\times\{\theta_{xy}D_M^{\mathrm{adv}}(x-\xi)D_M^{\mathrm{ret}}(y-\eta)D_M^{(-)}(\xi-\eta)D_m^{(-)}(\xi-\eta) \\
&+\theta_{yx}D_M^{\mathrm{adv}}(y-\eta)D_M^{\mathrm{ret}}(x-\xi)D_M^{(-)}(\eta-\xi)D_m^{(-)}(\eta-\xi)D\}\,d^4\xi d^4\eta d^4x d^4y
\end{aligned}
\tag{4.4.45}
$$

を得る．ここに

$$
\Lambda_2^{(0)}(x,y)=\langle 0|\Lambda(x,y)|0\rangle = K(x)\delta(x-y) \tag{4.4.46}
$$

であり，K は x に関する線形微分演算子である．

(4.4.18) と (4.4.22) を用いて，ξ と η に関する積分は，

$$
\begin{aligned}
I(x-y) &\equiv -\int\cdots\int D_M^{\mathrm{adv}}(x-\xi)D_M^{\mathrm{ret}}(y-\eta)D_M^{(-)}(\xi-\eta)D_m^{(-)}(\xi-\eta)\,d^4\xi d^4\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(y-x)}(1+\varepsilon(k^0))\frac{\theta(k^2-(M+m)^2)}{(M^2-k^2)^2}F(k^2)\,d^4k
\end{aligned}
\tag{4.4.47}
$$

となる．ここに $F(z)$ は表現 (4.4.23) によって与えられている．

さらに，補題4.4.1と公式（4.4.25）を用いると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(\theta_{xy}I(x-y)+\theta_{yx}I(y-x))\\
&=\frac{1}{(2\pi)^5}\int\cdots\int\frac{2\cos[k(y-x)+E(x^0-y^0)]}{E-\mathrm{i}0}(1+\varepsilon(k^0))\\
&\quad\times\frac{\theta(k^2-(M+m)^2)}{(M^2-k^2)^2}F(k^2)d^4kdE\\
&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-\mathrm{i}k(x-y)}\mathcal{F}(k^2)d^4k.
\end{aligned}\tag{4.4.48}$$

ここに，

$$\mathcal{F}(k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)d\lambda}{(M^2-\lambda)^2(\lambda-p^2-\mathrm{i}0)}.\tag{4.4.49}$$

この表現を（4.4.45）に代入すると，

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{c}}_{(2)}(p)\,\delta(p+q)&=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\cdots\int e^{\mathrm{i}[px+qy-k(x-y)]}(M^2-k^2)^2\mathcal{F}(k^2)d^4xd^4yd^4k\\
&\quad+\frac{1}{(2\pi)^4}\int K(x)e^{\mathrm{i}(p+q)x}d^4x\\
&=(M^2-p^2)^2\mathcal{F}(p^2)\delta(p+q)+\frac{1}{(2\pi)^4}\int K(x)e^{\mathrm{i}(p+q)x}d^4x
\end{aligned}\tag{4.4.50}$$

を得る．(4.4.50)の右辺の第一項は $p^2\to\infty$ のとき p^2 のように増大する．この増大を打ち消すためには，

$$K=-C(M,m)(M^2+\Box_x)\tag{4.4.51}$$

にとらなければならない．ただし，

$$C(M,m)=\frac{1}{\pi}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{(M^2-\lambda)^2}d\lambda.\tag{4.4.52}$$

そのとき，(4.4.50) の第二項は，

$$C(M,m)(p^2-M^2)\delta(p+q)$$

という形になり，結局，$G^{\mathrm{c}}_{(2)}$ に対しては次の表現が得られることになる：

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{c}}_{(2)}(p)&=\frac{M^2-p^2}{\pi}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{M^2-p^2-(\lambda-p^2)}{\lambda-p^2-\mathrm{i}0}\cdot\frac{F(\lambda)}{(M^2-\lambda)^2}d\lambda\\
&=\frac{M^2-p^2}{\pi}\int_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{F(\lambda)d\lambda}{(M^2-\lambda)(\lambda-p^2-\mathrm{i}0)}.
\end{aligned}\tag{4.4.53}$$

これは実際に，発散の除かれた表現（4.4.26）と一致している．

上の計算は，公式（4.4.28）で定義された演算子の Θ-関数が，g について一次の準局所項（4.4.39）をもつ理論の場合，摂動論の積分に必要以上に強い収束性を与えるという

ことを示している．その結果，Green 関数は p^2 に比例して増大することになり，この増大を $(\Box+M^2)\delta(x-y)$ の形の g について二次の準局所項によって打ち消さなければならなかった．そこで，上で調べた例の場合，第二の準局所項を必要としないようなもっと経済的なやり方で，θ-関数の発散を除くことはできないだろうかという問題が生ずる．この問題に対する答は肯定的である．いま考えているこの特別の場合には，(4.4.28) の代わりに，

$$\Theta^M_{xy}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}\right)$$
$$=(\Box_x+M^2)\theta_{xy}\int D^{\mathrm{adv}}_M(x-\xi)\frac{\delta S}{\delta\phi(\xi)}S^*\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}d^4\xi \qquad (4.4.54)$$

によって演算子 Θ^M_{xy} を定義すればよい．

この定義は，一見，変数 x と y に関して非対称であるように見える．実際には，われわれが扱う関数のクラスに対して，上の定義は対称である．

問題　4.4.5　関数 $F(x)$ の Fourier 変換 $\tilde{F}(k)$ が双曲面 $k^2=M^2$ の上で0になるものとする（もし $\tilde{F}(k)$ がこの双曲面の近傍で通常の滑らかな関数であれば，その関数が面上に一次のゼロ点をもつことを要求するだけで十分である）．このとき，

$$(\Box_x+M^2)\theta_{xy}\int D^{\mathrm{adv}}_M(x-\xi)F(\xi-y)d^4\xi$$
$$=(\Box_y+M^2)\theta_{xy}\int D^{\mathrm{ret}}_M(y-\eta)F(x-\eta)d^4\eta \qquad (4.4.55)$$

が成り立つことを示せ（ヒント：積分記号下の関数の Fourier 変換をつくり，積の微分に関する公式を用いよ）．

問題　4.4.6　次の方程式

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}=\mathrm{i}g\delta(x,y)+\Theta^M_{xy}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}S^*\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}\right)+\Theta^M_{xy}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}S^*\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right) \qquad (4.4.56)$$

を逐次近似法によって解くと，摂動の二次で，くりこまれた Green 関数 (4.4.53) が得られることを示せ．

文 献 案 内

§1．この節の主要な結果は，Ruelle (1962) の基礎的な仕事において得られたものである．この論文では，Haag (1957, 1958, 1959) のいくつかの予想が証明され，彼の思想の厳密な数学的基礎づけがなされた（なお，Brenig and Haag (1959) の概観的な論文を参照せよ）．本文では，漸近場と直接に結びつく一種類のスカラー場に対して単純化した叙述を行なったが，これは Jost [3] と Hepp (1963 b) からの再録である．補題 4.1.1 の証明（1.3 節）は Jost (1966) のものである．定理 4.4.1 の後半（漸近状態が座標系のとり方によらないこと）に対する Ruelle の最初の証明は，Streater (1967) によって補足された．

§2．序論において注意したように，Lehmann，Symanzik and Zimmermann (1955, 1957) の研究は，最初 Wightman や Bogoliubov の研究とならんでそれと独立な流れとして生じた．同様の思想は，Nishijima (1957, 1958, 1960) の論文でも展開されている．これらの研究において重要な役割を演じている公式 (4.2.6) は，最初は Yang and Feldman (1950) および Källén (1950) によって書かれた．これらの著者たちは，この公式を，Heisenberg の運動方程式を積分することによって得た．Heisenberg 場の T 積の真空期待値は，Zimmermann (1954) によって研究された．T 積や遅延型関数と Wightman 関数との関係は Steinmann (1960, 1963 a, b) の論文で検討されている．漸近条件および LSZ の漸化公式と Wightman の定式化との関係は，Hepp (1965 a, b, c) によって研究された．その結果は，概観的に，2.2 節と 2.3 節に述べられている．Hepp (1994 a) によってまた，二点間の距離がいずれも空間的であるとき S 行列がクラスターに分解されるという性質が証明された．われわれは，この理論形式で束縛状態を扱う問題には触れなかった．この問題は，Nishijima (1958)，Baumann (1958) および Zimmermann (1958) の論文で論じられている．Zimmermann は，スピン 0 の任意の束縛状態が局所的なスカラー場によって記述できることを示した．本文で触れなかったもう一つの問題は，Heisenberg 場の交換関係と対応する漸近場の交換関係の関連に関するものである．Zimmermann (1958)，Kaschluhn (1959, 1960) および Redmond and Uretski (1960) の論文で，もし Heisenberg 場 $\varphi(x)$ が同時刻の（右辺に $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ をもつ）正準交換関係をみたすならば，場 $\varphi^{\mathrm{ex}}(x)$ は自由場の交換関係をみたすことが示された．

§3．Heisenberg (1943) によって提案された，相対論的場の量子論に対する S 行列の方法は，ある意味において公理論的方法の先駆であり，公理論的方法の出発点ともいえるものであった．しかしながら，この方法によって S 行列要素間の定まった関係が得られたのは，古典的場に関する汎関数的微分の概念が理論に導入され (Bogoliubov (1952) および Bogoliubov の概観的論文 (1958))，これを用いて微視的因果性の条件が定式化できて後であった (Bogoliubov (1955)，Bogoliubov and Shirkov (1955) および文献 [4]；それ以前にも因果性の条件は Stueckelberg and Rivier (1950) および Stueckelberg (1951) の論文で考察されたが，最終的な定式化は得られなかった．なお文献 [48] を見よ)．因果性とスペクトル条件の両方を用いることによって，π 中間子-核子の弾性散乱に対する分散公式の証明が可能になった (Bogoliubov (1956) [1])．分散公式の方法は，Medvedev and Polivanov (1961, 1964, 1967 a, b)，Medvedev (1961)，Medvedev et al. (1967 a ～ e) の論文において一層の発展を見た．この方法と LSZ 理論との関係は，Fainberg (1961)，Sukhanov (1965, 1966) および Medvedev et al. (1967 a, c, e) において論じられた．その後の研究においてはまた，本文では触れなかったが，BMP の基本仮定が LSZ のそれと同値であるために準局所的演算子に含まれる微分の階数は最高いくつまで許されるかという問題が考察されている (LSZ 理論における微分の許容階数については，また Pugh (1963) を参照せよ)．カレントの行列要素を知って，理論がどの程度まで再構成できるかという問題は，自由場の理論について Langerholc and Schroer (1967) によって論じられた (なお，Araki et al. (1961) を参照せよ)．微視的因果性と両立する一般関数のクラスの選び方に関しては，Meiman (1964)，Logunov et. al. (1964, 1966)，Jaffe(1967)，Khoruzhii (1967)，Efimov (1968) を見よ．Khoruzhii の論文における分析は解析的汎関数の台の概念に基礎をおいているが，これは Gelfand and Shilov (1953) および Martineau (1963) によって導入されたものである (なお，Kimelsen (1966) を見よ)．われわれが 3.6 節および 3.7 節で用いた演算子 $D\varphi$ が，初めて導入されたのも，上の文献においてである．遅延型および先発型関数の 32 個の境界面によって定められる四点 Green 関数の解析性は，LSZ の理論形式では Bros et al. (1964) によって研究された (なお，Bros の講義 (1965) を見よ)．この分析で用いられている多変数複素解析関数の方法に関しては [24] および Wightman (1960 c) を参照せよ．遅延型および先発型 Green 関数のあいだの四項恒等式は Steinmann (1960) によって研究された．n 点の Green 関数の場合，これらの

恒等式に対する簡潔な定式化が Ruelle (1961) によって与えられた.

§4. 因果性の条件およびユニタリ条件を表わす基礎方程式の発散を含まない形は，Pugh (1963, 1965, 1966), Rohrlich (1964) および Rohrlich and Wilner (1966) による (なお，Chen et al. (1966, 1967), Rohrlich and Wray (1966) および Wray (1967) の論文を見よ．そこでは，この理論形式がさらに発展させられている). Green 関数に対する発散を含まない方程式で特にくりこまれた摂動展開を再構成できるものを見出す他の方法が，Nishijima (1960), Muraskin and Nishijima (1961), Symanzik (1960, 1963, 1966), Fried (1962), Fainberg (1964) の論文にのっている. しかしながら，上に引用した論文のどの一つも，この級数の収束については調べていない．さらに，Jaffe (1965) の論文では，切断のある $\lambda\varphi^4$ 型の相互作用ラグランジアンをもつ非相対論的モデル (自由度の数は有限) が考察されている．このモデルでは，正の結合定数 λ に対する解の存在は，楕円型偏微分方程式の一般論から導かれる (なお，Jaffe and Powers (1967) を見よ．そこでは，このモデルで体積を無限大にする極限が考察されている). 序論において注意したように，〈公理論的方程式〉のトリヴィアルでない解の存在に関する問題はこれまでのところまだ解決されていない．それゆえに，場の量子論の一般原理の一部だけがみたされているようなモデル，すなわち非相対論的なモデルや二次元モデル，切断を含んだ理論を具体的に構成することに多くの注意が向けられている (上に引用した Jaffe の論文のほかになお，Nelson (1963, 1964), また Wightman の講義と概観的な論文 (1964 b, 1967), Hepp の報告 (1967) を参照せよ).

第5章　相対論的不変性からの二，三の結果.
TCP, スピンと統計，Haag の定理

要　　約

すでに第1章において，Lorentz 不変な一般関数の一般形は相当に複雑であることを確かめた．しかし Wightman 関数は，Lorentz 不変性と同時に（スペクトル条件により）後方管状領域における解析性という性質をもっている．同様に，第4章で考察した遅延型 Green 関数は前方管状領域において解析的である．管状領域で解析的な関数に対しては Bargmann=Hall=Wightman の定理が成り立つ（1.3節）．この定理によれば，このような関数については，実固有 Lorentz 変換に関する不変性から複素固有 Lorentz 群に関する不変性が導かれる．この定理を用いると，特に，管状領域で正則な Lorentz 不変関数は，実際には，それより広い領域——いわゆる拡大管状領域 $\mathscr{T}_n$ において解析的であることが証明できる．$\mathscr{T}_n$ の実点

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \cdot\cdot\cdot, \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

は，同時には0とならない非負の数 λ_j を任意に選んだときに $(\sum \lambda_j \xi_j)^2 < 0$ となるという条件によって定義される（1.4節）．

管状領域で解析的な関数が，空間反転を含む一般 Lorentz 群に関して不変ならば，解析領域の内部でこの関数は変数ベクトルのスカラー積のみの関数である（1.5節）．

四つの軸全部の反転は，複素固有 Lorentz 群の元である．このことを使えば，Bargmann=Hall=Wightman の定理と，弱局所可換性の条件（2.2節）とから，固有 Lorentz 群に関する不変性とスペクトル条件とだけを仮定した理論の *TCP* 不変性が導かれる（2.3節）．反ユニタリな *TCP* 演算子は，局所場の同値類（Borchers 類，2.4節）の研究に応用される．Borchers 類という概念の意義は，同じ類に属する二つの場には同じ散乱行列が対応するという点にある（2.5節）．

同じ方法によって（とりわけ Bargmann=Hall=Wightman の定理によって），スピンと統計との関係を確立することができる（§3）——自分自身とは局所可換，あるいは局所反

可換のいずれかであるという性質をもつ場が与えられたとしよう．その場が，整数スピンに対応する Lorentz 群の有限次元表現に従って変換するなら，それは局所可換でなければならない．半整数スピンの有限次元表現に対応するなら，自分自身と局所反可換でなければならない (3.2節)．一連の場の集合において，さまざまな場のあいだに変則的な交換関係が存在するならば（つまり異なる Fermi 場のあいだに局所可換性が成り立つとか，異なる Bose 場のあいだや Fermi 場と Bose 場のあいだに局所可換性が成り立つならば)，このような理論の Wightman 関数は，ある付加的な対称性をもつ．このような対称性をもつ理論は，Klein 変換 (3.3節) によって，すべての場のあいだに正則な交換関係の成り立つ理論に帰着される (Klein 変換はユニタリ変換ではないが，Wightman 関数を保存する)．3.4節ではパラ統計の概念を与え，パラ統計とスピンとの関係に関する定理について証明の骨組を述べる．

Lorentz 不変な解析関数に関する諸定理は，場の量子論で普通に使われる Hamilton 形式を分析するさいにも応用される．これらの定理を用いて Haag の定理，すなわち場 $\varphi(t, x)$ が時間に依存するユニタリ変換で自由場とつながるならば，この場自身も自由場であることが証明される (4.2節)．Haag の定理は，場の量子論の Hamilton 形式が一般に意味をもつなら，正準交換関係に対して，時刻が異なるごとに互いに同値でない《奇妙な》*) 表現を使わねばならぬことを示している (4.3節)．

Haag の定理の場合と同じような方法で，《やぶれた対称性》(たとえば空間反転) は時間に依存するユニタリ変換を用いては記述できないことが証明される (4.4節)．

§ 1. 管状領域で解析的な Lorentz 共変関数

1.1. はじめに

Wightman の一般関数 $w_{r}(x_1, \cdots, x_n)$ は，前にも見たとおり（定理3.2.2）微視的因果性の条件によって，後方管状領域 T_{n-1}^{-}（すなわち $\mathrm{Im}\,\zeta_k \in V^-$）において解析的な普通の関数 ($\xi_k = x_k - x_{k+1}$ の関数) の極限値となる．同じくこの微視的因果性の条件によって，遅延型の n 粒子 Green 関数の Fourier 変換は前方管状領域 T_{n-1}^{+} において解析的である (第4章3.7節)．ところが一方では，これらの関数はともに《共変》である，すなわち Lorentz 群のある有限次元表現に従って変換する (特にスカラー場の理論では不変である)．解析性と共変性とを結びつけることによって，これら二つの性質についてさ

---

*) Strange representation. Fock 表現でない表現の意味.

らに進んだ知識を得る可能性が明らかとなってきた．すなわち T_n^+ における解析性と固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ に関する共変性とから，複素 Lorentz 群 $\mathcal{L}_+$ に関する共変性といっそう広い領域 $\mathcal{T}_n$ における解析性とが導かれる（$\mathcal{T}_n$ は拡大管状領域といい，$\mathcal{L}_+$ からとったすべての変換を T_n^+ にほどこして得られる）．この定理は Bargmann, Hall および Wightman によるものであるが，*TCP* 定理やスピンと統計との関係を与える定理を導くさいの基礎をなしている．これらの定理の話は §2 以降にでてくることになろう．Bargmann=Hall=Wightman の定理の証明は 1.3 節で行なう．そのまえに 1.2 節で複素 Lorentz 群のいくつかの性質を述べる．

1.4 節では拡大管状領域の実点（いわゆる《Jost 点》）について説明する．

また 1.5 節では Hall=Wightman の定理の証明をその骨組だけ述べる．この定理の内容は，四元ベクトルを変数とする任意の関数が，もし順次 Lorentz 変換で不変，かつ管状領域 T_n^+ において解析的ならば，変数ベクトルのスカラー積にのみ依存するということである．

1.2. 複素 Lorentz 変換の標準形

複素 Lorentz 変換の群 $\mathcal{L}$ は，四次元の複素空間 C_4 における双一次形式

$$zw = z^0w^0 - z^jw^j = g_{\mu\nu}z^\mu w^\nu \tag{5.1.1}$$

を不変にするような線形・斉次の変換の全体として定義される（この節では添え字 j が二度でてきたら 1 から 3 まで和をとるものと約束する）．

言いかえると，$\mathcal{L}$ とは擬直交性の条件 (2.2.5)，すなわち

$$\Lambda^T G\Lambda = G \tag{5.1.2}$$

をみたす 4 行 4 列の複素行列の群である．ここで G は Minkowski 空間の計量テンソルである．

複素 Lorentz 群は複素直交群 $O(4, C)$ と同形であることを注意しておく．なぜならば，新しい座標 $z'^0 = z^0$, $z'^j = iz^j$ を導入することによって（座標 z^μ は複素数であり，新しい座標は旧座標と同じ権利をもつ），(5.1.1) の《−》符号は《+》に変わり，それに応じて Minkowski 空間の計量テンソル $G = (g_{\mu\nu})$ は単位テンソル $\delta_{\mu\nu}$ に変わるからである．しかし，われわれは (5.1.1)，(5.1.2) 式が成り立つような基底を使ってゆくことにしよう．そうした方が実 Minkowski 空間，従って実 Lorentz 群への移行がはるかに自然に見てとれるからである．

まず等式 (5.1.2) の両辺の行列式をとれば（実 Lorentz 変換の場合とまったく同じだ

が)，$\Lambda \in \mathcal{L}$ に対し

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \tag{5.1.3}$$

の成り立つことが知られる．

このことから複素 Lorentz 群は二つの成分——$\mathcal{L}_+$ $(\det \Lambda = 1)$ と $\mathcal{L}_-$ $(\det \Lambda = -1)$ に分解される．実変換の場合とは違って，今度は成分 $\mathcal{L}_+$ がすでに $\mathcal{L}$ の連結部分群となっている．というのは複素空間 C_4 においては，連続な回転によって四つの座標全部の符号を変えることができるからである．実際，行列

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & i\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ i\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.1.4}$$

は $\mathcal{L}_+$ 群に属し，パラメータ α に連続的に依存していながら

$$\Lambda(0) = \mathbf{1}, \qquad \Lambda(\pi) = -\mathbf{1} \tag{5.1.5}$$

となる．

まえに（第2章2.2節で）$\mathcal{L}_+$ は複素 Lorentz スピノル群 $SL(2) \otimes SL(2)$ に準同形であることを注意しておいた．この群の元は2行2列の複素ユニモジュラ行列の組 (A, B) である（ただし $\det A = \det B = 1$）．対応する行列 $\Lambda \in \mathcal{L}_+$ の行列要素は公式 (2.2.15 a)，すなわち

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu A \sigma_\nu B^T) \tag{5.1.6}$$

を使って A と B で表わされる．

今後，群 $SL(2) \otimes SL(2)$（従って $\mathcal{L}_+$）の単位元近傍のパラメータづけとして，次のような性質をもつ正則パラメータが必要となる——

1)　Λ が群 $\mathcal{L}_+$ の単位元の近傍を動くとき，パラメータ $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ は六次元複素空間の原点のある近傍を動く．

2)　実固有 Lorentz 変換 $(\Lambda \in L_+^\uparrow)$ からなる $\mathcal{L}_+$ の部分集合には実パラメータ $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ が対応する．

3)　複素 Lorentz 群の任意の有限次元表現において，表現の行列要素（とりわけ Λ^μ_ν）はパラメータ $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ の解析関数である*)．

---

*)　多変数複素関数の正則性については［一松］の第1章，［酒井］の第2章を見るとよい．

群 $SL(2)\otimes SL(2)$ の正則パラメータの例として，Cayley のパラメータをあげることができる（[26] を見よ）．それを用いると，

$$A=\frac{\sigma_0-\frac{1}{2}(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)\sigma_j}{\sigma_0+\frac{1}{2}(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)\sigma_j},\qquad B=\frac{\sigma_0-\frac{1}{2}(\alpha_j-\mathrm{i}\beta_j)\bar{\sigma}_j}{\sigma_0+\frac{1}{2}(\alpha_j-\mathrm{i}\beta_j)\bar{\sigma}_j}. \tag{5.1.7}$$

ここで $\bar{\sigma}_j=(-1)^{j+1}\sigma_j$ であり，α_j,β_j は条件

$$\sum_{j=1}^{3}(|\alpha_j|^2+|\beta_j|^2)<2 \tag{5.1.8}$$

をみたす複素パラメータである（見やすくするために $\alpha_{3+j}\equiv\beta_j$，$j=1,2,3$ とした）．

問題 5.1.1 (5.1.7) の分母の行列が正則であるようなすべての α,β に対し（特に α,β が条件 (5.1.8) をみたしているとき），等式

$$\det A=\det B=1 \tag{5.1.9}$$

が成り立つことを示せ（ヒント：$A=\underset{\sim}{a}=a^\mu\sigma_\mu$ という表示を使うとよい．ここで

$$a^0=\frac{1+\frac{1}{4}(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)}{1-\frac{1}{4}(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)},\qquad a^k=-\frac{(\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k)}{1-\frac{1}{4}(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)}$$

であり，これまでと同様，繰り返される添え字 j については 1 から 3 までの和をとる）．

問題 5.1.2 2 行 2 列の行列 $\underset{\sim}{z}$ の変換

$$\underset{\sim}{z}'=A\underset{\sim}{z}B^T \tag{5.1.10}$$

には複素固有 Lorentz 変換

$$\Lambda=\frac{\mathbf{1}-R}{\mathbf{1}+R} \tag{5.1.11}$$

が対応することを示せ．ここで A,B は (5.1.7) で与えられるもの，また $\underset{\sim}{z}=z^\mu\sigma_\mu$ であり，$\mathbf{1}$ は四次の単位行列，そして R は α_j,β_j の一次の項までとれば，

$$R_{\mu\nu}=\alpha_j(\delta_{\mu j}\delta_{\nu 0}+\delta_{\nu j}\delta_{\mu 0})+\varepsilon_{0j\mu\nu}\beta_j \tag{5.1.12}$$

である（なお R は Minkowski 空間の計量テンソル G と，ある反対称行列 $\tilde{R}$ ($\tilde{R}^T=-\tilde{R}$) を使って $R=G\tilde{R}$ と表わすことができる）．（ヒント：まず直接の計算によって，

$$\det(\mathbf{1}+R)\equiv 1-\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})^2\neq 0 \tag{5.1.13}$$

の場合に（この条件は $|\boldsymbol{\alpha}|,|\boldsymbol{\beta}|$ が十分に小さければ明らかにみたされている），変換 (5.1.11) が複素 Lorentz 群 $\mathcal{L}_+$ に属することを確かめよ．次にすべての導関数 $\partial\Lambda/\partial\alpha_j,\partial\Lambda/\partial\beta_k$ の $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=0$ における値が (5.1.6) の導関数のその点における値と一致することを確かめよ）．

《複素》Lorentz 変換に特有な諸性質を調べるには，$L_+^\uparrow$ に属する実変換によって結びつけられる二つの複素変換の違いは，本質的でないと考えたほうが便利である．そこで，二

つの複素 Lorentz 変換 Λ_1, Λ_2 は，実固有 Lorentz 変換 L_1, L_2 が存在して

$$\Lambda_1 = L_1 \Lambda_2 L_2 \qquad (L_1, L_2 \in L_+^\uparrow) \tag{5.1.14}$$

と表わされるとき，《同値》であるということにしよう．

これに応じて，$(A_i, B_i) \in SL(2) \otimes SL(2)$ $(i=1,2)$ は $C, D \in SL(2)$ によって，

$$A_1 = CA_2D, \qquad B_1 = \bar{C}B_2\bar{D} \tag{5.1.15}$$

と表わされるときに《同値》とみなすことにしよう．実際，(5.1.15) が成り立てば

$$A_1 \underset{\sim}{z} B_1^T = CA_2D\underset{\sim}{z}D^*B_2^TC^* \tag{5.1.16}$$

となるからである．

[定理 5.1.1] 任意の変換 $(A, B) \in SL(2) \otimes SL(2)$ は次の二つの標準形，すなわち

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}, \qquad B = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.17}$$

あるいは，

$$A_\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \sigma_0 \tag{5.1.18}$$

のどちらかと同値である．ただし α は任意の複素数とする．

証明． (5.1.15) で $D = \bar{B}_2^{-1}C^{-1}$ と選べば

$$A \equiv A_1 = CA_2\bar{B}_2^{-1}C^{-1}, \qquad B \equiv B_1 = \sigma_0$$

を得る．ところが線形代数のよく知られた定理（たとえば [32] の第III巻の付録を見よ）によって，行列式が1の任意の2行2列の行列は，相似変換により，Jordon の標準形 (5.1.18) あるいは (5.1.17) のいずれかに変形できる．

問題 5.1.3 標準形 (5.1.17) および (5.1.18) に対応する4行4列の行列を求めよ．

1.3. Bargmann=Hall=Wightman の定理

この節では§1の中心となる結果に話を進めよう[1]．

[定理 5.1.2] n 個の複素四元ベクトル $z_1, \cdots, z_n$ のテンソル関数 f_α は，変数の変換にさいし，固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ のある有限次元表現 $V(\Lambda)$ に従って，

$$f_\alpha(\Lambda z_1, \cdots, \Lambda z_n) = \sum_\beta V(\Lambda)_{\alpha\beta} f_\beta(z_1, \cdots, z_n) \tag{5.1.19}$$

---

[1] 定理5.1.2は Hall and Wightman (1957) において初めて公表された．

のように変換し，さらに f_α は前方管状領域

$$T_n^+ = \{z_j = x_j + \mathrm{i}y_j\,;\, y_j \in V^+, x_j \in R_4, j = 1, \cdots, n\}$$

において解析的であるとしよう．このとき，関数 f_α は拡大管状領域

$$\mathcal{T}_n = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}_+} \Lambda T_n^+ \tag{5.1.20}$$

に一意的に解析接続され，接続された関数は行列式 1 の任意の複素 Lorentz 変換（すなわち任意の $\Lambda \in \mathcal{L}_+$）に対して（5.1.19）式に従って変換する．

定理の証明に入るまえに，いくつか注釈を述べておく——

1）テンソル f_α は固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ の一価表現に従って変換されると仮定し，スピノル群 $SL(2)$ の任意の表現に従って変換されるとは仮定しなかったが，実はこれで一般性は失われていない．その理由を説明しておこう．群 $SL(2)$ の任意の有限次元既約表現 $(j/2, k/2)$（j, k は負でない整数）はテンソル

$$\xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_j \dot{\beta}_1 \cdots \dot{\beta}_k} \qquad (\alpha_i, \dot{\beta}_i = 1, 2)$$

の空間で，公式（第 2 章，4.1 節を見よ）

$$[V(A)\xi]^{\alpha_1 \cdots \alpha_j \dot{\beta}_1 \cdots \dot{\beta}_k} = A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \cdots A^{\alpha_j}_{\alpha'_j} \bar{A}^{\dot{\beta}_1}_{\dot{\beta}'_1} \cdots \bar{A}^{\dot{\beta}_k}_{\dot{\beta}'_k} \xi^{\alpha'_1 \cdots \alpha'_j \dot{\beta}'_1 \cdots \dot{\beta}'_k} \tag{5.1.21}$$

によって与えられる．ここで ξ は点のある添え字どうし，点のないものどうしでは対称である．$j+k$ が偶数の場合をスピノル群の《テンソル》表現といい，このときは（5.1.21）からわかるように $V(-A) = V(A)$ だから，$L_+^\uparrow$ の一価表現になっている．ところで関数 $f^{\alpha_1 \cdots \alpha_j \dot{\beta}_1 \cdots \dot{\beta}_k}(z_1, \cdots, z_n)$ の群 $SL(2)$ に関する共変性の条件は，

$$[V(A)f]^{\alpha_1 \cdots \alpha_j \dot{\beta}_1 \cdots \dot{\beta}_k}(z_1, \cdots, z_n) = f^{\alpha_1 \cdots \dot{\beta}_k}(\Lambda(A)z_1, \cdots, \Lambda(A)z_n) \tag{5.1.22}$$

である．ここで $V(A)$ は公式（5.1.21）によって，$\Lambda(A)$ は等式（2.2.15）によって定義されたもの．そうすると $\Lambda(-1) = \mathbf{1}$ であり，また $V(-1) = (-1)^{j+k}$ であるから，（5.1.22）に $A = -1$ を代入すれば，

$$(-1)^{j+k} f^{\alpha_1 \cdots \dot{\beta}_k}(z_1, \cdots, z_n) = f^{\alpha_1 \cdots \dot{\beta}_k}(z_1, \cdots, z_n) \tag{5.1.23}$$

となる．従って，もし $j+k$ が奇数なら $f \equiv 0$ となってしまう（f は一価関数と仮定して）．このようなわけで，既約表現への分解にさいし偶数の $j+k$ のみが出てくる表現，すなわち $L_+^\uparrow$ の一価表現を考えれば十分なのである．

2）定理 5.1.2 は前方の T_n^+ の代わりに後方管状領域 $T_n^- \equiv \{z_j = x_j + \mathrm{i}y_j\,;\, y_i \in V^-\}$ としてもそのまま成り立つ．拡大管状領域 $\mathcal{T}_n$（5.1.20）は，

$$\mathscr{T}_n = \bigcup_{\Lambda \in \mathscr{L}_+} \Lambda T_n^- \tag{5.1.24}$$

とも表わせて，(5.1.20) と (5.1.24) の右辺が実は等しいからである．それは1.2節で注意したように，群 $\mathscr{L}_+$ は T_n^+ と T_n^- を入れかえる四つの軸全部の反転を含むことによる．

3) 関数 f_α が順時 Lorentz 群 $L^\uparrow$ (空間反転を含む) のある表現に従って変換すると仮定すれば，複素群 $\mathscr{L}$ 全体に関しても共変となることが証明できる．

定理 5.1.2 の証明． 定理の条件に出てくる解析領域 T_n^+ の内部の一点 z を固定しよう．そうしておいて (5.1.19) を満足する関数 $f_\alpha(\Lambda z) \equiv f_\alpha(\Lambda z_1, \cdots, \Lambda z_n) \equiv F_\alpha(\Lambda)$ が変換 Λ の正則パラメータ $\lambda_1, \cdots, \lambda_6$ にどう依存するかを $\mathscr{L}_+$ の単位元の近傍で調べてみよう (なお (5.1.7)，(5.1.11) を見よ)．まず，λ が座標原点の十分小さな近傍にある場合には，等式 (5.1.19) の左辺も右辺もそれぞれ意味をもち，かつ解析的である．λ が実数 ($L_+^\uparrow$ に対応する) のときこれらの関数は一致し，従ってそれらは複素近傍全体で一致する (このことは，正則関数のベキ級数展開の係数が実軸に沿った微分によってすべて求められることから出てくる)．次に (5.1.19) の右辺は，$\Lambda z = (\Lambda z_1, \cdots, \Lambda z_n) \notin T_n^+$ となる場合にも意味をもつ．こうして拡大管状領域 $\mathscr{T}_n$ において関数 f_α の解析接続が定義される．定理の証明を完結するには，第一にこの拡大管状領域への解析接続が一意的であること，第二に上に得られた (群 $\mathscr{L}_+$ の単位元近傍における) 局所的性質から関数 $F_\alpha(\Lambda)$ の解析性が導かれること，つまり任意の $\Lambda \in \mathscr{L}_+$ で (5.1.19) が成り立つことを示さなければならない．

第一の論点，すなわち拡大管状領域における関数 f_α の解析接続の一意性を証明するには，点 $z \in T_n^+$ および複素 Lorentz 変換 $\Lambda \in \mathscr{L}_+$ に対しても，もし Λz がはじめの定義領域 T_n^+ に属していれば，等式 (5.1.19) が依然として成り立つという命題 (この等式は定理の条件においては実変換 $\Lambda \in L_+^\uparrow$ に対してのみ仮定されている) を証明すれば十分である．その理由を述べておこう．

いま，ある $z \in \mathscr{T}_n$ に対して，T_n^+ の点 $z_{(1)}, z_{(2)}$ をその z に変換する複素 Lorentz 変換 $\Lambda_1, \Lambda_2 (\in \mathscr{L}_+)$ が存在して，

$$f_\alpha(\Lambda_1 z_{(1)}) \neq f_\alpha(\Lambda_2 z_{(2)}) \tag{5.1.25}$$

が成り立つと仮定してみよう．ただし $f_\alpha(\Lambda_i z_{(i)})$ ($i = 1, 2$) は (5.1.19) の右辺によって，

$$f_\alpha(\Lambda_i z_{(i)}) \equiv \sum_\beta V(\Lambda_i)_{\alpha\beta} f_\beta(z_{(i)}) \qquad (i = 1, 2)$$

と定義される．ところが不等関係 (5.1.25) の両辺に

$$V(\Lambda_2^{-1}) = V^{-1}(\Lambda_2)$$

をかけ，$z_{(2)} = \Lambda_2^{-1}\Lambda_1 z_{(1)}$ を使うと，

$$\sum_\beta V(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1)_{\alpha\beta} f_\beta(z_{(1)}) \neq f_\alpha(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1 z_{(1)})$$

という不等関係が得られ，これは ($z_{(1)}$ と $\Lambda_2^{-1}\Lambda_1 z_{(1)} = z_{(2)}$ はともに T_n^+ に属するから) 前提と矛盾する．

だから，上に述べた命題，すなわち z を T_n^+ の外に出さないような複素 Lorentz 変換に対して (5.1.19) が成り立つことを証明すれば十分である*)．

これを証明するために，まず任意の Λ に対して $T_n^+ \cap \Lambda^{-1}T_n^+$ は，二つの凸集合の共通集合だからやはり凸，従って連結であることに注意する．それゆえ (5.1.19) を適当な一点 z の近傍で証明すればよい**)．さらに，もし (5.1.19) がある変換 Λ_0 で成り立つならば，Λ_0 の十分小さな近傍でも成り立つ．なぜなら，Λ_0 の近傍に $\Lambda_1 = \Lambda_0\Lambda(\alpha, \beta)$ ($\Lambda(\alpha, \beta)$ は (5.1.11)，(5.1.12) で与えられるもの) によって局所座標を入れ，$\mathcal{L}_+$ の単位元近傍に対して行なったのと同じ議論を繰り返せばよいからである．そこで，定理の証明を完結するには，次のことが証明できればよい．すなわち，ある $z \in T_n^+$ に対して $\Lambda z \in T_n^+$ となるような任意の複素変換 Λ が，$\Lambda(t)z \in T_n^+$ をみたす連続曲線 $\Lambda(t)$ によって単位元と連結できること (すなわち $\Lambda(0) = \mathbf{1}$，$\Lambda(1) = \Lambda$) を証明するのが，残された課題である．

実際こういう曲線があれば，前段の議論が適用できるような近傍を有限個つないで，Λ と単位元を連結できるからである．複素変換の集合のなかに確かにこういう曲線が存在す

---

*) 次のように場合を分けて考えればよい．つまり $z \in T_n^+$，$\Lambda z \in \mathcal{T}_n - T_n^+ \equiv \mathcal{T}'_n$ の場合には，上に述べられている作り方から (5.1.19) は満足されている．このことから $z \in \mathcal{T}'_n$ かつ $\Lambda z \in T_n$ の場合，$z \in \mathcal{T}'_n$ かつ $\Lambda z \in \mathcal{T}'_n$ の場合にも (5.1.19) の成り立つことが確かめられる．従って残っているのは上の命題，つまり $z \in T_n^+$ かつ $\Lambda z \in T_n^+$ の場合である．これをやれば定理の証明が完結する．

**) というのは，任意の Λ を一つ固定したとき，$T_n^+ \cap \Lambda^{-1} T_n^+$ の連結性から，この集合の任意の二点は集合のなかを通る連続曲線で結ばれ，一点 z の近傍で成り立つ等式 (5.1.19) を，この曲線に沿って《移動》することができるからである ($\Lambda(t)$ に関する議論と同じ)．なお補題 5.1.1 からは，Λ の近傍において (5.1.19) を満足するような点 z の存在が示される ($L_+^\uparrow$ の元については (5.1.19) が成り立つから)．$\mathcal{L}_+$ の単位元近傍を利用すれば，このことから，z の近傍と Λ に対して，(5.1.19) の成り立つことが導かれる．

るというのが次の補題の内容である．

[補題 5.1.1] $\mathcal{L}_+$ に属する Lorentz 変換 Λ で，$\Lambda T_n^+ \cap T_n^+$ が空集合でないものの全体からなる集合 B は連結である．

証明. $L_+^\uparrow$ からとった固有 Lorentz 変換に対する T_n^+ の不変性から，もし $\Lambda \in B$ なら，$L_1, L_2 \in L_+^\uparrow$ として，$L_1 \Lambda L_2 \in B$ が導かれる．従って，B は $\mathcal{L}_+$ の元の $L_+^\uparrow$ に関する同値類の集合である．それゆえ，前に定理 5.1.1 で定義した標準形の変換について補題 5.1.1 が正しいことを示せば十分である．まず (5.1.18) で符号がマイナスの場合は直ちに除外しなければならない．なぜなら変換

$$\underset{\sim}{z} \to \underset{\sim}{z}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{z} = \begin{pmatrix} -z^0 - z^3 + z^1 + \mathrm{i}z^2 & -z^1 + \mathrm{i}z^2 + z^0 - z^3 \\ -z^1 - \mathrm{i}z^2 & -z^0 + z^3 \end{pmatrix}$$

は前方管状領域にあるすべてのベクトルを T_n^+ の外へ出してしまうからである．これに対し (5.1.18) で符号がプラスの変換は集合 B に属する．なぜなら，この変換はたとえば T_n^+ の点

$$z_1 = \cdots = z_n = (\mathrm{i}, 0, 0, 0) \tag{5.1.26}$$

を T_n^+ のなかへ写すから．一方，この変換は，曲線

$$A_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{5.1.27}$$

を用いて，恒等変換と連続的につなげられるが，これは確かに B のなかの曲線である．実際，変換 (5.1.27) で点 (5.1.26) が T_n^+ の外へ出ないことは容易にわかる．

問題 5.1.4 (5.1.17) 型の変換 $(A(\alpha), 1)$ は，$|\mathrm{Im}\,\alpha| < \pi$ ならば，集合 B に属することを示せ（ヒント：$\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$, $|\alpha_2| < \pi$ の場合に，ベクトル $z = \{\mathrm{i}, 0, 0, \sin\alpha_2 - \theta(|\alpha_2| - \pi/2)\cot\alpha_2\}$ は $\underset{\sim}{z}' = A(\alpha)\underset{\sim}{z}$ という変換をしても，前方管状領域 T^+ にとどまること，しかし $\alpha_2 = \pm\pi$ の場合には，T^+ の任意のベクトルはその変換で T^+ の外へ出ることを確かめよ)．

問題 5.1.4 の結果から，$(A(\alpha), 1) \in B$ ならば，$(A(t\alpha), 1) \in B$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ の成り立つことが導かれる．

これで補題 5.1.1，従って定理 5.1.2 の証明が終わった．

定理 5.1.2 型の定理も，現在では，はるかに広い解析領域に対して証明されている (Minkowski et al. (1964) 参照)．

1.4. 拡大管状領域の実点

管状領域 T_n^+ は，定義から明らかなように，実点をひとつも含まない．それだけに，拡

大領域 $\mathscr{T}_n$ が，すべての n の場合に実点を含んでいることはきわめて興味ある事実である．特に，このことからもともと一般関数として定義された Wightman 関数 w が，単に管状領域で解析的な正則関数の境界値であるというだけでなく，時空変数のある実の変域においては，w 自身まで解析的であることが導かれるからである．

以上のことをまず $n=1$ という特別な場合を例として説明しよう．定義によって，任意の複素 Lorentz 変換は四元ベクトル z のスカラー積を保存するから，$z\in\mathscr{T}_1$ のとき z^2 のとりうる値の全体は，$z\in T^{\pm}$ $(\equiv T_1^{\pm})$ のとき z^2 のとりうる値全体と一致する．

問題 5.1.5 $z\in T^{\pm}$ で z^2 が実数ならば，$z^2<0$ であることを示せ（ヒント：実ベクトル x,y が直交し，ベクトル y が時間的ならば，ベクトル x は空間的であることに注意せよ）．

この問題の結果から，拡大管状領域 $\mathscr{T}_1$ が実点を含むなら，それは空間的ベクトルに限られることが導かれる．一方，任意の空間的実ベクトル ξ は拡大管状領域 $\mathscr{T}_1$ に属することが容易にわかる．

実際，実座標系を適当に選んで，任意の空間的ベクトル ξ を $\xi=(0,0,0,a), a>0$ の形にできるが，このベクトルは $\mathscr{L}_+$ からとった複素 Lorentz 変換 Λ によって，前方管状領域のベクトル $\zeta=(\mathrm{i}a,0,0,0)$ と結びつけられる．すなわち $\xi=\Lambda\zeta$ で，ここに

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\mathrm{i}&0&0&0\end{pmatrix} \tag{5.1.28}$$

である．

n が任意である一般の場合に，Jost (1957) は，拡大管状領域の実点の次のような特徴づけを与えた——

［定理 5.1.3］ 実点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ が拡大管状領域 $\mathscr{T}_n$ に属するためには，同時に 0 とはならない非負の数 λ_j を任意に選んだときに，ベクトル

$$\rho=\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n \tag{5.1.29}$$

が空間的となることが必要かつ十分である[1]．

証明． a)《必要条件》$(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathscr{T}_n$ とする．$\mathscr{T}_n$ の定義から前方管状領域の

---

[1] 固定した $\xi_1,\cdots,\xi_n$ とすべての $\lambda_j\geqslant 0$，$\sum\lambda_j>0$ に対して，(5.1.29) の形のベクトル全体がつくる集合は四次元空間の《凸錐体》をなす．われわれはベクトル $\xi_1,\cdots,\xi_n$ の張るこの錐体を $K(\xi)\equiv K(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ という記号で表わそう．

点 $(z_1, \cdots, z_n) \in T_n^+$ で，$\xi_j = \Lambda z_j\ (j=1, \cdots, n),\ \Lambda \in \mathcal{L}_+$ と書けるものが存在する．そのとき，同時に0とはならない非負の数 λ_j を任意に選んでも

$$z = x + \mathrm{i}y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \in T^+$$

であるが，

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = \rho^2.$$

すなわち，ρ^2 は仮定により実数だから $xy = 0$．このことと問題5.1.5とから $\rho^2 < 0$，すなわちベクトル (5.1.29) は空間的であることが導かれる．

b) 《十分条件》 $\rho^2 < 0$ なる実ベクトル ρ の全体を $K(\xi)$ とする．凸錐体 $K(\xi)$ の閉包と，錐体 $V^\pm$ の閉包との共通点は原点だけ，すなわち

$$\overline{K}(\xi) \cap \overline{V}^+ = \overline{K}(\xi) \cap \overline{V}^- = \{0\}$$

であるから，V^+ を K, V^- から分かつような V^+ の接平面 $\alpha x = 0$ および V^- を K, V^+ から分かつような V^- の接平面 $\beta x = 0$ が存在する．定義から $\alpha^2 = \beta^2 = 0$ が導かれる．$\alpha^0 > 0, \beta^0 < 0$ と選ぼう．すると

$$x \in V^+ \text{ ならば } \alpha x > 0; \qquad x \in K \text{ か } x \in V^- \text{ ならば } \alpha x < 0, \tag{5.1.30}$$

$$x \in V^- \text{ ならば } \beta x > 0; \qquad x \in K \text{ か } x \in V^+ \text{ ならば } \beta x < 0 \tag{5.1.31}$$

となる．

二つの等方ベクトル α, β は互いに光円錐の反対側にあり，また同一直線上にはないから，$\alpha\beta < 0$ なので，規格化の条件 $\alpha\beta = -2$ を導入しても一般性は失われない．そうすると座標系を適当に選んで

$$\alpha = (1, 0, 0, 1), \qquad \beta = (-1, 0, 0, 1)$$

とすることができる．

(5.1.30) と (5.1.31) によって $\rho \in K(\xi)$ については $\alpha\rho < 0,\ \beta\rho < 0$ であるから，この座標系においては $|\rho^0| < \rho^3$，従って $\xi_j^3 > |\xi_j^0|$ が成り立つ．そのとき，$z_j^0 = \mathrm{i}\xi_j^3$，$z_j^3 = -\mathrm{i}\xi_j^0$，$z_j^1 = z_j^2 = 0$ と置くことによって，$z_j \in T^+$，$\xi_j = \Lambda z_j$ とすることができる．ここで Λ は等式 (5.1.28) で与えられている変換である．これで定理5.1.3が証明された．

拡大管状領域の実点を普通は Jost 点とよぶ．これらの点全体を記号 J で表わすことにしよう．

1.5. 管状領域で解析的な Lorentz 不変関数の一般形

四元ベクトルを変数とする任意の Lorentz 不変な関数は，それらのベクトルのスカラー積だけに依存するという広く行き渡っている考え方は，Lorentz 不変な一般関数には適用できないことをわれわれはすでに強調した．この場合の一般形はかなり複雑である（第1章3.5節）．それだけに，Lorentz 不変なうえに解析的でもある関数なら，確かにスカラー積だけに依存するということは面白い．次にあげる Hall=Wightman の自明ならざる定理は，管状領域で解析的な関数の場合に，このことを述べたものである．

[定理 5.1.4] 関数 $f(z_1, \cdots, z_n)$ は前方管状領域 T_n^+ で解析的とし，さらに順時 Lorentz 変換のもとで不変，すなわち

$$f(\Lambda z_1, \cdots, \Lambda z_n) = f(z_1, \cdots, z_n) \qquad (\Lambda \in L^\uparrow) \tag{5.1.32}$$

とする．このとき，f はスカラー積

$$z_{jk} = (z_j z_k) \tag{5.1.33}$$

のみの関数であり，$(z_1, \cdots, z_n)$ が T_n^+ を動くときにそれに応じてスカラー積が変化してつくる多様体 M_n の上で解析的である．

定理を証明するまえに，いくつかの注釈を加えておこう――

1) 定理5.1.2の場合と同様に，定理5.1.4は前方管状領域 T_n^+ を後方管状領域で置き換えてもそのまま成り立つ．特に，スカラー積 z_{jk} の空間における領域 M_n はまったく同じである．すなわち，

$$M_n(T_n^+) = M_n(T_n^-) = M_n(\mathcal{T}_n). \tag{5.1.34}$$

2) 順時 Lorentz 群，つまり空間反転を含む群に関する不変性を仮定することは（少なくとも $n \geqslant 4$ の場合には），定理の成立にとって本質的である．実際，もし固有群 $L_+^\uparrow$ に関する不変性だけしか仮定しなかったとすると，$n \geqslant 4$ の場合，われわれは

$$\varDelta_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \begin{vmatrix} z_{i_1}^0 & \cdots & z_{i_1}^3 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ z_{i_4}^0 & \cdots & z_{i_4}^3 \end{vmatrix} \qquad (i_1 < i_2 < i_3 < i_4) \tag{5.1.35}$$

という形のギ・スカラー量を，考えに入れねばならないからである．これはベクトル z_j の成分の多項式であるが，スカラー積の関数として表わすことはできない．しかしながら，(5.1.35) の形の考えうるすべての行列式をスカラー積と一緒に不変量の仲間に入れてしまえば，T_n^+ で解析的で $L_+^\uparrow$ に関して不変な関数は，これらの不変量の解析関数であることが証明できるのである（Hepp (1963 a, b) 参照）．

3)　$n \geqslant 4$ の場合に，上の注意で問題とした不変量が，すべて独立なわけではない．実際，関数 f はベクトル $z_1, \cdots, z_n$ の $4n$ 個の複素成分に依存し，複素 Lorentz 群 $\mathcal{L}_+$（定理5.1.2により，f はこの群に関して不変となる）は，六個の複素パラメータをもつから，独立な不変量からなる変数の多様体は，一般に，$4n-6$ 次元でなければならない（この式は実際には $n \geqslant 3$，つまり，大ざっぱにいうと，ベクトルが三つあるいはそれ以上ある場合に成り立つ．というのはこの場合には，座標軸をうまく選んで，ベクトル成分のうち六個を0にできるからである）．ところが，一方で n 個のベクトルのスカラー積だけでも，その数は $n(n+1)/2$ 個あって，$n \geqslant 5$ ですでに独立なベクトル成分の数を越えている．スカラー積の多項式という形をした恒等式の完全系は簡単に求められる．それには，スカラー積 z_{ik} の行列は階数が4を越えないという事実を使う．この事実は，まず行列式が

$$d_{i_1 \cdots i_l k_1 \cdots k_l} = \begin{vmatrix} z_{i_1 k_1} & \cdots & z_{i_1 k_l} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ z_{i_l k_1} & \cdots & z_{i_l k_l} \end{vmatrix} \equiv \det z_{i_1 \cdots i_l k_1 \cdots k_l} \qquad (5.1.36)$$

となるような行列 $z_{i_1 \cdots i_l k_1 \cdots k_l}$ は，階数が4を越えない長方形の行列の積として

$$z_{i_1 \cdots i_l k_1 \cdots k_l} = \begin{pmatrix} z^0_{i_1} & z^1_{i_1} & z^2_{i_1} & z^3_{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^0_{i_l} & z^1_{i_l} & z^2_{i_l} & z^3_{i_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0_{k_1} & \cdots & z^0_{k_l} \\ -z^1_{k_1} & \cdots & -z^1_{k_l} \\ -z^2_{k_1} & \cdots & -z^2_{k_l} \\ -z^3_{k_1} & \cdots & -z^3_{k_l} \end{pmatrix} \qquad (5.1.37)$$

と表わされること，従ってこの行列には長方形行列の積の行列式に関する定理（[32] の第Ⅲ部　第1章§1.7を見よ）が適用できることから導かれる．このようにして，$n > 4$ の場合には，行列（z_{ik}）の階数 $l > 4$ の小行列式は，すべて0となる．こうして求められたスカラー積のあいだの多項式型恒等式は，すべてが互いに独立というわけではないが，完全系をなしている．一方（5.1.35）のギ・スカラー量と（5.1.36）の行列とは

$$\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Delta_{k_1 k_2 k_3 k_4} + d_{i_1 i_2 i_3 i_4 k_1 k_2 k_3 k_4} = 0 \qquad (5.1.38)$$

という形の恒等式で結びついている．

独立不変量の数は $n = 1, 2, 3$ の場合に，それぞれ 1, 3, 6 である．

4)　定理5.1.4はいろいろと一般化できる．たとえば，Hepp (1963 a, b) の結果によれば，Lorentz 共変で解析的な任意のテンソル関数は，テンソル多項式の有限個の線形結合に展開することができる．その際，展開係数はもとの関数の変数ベクトルからつくられ

る不変量の解析関数となるようにできる．

いよいよ定理の証明であるが，ここでは証明のおもな論点を列挙するにとどめ，詳しいことはすぐれた原論文 Hall and Wightman (1957) を見ていただくことにしよう．

定理 5.1.4 の証明の概要． この定理 5.1.4 の条件をみたす関数 $f(z)$ は，拡大管状領域 $\mathscr{T}_n$ に解析接続することができる．そのさい不変性の条件 (5.1.32) が任意の複素 Lorentz 変換 ($\Lambda\in\mathscr{L}$) に対して相変わらず成り立つ（これは定理 5.1.2 による．この定理の定式化につづく注釈 3）を参照されたい)．

次に $4n$ 次元空間に二つの点 $z_1,\cdots,z_n$ と $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ が与えられ，

$$z_{jk}\equiv z_jz_k=\zeta_j\zeta_k \qquad (j,k=1,\cdots,n) \tag{5.1.39}$$

をみたすとしよう．

行列 (z_{ik}) の階数が 3 または 4 の場合，あるいは $n\leqslant 2$ で行列が正則な場合には

$$\Lambda z_j=\zeta_j \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{5.1.40}$$

となるような複素 Lorentz 変換 Λ が存在する．

$n>2$ で行列 (z_{ik}) の階数が 2 の場合（あるいは $n>1$ で階数が 1 の場合）には z と ζ との関係は，一般にはこれよりも複雑になり，α_j を複素数，ω をすべての $\Lambda z_j,\zeta_j$ と直交する等方四元ベクトルとして，

$$\Lambda z_j=\zeta_j+\alpha_j\omega \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{5.1.41}$$

のように表わされる．(5.1.39) から (5.1.40) が導かれるような点 $(z_{ik})\in M_n$ に対しては，スカラー積の関数としての f の一価性がいえることは明らかである．実は (5.1.41) を使わねばならぬような例外点についても，適当な考察を補うことによって一価性を証明できるのである．

このようにして，ベクトル $(z_1,\cdots,z_n)\in T_n^+$ のスカラー積がつくる多様体 M_n 全体の上で，f は一価関数である．M_n は n 次の複素対称行列全体のつくる空間における代数的多様体と考えられる．さらにこの多様体は，階数が 4 あるいはそれ以下の複素対称行列全体の集合のなかで，開部分集合をなすことがわかる．従って M_n の複素次元は $n=1$ で 1, $n=2$ で 3, $n\geqslant 3$ で $4n-6$ である（なお注釈 3）と対比せよ)．

関数 $f(z_1,\cdots,z_n)$ の $\mathscr{T}_n$ における連続性（と解析性）から，関数

$$F((z_{ik}))=f(z_1,\cdots,z_n) \tag{5.1.42}$$

の M_n 上の連続性（と解析性）を導くには，ベクトル $z=(z_1,\cdots,z_n)$ の近傍と，それに対応する行列 (z_{ik}) の近傍との関係を調べねばならない．行列 (z_{ik}) の階数が 3 ある

いは4であるような M_n の点においては，この関係はかなり簡単である．しかし階数が2あるいは1（それぞれ n が2より大，あるいは1より大）であるような点においては，問題ははるかに厄介になる．というのは，ベクトル z の空間において，多様体 M_n の与えられた一点に写像されるベクトルの集合が極めて複雑な構造を示すからである．それにもかかわらず，M_n のすべての点で，連続性をいうのに必要とされる近傍の関係が存在することがわかっている．

$n \leqslant 4$ の場合には，M_n は $n(n+1)/2$ 次元の複素 Euclid 空間内の開集合であるから，解析性の概念は普通のままでよい．ところが $n \geqslant 5$ の場合には，M_n は $4n-6$ 次元の多様体のなかの開集合であり，その場合の解析性の概念については説明を要する．行列 $Z=(z_{jk})$ の階数が4であるような点 Z における多様体 M_n $(n \geqslant 5)$ の接ベクトル空間は $4n-6$ 次元である．M_n における Z の十分小さな近傍は，それぞれ接空間内のある近傍と相互一意的かつ解析的に対応づけられる．こういう点の近くで，関数 F (5.1.42) は，$4n-6$ 次元の Euclid 空間（接空間）の開領域で与えられていると見ることができ，解析性は普通のよく知られたやり方で定義される．困難は行列 Z の階数が4より小さい点，つまり多様体 M_n $(n \geqslant 5)$ の特異点で起こる．こういう点では接ベクトル空間の次元が $n(n+1)/2$ となり，それらの点の近傍は局所的にも Euclid 的ではない．

特異点をもつ多様体の例としては，任意の二重円錐（たとえば光円錐）をあげることができる．円錐の頂点の近傍は，どれをとっても，Euclid 空間の球と位相同形にはならない．しかしここで考えている場合は，この例よりもはるかに複雑であることを忘れてはならない．というのは，M_n の特異点は $n \geqslant 5$ のときにのみ生じ，最も簡単な $n=5$ の場合でさえ接空間の次元は実空間として $(2\times5\times6)/2=30$ で，特異点のつくる多様体自身が14もの実パラメータをもつからである．

このような特異点に対しても，解析性の概念はいろいろのやり方で拡張することができる．いまの場合には $n \leqslant 4$ に対して M_n のすべての点における解析性，$n \geqslant 5$ に対しては特異でない点における解析性のほかに，特異点における連続性と有界性が証明されている．

つまり，定理の定式化のなかの〈M_n において解析的〉という言葉は，まさにこういう意味にとらねばならない．

M_n 上の解析性を証明するには，はじめに，Lorentz 不変性の結果として，関数 f がみたす微分方程式を導いておく．この方程式は，

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_{j\mu}\frac{\partial f}{\partial z_j^\nu}-z_{j\nu}\frac{\partial f}{\partial z_j^\mu}\right)=0 \qquad (5.1.43)$$

という形になる．

さらに，スカラー積が方程式 (5.1.43) の解の完全系をつくるような M_n の各点の近傍では，F はこれらのスカラー積の解析関数となることを証明しておく．そうすると，行列 (z_{jk}) の階数が可能な最大値をもつような各点で，それらのスカラー積は確かに連立方程式 (5.1.43) の解の完全系となることが確かめられる．最後に，除去可能な特異点に関する有名な定理（たとえば [51]，第8章，§9，定理5）*)を使い，多様体 M_n $(n \leqslant 4)$ において，行列 (z_{jk}) の階数が n より小さいような点でも関数 F が解析的であることが証明される．

問題 5.1.6 $n=2$ の場合に，Jost 点全体の集合は領域

$$z_1 < 0, \quad z_2 < 0, \quad z_3 < 0, \quad z_1^2+z_2^2+z_3^2 < 2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) \tag{5.1.44}$$

に写像されることを示せ．ただし，これは三個の実変数

$$z_1 = \zeta_1^2, \qquad z_2 = \zeta_2^2, \qquad z_3 = (\zeta_1+\zeta_2)^2 \tag{5.1.45}$$

の空間における領域とする．

1.6. 弾性散乱に対する共変的な振幅の一般形

定理 5.1.4 の定式化につづく注釈 4) で，この定理の一般化について触れたが，これには散乱振幅の実際面で多くの応用がある．

定理 5.1.2 や定理 5.1.4 が，二体散乱振幅に応用できる理由は，第4章 3.7 節の分析が示すように，これらの振幅が遅延型の Green 関数と結びついている点にある．この関数は Laplace 変換したとき前方管状領域で解析的になるのである．

第一の例として，スピンが 0 の粒子とスピン 1/2 の粒子の散乱の不変振幅を考えてみよう（たとえば π^+ 中間子と陽子の弾性散乱振幅）．こういうタイプの過程に対応する行列要素は，

$$\tilde{v}_{\zeta_2}(p_2)T(p_2, q_2; p_1, q_1)v_{\zeta_1}(p_1) \tag{5.1.46}$$

の形をもつ．ここで p_1, p_2 は質量 M の Fermi 粒子の始状態，終状態の運動量，q_1, q_2 は質量 m の Bose 粒子の対応する運動量である．これに対しては，

$$p_1+q_1 = p_2+q_2, \qquad p_1^2 = p_2^2 = M^2, \qquad q_1^2 = q_2^2 = m^2 \tag{5.1.47}$$

$$\hat{p}_1 v_\zeta(p_1) = M v_\zeta(p_1), \qquad \tilde{v}_\zeta(p_2)\hat{p}_2 = M\tilde{v}_\zeta(p_2) \tag{5.1.48}$$

が成り立つ（特定の弾性散乱過程だけを問題とするので，スピノル v_ζ の肩の正負の符号は特に書かない）．

---

*) ［一松］，第3章，§1，定理 3.1 を見よ．

これからもわかるように，不変振幅 T は4行4列の行列である．もし，空間反転も含めた全 Lorentz 群に属する任意の変換に関して振幅が不変であると仮定すれば（電磁的および強い相互作用の理論ではそうであるが），γ 行列の変換性を考えに入れて，T に対し次の一般形

$$T = A\mathbf{1}+B\hat{q} \tag{5.1.49}$$

が得られる．ただし $q = (q_1+q_2)/2$ で，$\mathbf{1}$ は4行4列の単位行列である．ここでわれわれは，質量殻の上では行列 $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_1-\hat{q}_2 = \hat{p}_2-\hat{p}_1$ は単位行列の定数倍であること（これは (5.1.47)，(5.1.48) からわかる），恒等式 (2.4.5) により $\hat{q}^2 = q^2\mathbf{1}$ が成り立つことを使った．

もし固有 Lorentz 変換のみに限定して，不変性を要求したとすれば，(5.1.49) にさらに二つの項

$$C\gamma^5+Di\gamma^5\hat{q} \tag{5.1.50}$$

を加えねばならなかっただろう．

一つの振幅のなかに (5.1.49) と (5.1.50) とが共存することが，《パリティの非保存》に対応している．パリティは保存するが，始状態と終状態の Fermi 粒子の相対パリティが負の非弾性散乱を問題にするなら，T は (5.1.50) のみの形になるであろう．

一般化された Hall=Wightman の定理から，(5.1.49) の A, B は反応過程の運動量のスカラー積だけに依存することが導かれる．(5.1.47) を念頭において，

$$T(p_2, q_2\,; p_1, q_1) = A(s,t)+B(s,t)\hat{q} \tag{5.1.51}$$

と書くことができる．ここで s, t は Mandelstam の変数

$$s = (p_1+q_1)^2 = (p_2+q_2)^2, \qquad t = (p_1-p_2)^2 = (q_1-q_2)^2 \tag{5.1.52}$$

である (Mandelstam (1958) 参照)．

問題 5.1.7　パリティが保存するという仮定のもとに，陽子-陽子散乱における不変振幅の一般形を求めよ．

§ 2.　局所理論の TCP 不変性と Borchers の同値類

2.1.　Wightman 関数の TCP 変換

われわれは次のような叙述方針をとることにしよう．はじめ理論が T, C, P という離散的対称性をもつことを仮定する．こういう型の対称性は，第3章4.4節で，自由スピノル場について詳しく調べた．この場合に，状態ベクトルの空間における T, C, P という演算

の表現はわかっているから，それらの積に等しい反ユニタリ演算子として TCP 演算子 Θ を定義しよう．すなわち

$$\Theta = U(I_t)U(I_c)U(I_s) \tag{5.2.1}$$

と置く．演算子 U や Θ の作用を知れば，理論を T, C, P あるいは Θ 不変にするために，Wightman 関数に対して要求しなければならない条件を見いだすことができる．§ 2 の基本的な結果は次のことである．すなわち，T, C, P 対称性の各々は，Wightman 関数になにか新しい制限を課するにもかかわらず，これらの積 Θ の保存は局所的な場の量子論の基本的諸要請からの結果であり，新しい制限を何らもちこまない．それゆえ，TCP 対称性は存在するが，個々の T, C, P に関しては不変でないような理論を考えることができる（しかも，素粒子のあらゆる型の相互作用を問題とするなら，こういう状況こそ現実に起こっていることなのだと考える実験的根拠がある．この点については，たとえば，Lee (1965, 1966)，Arbuzov and Filippov (1966)，Okun (1966) などの綜合報告や，単行本では [55] を参照されたい．これらのなかに，それ以前の原論文の引用も見い出せるだろう）．この場合には，この 2.1 節の議論は発見法的試みと考え，演算子 Θ の作用に関して得られた結果は要請とみなさねばならない．

スピン 1/2 の場の変換性から始めよう．なぜなら，これらの場の積の和として，任意の変換性をもつ演算子が表わせるからである．

公式 (5.2.1) と (3.4.56)，(3.4.57)，(3.4.58) を用いると

$$\begin{aligned} \Theta\psi(x)\Theta^{-1} &= \eta\gamma^5\psi^*(-x) = \eta\gamma^5\gamma^0\tilde{\psi}(-x), \\ \Theta\tilde{\psi}(x)\Theta^{-1} &= \bar{\eta}\gamma^5\gamma^0\psi(-x) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

が導かれる．ここで

$$\eta = \bar{\eta}_t\bar{\eta}_c\bar{\eta}_s \qquad (\eta^4 = 1)$$

である．

次に

$$\Lambda(O, x) = \tilde{\psi}(x)O\varphi(x) \tag{5.2.3}$$

という形をした双線形な組み合わせの TCP 変換に関する変換性を調べる．ここで φ と $\tilde{\psi}$ は厳密に反可換なスピノル場であり，4 行 4 列の行列 O は次のような γ 行列の組のいずれかに等しい：

$$\mathbf{1},\ \gamma^5,\ \gamma^\mu,\ \mathrm{i}\gamma^\mu\gamma^5,\ \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{5.2.4}$$

なお (5.2.4) の行列の一部に i がかけてあるのは，恒等式

$$\gamma^0 O^* \gamma^0 = O \tag{5.2.5}$$

が成り立つようにするため，すなわち行列 $\gamma^0 O$ をエルミートにするためである．ここで注意をひとつ——条件 (5.2.5) をみたす行列 (5.2.4) の全体は，エルミート形式 $\tilde{\varphi}\psi$ を保存する変換群 $U(2,2)$ の Lie 代数を生成する．また (5.2.3) ではわざと異なる場 φ と ψ をとったが，こうしておけば，単にエルミートなものだけでなく，任意の複素テンソル場の変換性が求められるからである．(5.2.2)，(5.2.5)，Θ の反ユニタリ性，場 ψ と φ の反可換性を使えば，

$$\Theta\tilde{\psi}(x)O\varphi(x)\Theta^{-1} = \tilde{\varphi}(-x)O'\psi(-x) \tag{5.2.6}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned} O' &\equiv \gamma^5 O(\gamma^5)^{-1} = -\gamma^5 O \gamma^5 = \varepsilon(O)O, \\ \varepsilon(1) &= \varepsilon(\gamma^5) = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) = 1, \\ \varepsilon(\gamma^\mu) &= \varepsilon(\mathrm{i}\gamma^\mu\gamma^5) = -1 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

である．一方でもう一度 (5.2.5) を使えば，

$$\Lambda^*(O, x) = \tilde{\varphi}(x)O\psi(x) \tag{5.2.8}$$

を得る．(5.2.6) と (5.2.8) を比べて

$$\Theta\Lambda(O, x)\Theta^{-1} = \varepsilon(O)\Lambda^*(O, -x) \tag{5.2.9}$$

という関係が求められる．ここで，$\varepsilon(O)$ は O がスカラー，ギ・スカラー，反対称テンソルに対しては $+1$ に等しく，ベクトルとギ・ベクトルに対しては -1 である．例として弱い相互作用の理論に現われる $V-A$ カレント

$$J^\mu(x) = \tilde{\psi}(x)\gamma^\mu(1+\mathrm{i}\gamma^5)\varphi(x) \tag{5.2.10}$$

を考えてみよう（たとえば [29] あるいは Lee (1965) などを参照）．空間反転に対しては (3.4.56) により

$$U(I_s)J^\mu(x)U^{-1}(I_s) = \tilde{\psi}(I_s x)g^{\mu\mu}\gamma^\mu(1-\mathrm{i}\gamma^5)\varphi(I_s x) \tag{5.2.11}$$

となる．この等式の右辺は $\mathrm{i}\gamma^5$ の前の符号が変わったため，カレント成分 J^μ およびそのエルミート共役の線形結合としては表わせない．これに対して TCP 変換では，(5.2.9) により

$$\Theta J^\mu(x)\Theta^{-1} = -J^{\mu*}(-x) \tag{5.2.12}$$

となるのである．

問題 5.2.1 CP 変換の場合にはカレント (5.2.10) が共役を含む公式

$$U(CP)J^{\mu}(x^0,\boldsymbol{x})U^{-1}(CP)=g^{\mu\mu}J^{*\mu}(x^0,-\boldsymbol{x}) \tag{5.2.13}$$

に従って変換されることを示せ.

変換則 (5.2.9) は任意のテンソル場 (あるいはギ・テンソル場) に対して, 容易に一般化される:

$$\Theta\Lambda_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\Theta^{-1}=(-1)^n\Lambda^*_{\mu_1\cdots\mu_n}(-x). \tag{5.2.14}$$

スピノルの添え字がふえた場合には, (5.2.2) に従って, $\eta\gamma^5$ がさらにかかることになる.

これまでに展開してきた理論の形式は, Lorentz 群の《実表現》, すなわち, 既約表現$D(j,j)$ あるいは可約表現 $D(j_1,j_2)\oplus D(j_2,j_1)$ ($j_1\neq j_2$) に従って変換する場を扱っている (なおこれらの表現は, いずれも, 空間反転を含む群 $L^{\uparrow}$ の既約スピノル表現である).

任意の (スピノルまたはテンソル) 場の変換則を統一的に記述するには, 二成分スピノルの理論形式に移行すればよい. このときは γ^5 が対角行列となる表示をつかう ((2.4.15) を参照)[1]. この表示では

$$\psi=\begin{pmatrix}\xi^{\alpha}\\ \chi_{\dot\alpha}\end{pmatrix}\qquad(\alpha=1,2) \tag{5.2.15}$$

と置けば, 等式 (5.2.2) を書きなおして

$$\begin{aligned}\Theta\begin{pmatrix}\xi^{\alpha}(x)\\ \chi_{\dot\alpha}(x)\end{pmatrix}\Theta^{-1}&=\mathrm{i}\eta\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\xi^{\alpha}(-x))^*\\(\chi_{\dot\alpha}(-x))^*\end{pmatrix}\\ \Theta\begin{pmatrix}\chi^*_{\dot\alpha}(x)\\ \xi^{*\dot\alpha}(x)\end{pmatrix}\Theta^{-1}&=\mathrm{i}\bar\eta\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{\alpha}(-x)\\ \xi^{\dot\alpha}(-x)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

という形にすることができる. 一方

$$\begin{aligned}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_n\dot\beta_1\cdots\dot\beta_n}(x)&=\Lambda^{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\,(\sigma_{\mu_1})^{\alpha_1\dot\beta_1}\cdots(\sigma_{\mu_n})^{\alpha_n\dot\beta_n},\\ \chi_{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_n\beta_1\cdots\beta_n}(x)&=\Lambda_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\,(\sigma_{\mu_1})_{\dot\alpha_1\beta_1}\cdots(\sigma_{\mu_n})_{\dot\alpha_n\beta_n}\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

と置けば, 点のある添え字と点のない添え字の数が等しいような混合テンソルに対しては TCP 変換性がわかる. 従って, いま得られた結果を (5.2.16) と結びつければ, 任意の

[1] そうすると, 原理的には, 群 $SL(2)$ の実表現の枠をはみだすことも起こりうる. しかし, 実用上いちばん重要なのは実表現の場合で, あとで再びこの場合に立ちかえることになろう (§3 参照).

〈スピン・テンソル〉の変換則を見いだすのは簡単である：

$$\Theta\begin{pmatrix} \xi^{(\alpha)(\dot{\beta})}(x) \\ \chi_{(\dot{\alpha})(\beta)}(x) \end{pmatrix}\Theta^{-1} = \eta^{j}\bar{\eta}^{k}\begin{pmatrix} \varepsilon_{jk}\xi^{*(\alpha)(\dot{\beta})}(-x) \\ \bar{\varepsilon}_{jk}\chi^{*}_{(\dot{\alpha})(\beta)}(-x) \end{pmatrix}. \tag{5.2.18}$$

ただし，

$$(\alpha) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j), \qquad (\dot{\beta}) = (\dot{\beta}_1, \cdots, \dot{\beta}_k),$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}[(-1)^j + (-1)^k + \{(-1)^j - (-1)^k\}\mathrm{i}]$$

$$= (-1)^j \times \begin{cases} \mathrm{i} & (j+k \text{ が奇数の場合}) \\ 1 & (j+k \text{ が偶数の場合}) \end{cases} \tag{5.2.19}$$

である．(5.2.18) と (5.2.19) とから明らかなように，もし理論が Θ で不変ならば，特に真空の不変性

$$\Theta\Psi_0 = \Psi_0 \tag{5.2.20}$$

が成り立つならば，場 $\xi_1^{(\alpha_1)(\dot{\beta}_1)}, \cdots, \xi_n^{(\alpha_n)(\dot{\beta}_n)}$ の真空期待値は，Θ の反ユニタリ性を考えた上で，

$$(\Psi_0, \xi_1^{(\alpha_1)(\dot{\beta}_1)}(x_1) \cdots \xi_n^{(\alpha_n)(\dot{\beta}_n)}(x_n)\Psi_0)$$

$$= \eta^{J-K}\mathrm{i}^F(-1)^J(\Psi_0, \xi_1^{*(\alpha_1)(\dot{\beta}_1)}(-x_1) \cdots \xi_n^{*(\alpha_n)(\dot{\beta}_n)}(-x_n)\Psi_0)$$

$$= \eta^{J-K}\mathrm{i}^F(-1)^J(\Psi_0, \xi_n^{(\alpha_n)(\dot{\beta}_n)}(-x_n) \cdots \xi_1^{(\alpha_1)(\dot{\beta}_1)}(-x_1)\Psi_0) \tag{5.2.21}$$

という関係を満足する．ただし J は点のない添え字の総数，K は点のある添え字の総数，F はスピノル場 (Fermi 場) の総数である．

これらのスピノル場の集合がなにかある電荷の保存則（たとえば，バリオン数とかレプトン数とかの保存則）をみたすと仮定すれば，真空期待値 (5.2.21) のなかには，各スピノル場と一緒に，必ずその共役表現に従って変換する場が含まれているはずである．従って，$J=K$ が成り立ち，(5.2.21) において η を含む因子は落ちてしまう．この場合には位相因子 η は重要ではないので，以下では特に記さぬことにしよう．

条件 (5.2.21) は TCP 対称性の存在の必要条件であるばかりでなく，また十分条件でもある．いいかえると次の定理が成り立つ：

［定理 5.2.1］ 場 $\xi^{(\alpha_r)(\dot{\beta}_r)}(x)$ の Wightman 関数に対して（なお (α_r) と $(\dot{\beta}_r)$ は添え字の組を表わすが），等式

$$w^{(\alpha_1)(\dot{\beta}_1)\cdots(\alpha_n)(\dot{\beta}_n)}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \mathrm{i}^F(-1)^J w^{(\alpha_n)(\dot{\beta}_n)\cdots(\alpha_1)(\dot{\beta}_1)}(-x_n, \cdots, -x_1) \tag{5.2.22}$$

が成り立つとしよう．ここで J は点のない添え字の数，F は w に含まれる半整数スピン場の数である．そのとき任意の場に対し

$$\Theta\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_j\dot{\beta}_1\cdots\dot{\beta}_k}(x)\Theta^{-1} = \varepsilon_{jk}\xi^{*\alpha_1\cdots\dot{\beta}_k}(-x) \tag{5.2.23}$$

であるような $\mathcal{H}$ における反ユニタリ演算子 Θ がただ一つ存在する（位相因子だけの不定性があるが，これは条件（5.2.20）によって固定できる）．ここで（5.2.19）と同様，$\varepsilon_{jk} = (-1)^j\mathrm{i}^{F(j,k)}$，$F(j,k) = (1-(-1)^{j+k})/2$ である．演算子 Θ は群 $\mathcal{P}_0$ の表現 $U(\underset{\sim}{a}, A)$ と恒等式

$$\Theta U(\underset{\sim}{a}, A)\Theta^{-1} = U(-\underset{\sim}{a}, A) \tag{5.2.24}$$

によって結びついている[1)]．

問題 5.2.2 定理5.2.1を証明せよ（ヒント：定理3.4.1の証明に用いた議論をそのまま真似すればよい）．

2.2. 対称管状領域における解析性と弱局所可換性

すでに1.1節で注意しておいたが，1.3節で証明した Bargmann=Hall=Wightman の定理は，Wightman 関数

$$w_{\tau_1\cdots\tau_n}(x_1, \cdots, x_n) = F_\tau(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$$

に対しても適用できる．第3章の2.2節で示したように，スペクトル条件から，後方管状領域 T_{n-1}^- で解析的な関数 F の境界値として，F_τ を表現できることが導かれる（定理3.2.2）．ところが定理5.1.2によると，関数 F はさらに拡大管状領域 $\mathcal{T}_{n-1}$ にまで解析接続できる．このようにして，Wightman の一般関数は複素 n 変数の解析関数

$$w_{\tau_1\cdots\tau_n}(z_1, \cdots, z_n) \tag{5.2.26}$$

の $\mathcal{S}^*$ の位相の意味における境界値と考えられる．この関数 w は

$$G_n = \{z_1, \cdots, z_n | (z_1-z_2, \cdots, z_{n-1}-z_n) \in \mathcal{T}_{n-1}\} \tag{5.2.27}$$

という領域で解析的で，さらに固有複素 Poincaré 群 $\mathcal{P}_+(C)$ の変換に関して共変的である．また定理5.1.3によれば，w の解析領域には実点 $(r_1, \cdots, r_n)$，すなわち，

$$(\rho_1 = r_1-r_2, \cdots, \rho_{n-1} = r_{n-1}-r_n) \in J \tag{5.2.28}$$

---

1) ここで，

$$I_{st}AI_{st}^{-1} = A \tag{5.2.25}$$

となることを思い出しておこう．

となるような点が存在する．

関数 w の解析領域におけるすべての実点（以下これらの点を《r 点》とよぶ）は互いに完全に空間的である：

$$(r_k-r_l)^2=(\rho_k+\rho_{k+1}+\cdots+\rho_{l-1})^2<0.$$

局所可換性の原理を使うと解析領域 G_n が拡大できることを示そう．

実際，π を添え字 $1,\cdots,n$ の任意の置換とすれば（$\pi(1,\cdots,n)=(i_1,\cdots,i_n)$），$r$ 点は互いに完全に空間的だから，

$$w_{\tau_1\cdots\tau_n}(r_1,\cdots,r_n)=(-1)^m w_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_n}}(r_{i_1},\cdots,r_{i_n}) \tag{5.2.29}$$

を得る．ここで m は添え字の列（$1,\cdots,n$）を（$i_1,\cdots,i_n$）に並べ換えるために，反可換な場を入れ換える回数を示す．関数 $(-1)^m w_{\pi\tau}(z_{i_1},\cdots,z_{i_n})$ は領域

$$\pi G_n=\{z_1,\cdots,z_n\,|\,(z_{i_1}-z_{i_2},\cdots,z_{i_{n-1}}-z_{i_n})\in\mathscr{T}_{n-1}\} \tag{5.2.30}$$

において解析的だが，この領域は一般には G_n と異なっている．ところが，一方，解析領域の実点では（5.2.29）によって関数 w_τ と $(-1)^m w_{\pi\tau}$ とは一致する．このことから，w_τ は対称化された領域

$$G_n^s=\bigcup_\pi \pi G_n\equiv\{z_1,\cdots,z_n\,|\,(z_1-z_2,\cdots,z_{n-1}-z_n)\in\mathscr{T}_{n-1}^s\} \tag{5.2.31}$$

に解析接続できることがわかる．ここで集合論の意味の和 $\bigcup$ は，添え字 $1,\cdots,n$ のすべての置換にわたる．

エルミートなスカラー場 φ が一つだけある場合には，Wightman の解析関数を使うと局所性が特に簡単に表現される．すなわち次の定理が成り立つ：

[定理 5.2.2]　a)　局所場 φ の Wightman 関数 $w_n(z_1,\cdots,z_n)$ は領域 G_n^s（5.2.31）において解析的であり，変数 $z_1,\cdots,z_n$ の任意の置換に関して対称的である．

b)　逆に解析的 Wightman 関数の対称性から，この関数が局所可換性の条件をみたすことが導かれる．

証明．　a）の成り立つことは上の議論からわかる．命題 b）を証明しよう．

関数

$$w_n(z_1,\cdots,z_n)=F(z_1-z_2,\cdots,z_{n-1}-z_n)$$

が G_n において解析的でかつ対称的であるとしよう（そのとき，この関数は G_n^s においても解析的である）．証明すべきことは，変数を実数に近づけたときの解析関数 w_n の境界値 w_n は，$(x_k-x_{k+1})^2<0$ に対し

$$w_n(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) = w_n(x_1, \cdots, x_{k+1}, x_k, \cdots, x_n) \qquad (5.2.32)$$

という条件をみたすことである.

まずはじめに z_k と z_{k+1} の交換は，新変数 $\zeta_j = z_j - z_{j+1}$ の空間における

$$\zeta_{k-1} \to \zeta_{k-1} + \zeta_k, \qquad \zeta_k \to -\zeta_k, \qquad \zeta_{k+1} \to \zeta_k + \zeta_{k+1}$$

という置き換えと同値であることに注目しよう.

このようにして，関数 F の解析領域 $\mathcal{T}_{n-1}$ において，

$$F(\zeta_1, \cdots, \zeta_{k-1}, \zeta_k, \zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_{n-1}) = F(\zeta_1, \cdots, \zeta_{k-1}+\zeta_k, -\zeta_k, \zeta_k+\zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_{n+1})$$

が成り立つことがわかる.

この等式は，$\zeta_k \equiv \xi_k$ が空間的な実ベクトル ($\xi_k^2 < 0$) で，$\zeta_l \in T^-$ ($l \neq k$) の場合にも，いぜんとして成り立つ．なぜなら，そういうベクトルの組からなる点 $(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1})$ を T_{n-1}^- にうつす変換 $\Lambda \in \mathcal{L}_+$ が存在し，従って，このような点はすべて拡大管状領域 $\mathcal{T}_{n-1}$ に属するからである．それを見るには，$\xi_k = (0, a < 0, 0, 0)$ となるように座標系を選んで

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\varphi & i\sin\varphi & 0 & 0 \\ i\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置けばよい．φ が十分小さければ,

$$\Lambda(\zeta_1, \cdots, \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_{n-1}) \in T_{n-1}^-$$

を示すことができる．このようにしてわれわれは,

$$F(\zeta_1, \cdots, \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_{n-1})$$
$$= F(\zeta_1, \cdots, \zeta_{k-1}+\xi_k, -\xi_k, \zeta_{k+1}+\xi_k, \cdots, \zeta_{n-1}) \qquad (5.2.33)$$

を得る．ところが $\mathrm{Im}\,\zeta_l \to -0$ のとき，(5.2.33) の各辺はそれぞれ (5.2.32) の各辺に近づく．このようにして，等式 (5.2.32) が証明され，定理 5.2.2 の証明もすんだ.

ここに得られた結果の応用として，局所可換性の大域的性格に関する定理を証明しておこう.

[定理 5.2.3] スカラー場 $\varphi(x)$ が，局所可換性を別にして，それ以外のすべての公理をみたし，局所可換性の代わりにそれより弱い条件—— x が原点の（任意に小さい）近傍のなかを動き，y が与えられた空間的ベクトル a の近傍内にあるとき，$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$ が成り立つという条件——をみたすとしよう．そのとき,

場 $\varphi(x)$ に対して局所可換性が成り立つ[1].

定理の証明の前に, 一つだけ注意をしておこう. 局所可換性の仮定が場の量子論の最も基本的な原理の一つであることは前に書いた. この要請に実験的裏付けがあるのだろうかという疑いが生ずるかもしれない. 実際には, われわれは, 二点間の空間的距離が 10^{-16} cm あるいはそれ以下の場合に, 一方の点におけるエルミート場の成分の大きさが, 他方の点における場の成分に影響を及ぼさないと考える特別の根拠をもっていない. ところがここに定式化した定理によれば, 一見それよりずっと弱い仮定, すなわち空間的距離が十分大きいときには場が可換であるという仮定から, その局所可換性を《証明》することができる. この定理によると, もし一つの非局所理論において相対論的量子論の残りの要請が成り立つなら, 大ざっぱにいって場の交換関係はどこでもゼロにならぬようなものでなければならない. 従って〈近距離の非局所性〉を導入するいろいろな試みにおいて, 同時に真空のある種の異方性がもちこまれていること, いいかえると, そうした試みが相対論的不変性の条件に関して, この本で採用したようなきびしい定式に反しているのも驚くにあたらない (Ingraham (1962), Blokhintsev and Kolerov (1964), 論文集 (Dubna 67) のなかの諸報告などを見よ).

定理 5.2.3 の証明. まず $r_k^l=(k-l)a,\ (l=1,\cdots,n)$ として, r 点 $(r_1^l,\cdots,r_n^l)$ を考える. すると定理の前提から, この点のある近傍で等式

$$w_n(x_1,\cdots,x_l,x_{l+1},\cdots,x_n)=w_n(x_1,\cdots,x_{l+1},x_l,\cdots,x_n)$$

が成り立つ. 従って w_n の解析領域内の任意の複素点において, この等式が成り立つ. l は任意だから, w_n は完全に対称であり, 定理 5.2.2 により場 φ は局所的である. 定理 5.2.3 の証明終わり.

変数の置換に関する Wightman 関数の完全な対称性は, 場の理論の基礎をなす局所性の単なるいいかえにとどまらないことをわれわれは見た. それだけでなく, この対称性はいまのところは未解決

---

1) V.S. Vladimirov の論文 ([24], p. 337. これより前の仕事 (1960) および Petrina(1961) も参照) では次のような結果が証明されている:

並進に関する不変性, エネルギー・運動量演算子の非負値性 (つまり, 第2章の要請 III a), ならびに

$$-l_1^2<(x-y)^2<-l^2 \text{ ならば } [A(x),B(y)]=0$$

という条件から, 普通の局所可換性

$$(x-y)^2<0 \text{ ならば } [A(x),B(y)]=0$$

が導かれる. この結果は上述のものよりずっと強い. というのは Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ に関する共変性を仮定せず, 多変数複素関数論における C-凸包の定理から導かれたものだからである. この定理も上に引用した文献で Vladimirov によって始めて証明された.

ないくつかの新しい問題を提起している

これらの問題を定式化するため，多変数複素関数論の次の基礎的事実を思い起こしておこう（たとえば［24］を見よ）. 一つの複素変数の場合とは異なって，多次元複素空間における領域は必ずしも，ある関数の自然な（極大）解析領域になっているとは限らない. それゆえ，《正則領域》の概念が重要な役割を演ずる. これはなにかある関数（たとえ一つでも）の自然な解析領域になっているような領域をいう. もし，与えられた領域 G が正則領域でなかったら，G で解析的な任意の関数はもうすこし広い領域で解析的である. G を含む領域で，G で正則な任意の関数がそこに解析接続されるような領域のうち，極大のものを領域 G の《正則包》といい，$H(G)$ と書く. G と $H(G)$ が一致しない場合，G は《解析的拡大》が可能であるという 与えられた領域 G が正則領域かどうかを判定する便利な基準として次の命題がある：領域 G が正則領域であるためには，G の境界 ∂G の各点に対し，その点を特異点とし，G で正則な関数 $f(z)$ を定義できることが必要かつ十分である（［24］の第 3 章，§ 16.7 を見よ*)）. 管状領域 $T_n^{\pm}$ と拡大管状領域 $\mathscr{T}_n$ は正則領域であるが，$n \geqslant 2$ の対称管状領域 $\mathscr{T}_n^s$ は正則領域ではないことがわかっている.

問題　5.2.3　後方管状領域 T^- と拡大管状領域 $\mathscr{T}_1$ は正則領域であることを示せ（ヒント：領域 T^- に対する証明については，まず T^- の境界 ∂T^- 上に任意の一点 $z = x+iy\,(y^0 \leqslant 0, y^2 = 0)$ を固定しておき，関数

$$f_z(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z)^2}$$

が T^- で解析的であり，$\zeta = z$ で極をもつことを確かめ，上にあげた判定基準を使う. 拡大管状領域 $\mathscr{T}_1$ もまた正則領域であることを証明するには，初めに $\mathscr{T}_1$ とはスカラー積 ζ^2 が複素平面上で正の実軸以外の任意の値をとるようなベクトル ζ の全体にほかならぬことを示せ. さらに領域 $\mathscr{T}_1$ の境界上の各点に対して，適当な非負の正数 a をとれば，$\mathscr{T}_1$ で解析的な，関数

$$f_a(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2-a} \qquad (a \geqslant 0)$$

がその点を特異点とする関数となることをいえ）.

$n = 1$ の場合には，対称管状領域 $\mathscr{T}_1^s$ は拡大管状領域 $\mathscr{T}_1$ と一致する. $n = 2$ になると，このことはもう成り立たない. 領域 $\mathscr{T}_2^s$ の正則包は Källén and Wightman(1958)が求めた. $n = 2$ の場合は Källén and Toll(1960)も扱っている. $n = 3$, $n = 4$ の場合は Manoharan (1962), Möller (1962) が扱っている. しかし一般の場合に，対称管状領域 $\mathscr{T}_n^s$ の正則包は見つかっていない.

問題　5.2.4　変数 $z_1, \cdots, z_n$ の置換で，領域 $\mathscr{T}_{n-1}\{\zeta_j = z_j - z_{j+1}, j = 1, \cdots, n-1\}$ を実質上まったく拡げないようなものは，恒等置換を別にすれば唯一つであり，それは

$$(z_1, \cdots, z_n) \longrightarrow (z_n, \cdots, z_1) \qquad (5.2.34)$$

にほかならぬことを示せ（ヒント：拡大管状領域 $\mathscr{T}_{n-1}$ は ζ_j の置換に関して対称であり，またすべての ζ_j の符号を同時に変えても不変であること，そして（5.2.34）の置換で ζ は，

$$(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1}) \longrightarrow (-\zeta_{n-1}, \cdots, -\zeta_1) \qquad (5.2.35)$$

と変換されることを使え）.

一つのスカラー場 $\varphi(x)$ の理論において，すべての Jost 点に対し，

$$w_n(x_1, \cdots, x_n) = w_n(x_n, \cdots, x_1) \qquad (5.2.36)$$

---

*) ［酒井］の p. 146, 系 1 を見よ. また［一松］の p. 244, 定理 11.18 をも参照.

が成り立つとき，《弱局所可換性（WLC）の条件》がみたされているということにしよう．WLC の要求によって，Wightman 関数の解析接続に関しては，(5.2.34)（あるいは (5.2.35)）の置換で不変という性質が導かれるだけであり，解析領域が拡がるわけではない．

任意スピンの場 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_n}$ がいくつかある場合に，WLC の条件は次の形をとる：任意の Jost 点に対して，

$$(\Psi_0,\varphi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\varphi_{\alpha_n}(x_n)\Psi_0)=\mathrm{i}^F(\Psi_0,\varphi_{\alpha_n}(x_n)\cdots\varphi_{\alpha_1}(x_1)\Psi_0) \qquad (5.3.37)$$

が成り立つ．ここで F は半整数スピンの場の数で常に偶数である．

問題 5.2.5 条件 (5.2.37) は，スピノル場の局所反可換性およびテンソル場の局所可換性から導かれることを示せ．ただしスピノル場とテンソル場は局所的に可換であると仮定する（逆は成り立たない．つまり，WLC は局所性よりも実質的に弱い要求である）．

2.3. *TCP* 定理

次の定理を証明しよう——

[定理 **5.2.4**] 場 $\varphi_{(\alpha)(\dot{\beta})}(x)$ に関して相対論的不変性の条件とスペクトル条件とがみたされているならば，弱局所可換性の要求 (5.2.37) は，TCP 不変性の条件 (5.2.22) と同値である．

証明. 添え字をたくさん書いて，証明の簡明な考え方をごたごたさせないため，ここでは，エルミートなスカラー場が一種類だけある場合について議論する．多数のスピノル場およびテンソル場が登場する一般の場合も，本質的には新しい論点を含まない．この場合を扱うことは読者におまかせしよう（[2] にでている）．

Jost 点において WLC の条件 (5.2.36) がみたされているとしよう．Wightman 関数 $F_n(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})$ は Jost 点において解析的であり，Jost 点の集合 J は $n-1$ 次元の実の領域を含むから，(5.2.36) はこの関数の解析領域の全体で成り立っている．(5.2.34) と (5.2.35) が同値であることを用いると，

$$F_n(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})=F_n(-\zeta_{n-1},\cdots,-\zeta_1)$$

を得る．

この式の右辺に定理 5.1.2 を使う．この定理によると，関数 F_n は複素 Lorentz 群の連結成分 $\mathcal{L}_+$ に属する変換によって不変であるが，$\mathcal{L}_+$ はすべての軸の反転 $I_{st}\zeta=-\zeta$ を含んでいる．従って

$$F_n(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})=F_n(\zeta_{n-1},\cdots,\zeta_1) \qquad (5.2.38)$$

が得られる．

一方 $(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1}) \in T_{\bar{n}-1}$ ならば，$(\zeta_{n-1}, \cdots, \zeta_1) \in T_{\bar{n}-1}$ である．従って (5.2.38) の両辺で $\mathrm{Im}\,\zeta_j \to -0$ の極限をとれば，任意の実の $x_1, \cdots, x_n$ に対して

$$w_n(x_1, \cdots, x_n) = w_n(-x_n, \cdots, -x_1) \tag{5.2.39}$$

を得る．これは TCP 不変性の条件にほかならない ((5.2.22) と対照せよ)．

逆に等式 (5.2.39) が成り立てば，解析接続によって (5.2.38) が得られる．このことから，定理 5.1.2 を使って，(5.2.36) がすべての Jost 点で成り立つことは容易に証明できる．これで定理 5.2.4 は証明された．

(5.2.37) を導くときに (問題 5.2.5) われわれは，空間的距離をへだてた二点における二つの場の可換，反可換の性質とスピンとのあいだに，正常な関係があることを使った点に注意しよう．§3 で見るように，実際には TCP 定理はこのような補足的な仮定とは関係なく成立するのである．

弱局所性は普通の局所性から導かれる性質だから，局所場の理論においては，連続な Poincaré 群に関する不変性 (とスペクトル条件) から，TCP という不連続変換に関する不変性が導かれる．しかし一面からいえば，TCP 定理が局所性でなくそれよりも弱い弱局所性の条件のもとで，まさに証明されたという事実は極めて重要である．すでに注意したように，局所性の条件は可能な理論の範囲を厳しく制限し，現在までのところ，すべての公理をみたし，かつ単位行列でない S 行列を与えるような理論の例は一つもない．ところが局所可換性 (LC) の条件を弱局所可換性 (WLC) の条件までゆるめると，もうそんなことはない．Jost (1963) の証明したところによれば，任意の TCP 不変な S 行列に対応する《出てゆく場》と《入ってくる場》とは，少なくとも形式的には，弱局所場によって内挿することができる．

それでは TCP 定理は散乱行列にどのような制限を課するのか？ 特に〈TCP 不変な散乱行列〉という概念はなにを意味するのか？ 実用の上で大切なこの問題を次にとりあげよう．

始めに例として，荷電スカラー場 $\varphi(x)$ の理論を考えてみよう．(5.2.23) によれば，$\varphi(x)$ に対する TCP 演算子の作用は公式

$$\Theta\varphi(x)\Theta^{-1} = \varphi^*(-x) \tag{5.2.23 a}$$

によって表わされる．

明らかに Heisenberg カレント $j(x) = (\Box + m^2)\varphi(x)$ もまた同じ変換則に従わねばならない．局所理論においては，カレントは局所場に課せられた条件をすべて満足するこ

とに注意しよう．ただし完全性（真空の巡回性）はみたさないことがありうる．

問題　5.2.6　(5.2.23 a) と Yang-Feldman の方程式 (4.2.6) を使って，

$$\Theta\varphi^{\rm in}(x)\Theta^{-1}=\varphi^{*{\rm out}}(-x),\qquad \Theta\varphi(x)^{\rm out}\Theta^{-1}=\varphi^{*{\rm in}}(-x) \tag{5.2.40}$$

となることを示せ．また個々の演算子 $U(I_s), U(I_t), U(I_c)$ の作用を求めよ（ヒント：$\overline{D^{\rm ret}}(-x)=D^{\rm ret}(-x)=D^{\rm adv}(x)$ を考えに入れること）．

(5.2.40) から，演算子 Θ は場 $\varphi^{\rm ex}$ に対する *TCP* 演算子にはなっていないことがわかる（$\varphi^{\rm in}=\varphi^{\rm out}=\varphi$ というトリヴィアルな場合を除いて）．しかし *TCP* 定理によって自由場 $\varphi^{\rm out}$ に対しても，

$$\Theta_{\rm out}\varphi^{\rm out}(x)\Theta_{\rm out}^{-1}=\varphi^{*{\rm out}}(-x),\qquad \Theta_{\rm out}\Psi_0=\Psi_0$$

となるような反ユニタリ演算子 $\Theta_{\rm out}$ が存在する．(5.2.40) の最初の式を $\Theta_{\rm out}$ で変換すると

$$\varphi^{\rm out}(x)=\Theta_{\rm out}^{-1}\Theta\varphi^{\rm in}(x)\Theta^{-1}\Theta_{\rm out}$$

を得る．この式を (4.1.53) とくらべると，散乱演算子は

$$S=\Theta^{-1}\Theta_{\rm out} \tag{5.2.41}$$

に等しいことがわかる．S 演算子のユニタリ性は，Θ と $\Theta_{\rm out}$ の反ユニタリ性の直接の帰結である．

問題　5.2.7　(5.2.40) と荷電自由場の Fourier 変換 (3.4.31) を使い，Θ の反ユニタリ性を考えに入れて，次の等式

$$\Theta a_{\rm in}^{(\pm)}(\boldsymbol{p})\Theta^{-1}=a_{\rm out}^{(\mp)}(\boldsymbol{p}), \tag{5.2.42 a}$$

$$\Theta a_{\rm in}^{*(\pm)}(\boldsymbol{p})\Theta^{-1}=a_{\rm out}^{*(\mp)}(\boldsymbol{p}) \tag{5.2.42 b}$$

および in ↔ out の交換をした等式が成り立つことを示せ[1]．

等式 (5.2.42) から，in 状態の粒子を *TCP* 変換すると，同じ運動量をもつ out 状態の反粒子となること，およびその逆の命題が導かれる．

スピノル場（スピノル粒子）の場合には，このほかにスピン成分の符号が変わる．これを確かめるには，Poincaré 群のスピノル表現 $U(a, A)$ と演算子 Θ との関係を与える式

---

[1] 等式 (5.2.42 b) は，実際は (5.2.42 a) と，任意の演算子 A，任意の反ユニタリ演算子 Θ に対して成り立つ恒等式

$$(\Theta A\Theta^{-1})^*=\Theta A^*\Theta^{-1} \tag{5.2.43}$$

とから導かれる．この式を確かめるには，演算子 $A\Theta^{-1}, A^*\Theta^{-1}$ の定義域から，それぞれ任意にベクトル Φ, Ψ をとったときに，次の等式が成り立つことに注意すればよい．すなわち，

$$(\Psi,\Theta A\Theta^{-1}\Phi)=\overline{(\Theta^{-1}\Psi, A\Theta^{-1}\Phi)}=\overline{(A^*\Theta^{-1}\Psi,\Theta^{-1}\Phi)}=(\Theta A^*\Theta^{-1}\Psi,\Phi).$$

(5.2.24)，(5.2.25) から出発すればよい．実際，S^3 をスピンの第三成分の演算子とすると，(5.2.24) から

$$e^{iS^3\alpha} = \Theta e^{iS^3\alpha}\Theta^{-1} = e^{-i\Theta S^3\Theta^{-1}\alpha}$$

となり，従って，

$$\Theta S^3\Theta^{-1} = -S^3 \tag{5.2.44}$$

であることが導かれるからである（角運動量の軌道成分 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ に対しては，性質 (5.2.44) は，変換 I_{st}（あるいは *TCP* 変換）によって $\boldsymbol{r}$ は符号を変えるが $\boldsymbol{p}$ は変わらないことから直接に導かれる）．

特に Dirac スピノルについては，(5.2.2) あるいは (3.4.59) ～ (3.4.61) から

$$\Theta b_{\zeta}^{\mathrm{in}(\pm)}(\boldsymbol{p})\Theta^{-1} = \eta_{\pm} b_{-\zeta}^{\mathrm{out}(\mp)}(\boldsymbol{p}) \tag{5.2.45}$$

が得られる．なお $\eta=\eta(\zeta,e)$ は位相因子で $\eta^4=1$ である．(5.2.45) を (5.2.2) から得るには，スピノル v (4.3.65) に対して恒等式

$$i\gamma^5 v_{\zeta}^{(-)}(\boldsymbol{p}) = v_{-\zeta}^{(+)}(\boldsymbol{p}) \tag{5.2.46}$$

が成り立つことを使えばよい．

場 φ^{ex} から漸近状態に移ることによって，*TCP* 対称性から散乱行列要素のあいだの恒等式

$$\langle p'_1\zeta'_1e'_1,\cdots,p'_k\zeta'_ke'^{\mathrm{out}}_k\,|\,p_1\zeta_1e_1,\cdots,p_n\zeta_ne_n^{\mathrm{in}}\rangle$$

$$=\eta'\langle p_1,-\zeta_1,-e_1;\cdots;p_n,-\zeta_n,-e_n^{\mathrm{out}}\,|\,p'_1,-\zeta'_1,-e'_1;\cdots;p'_k,-\zeta'_k,-e'^{\mathrm{in}}_k\rangle \tag{5.2.47}$$

が出てくることは容易にわかる．ここで p_j,ζ_j,e_j はそれぞれ j 番目の粒子の運動量，スピン成分，電荷であり，η' は $\eta(\zeta,e)$ の積に等しい位相因子である．もっと普通の書き方では，たとえば out 状態だけを使い，out の記号も落として (5.2.47) を

$$\langle p'_1\zeta'_1e'_1,\cdots,p'_k\zeta'_ke'_k\,|S|\,p_1\zeta_1e_1,\cdots,p_n\zeta_ne_n\rangle$$

$$=\eta'\langle p_1,-\zeta_1,-e_1;\cdots;p_n,-\zeta_n,-e_n\,|S|\,p'_1-\zeta'_1,-e'_1;\cdots;p'_k,-\zeta'_k,-e'_k\rangle \tag{5.2.47 a}$$

という形にしてもよい．

問題　5.2.8　a)　(5.2.23) から出発して，一般の場合に *TCP* 不変性を示す (5.2.47) 型の関係式を求めよ．

b)　荷電スカラー場の場合に，(5.2.22) および LSZ の漸化式 (4.2.8) を用いて (5.2.47) を求めよ．

特に，*TCP* 不変性から，質量と寿命が粒子と反粒子とでは厳密に等しいことが出てくる．この両者の等しいことは実験でも確かめられている（最も詳しい検証は，$K^0,\overline{K}^0$ 粒

子の質量が等しいことである)[1]．

締めくくりとして，弱局所可換性の要求が，局所可換性より実際にどれだけ〈弱い〉かを示す簡単な例を考察しよう．

$\varphi(x)$ をエルミートな自由スカラー場 (3.4.8) とする．ただし演算子 $a(\boldsymbol{p})$ と $a^*(\boldsymbol{p})$ が交換関係 (3.4.10) ではなく，反交換関係

$$[a(\boldsymbol{p}),a(\boldsymbol{q})]_+=0, \qquad [a(\boldsymbol{p}),a^*(\boldsymbol{q})]_+=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{5.2.48}$$

をみたすとしよう．このとき $\varphi(x)$ は局所的ではない．実際，交換子だけではなく，反交換子

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_+=D^{(1)}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_m^+}\frac{\cos p(x-y)}{p^0}d^3\boldsymbol{p} \tag{5.2.49}$$

も x, y が空間的な距離だけ離れている場合に0とはならない．それにもかかわらず，次の性質をもつ反ユニタリ演算子 Θ は存在する．すなわち Θ は，

$$\Theta\Psi_0=\Psi_0, \qquad \Theta\varphi(x)\Theta^{-1}=\varphi(-x), \qquad \Theta^2=\mathbf{1} \tag{5.2.50}$$

という性質をもち，Klein=Gordon 方程式と交換関係 (5.2.49) を不変にする ($D^{(1)}(x)$ は実関数で，さらに偶関数でもあるから)．従って定理5.2.4により，$\varphi(x)$ の積の真空期待値は弱局所可換性の条件を満足する．

問題　5.2.9　スカラー場の二体 Wightman 関数の弱局所可換性を，表現 (3.4.92) すなわち

$$(\Psi_0,[\varphi(x),\varphi(y)]\Psi_0)=\frac{1}{\mathrm{i}}\Delta(x-y) \tag{5.2.51}$$

に基づいて直接確かめよ (なお $\Delta(x)$ は Lorentz 不変な奇関数であるが，変数ベクトルが空間的ならば0となることを忘れないように)．

2.4.　Borchers の同値類

定理5.1.2と *TCP* 定理は，互いに局所的な場の集合の研究 (Borchers (1960)) において，思いがけない面白い応用をもつことがわかった．Borchers の理論は，次のような重要な問題を明るみに出したのである——散乱行列が与えられたときに，それを〈内挿〉するような Heisenberg 場の定義には，どれだけの任意性があるか？ (この問題は現在も完全には解かれていない．2.5節を見よ)．

Borchers が見つけ出した注目すべき事実の第一は，局所可換性あるいは弱局所可換性という性質が推移法則をみたすことである．これによって，同一の Hilbert 空間に作用する場の既約な集合の全体を同値類にわけることができる．

---

[1] これらの問題の詳しい議論は Lee et al. (1957) や Lee の報告 (1965) を参照せよ．

Borchers の結果を系統だてて説明しよう．簡単のため，以下で問題とする場はすべてエルミートなスカラー場と仮定する．

[定理 5.2.5]　$\varphi(x)$ を弱局所場とし，この場に対して真空が巡回ベクトルになっているとする．$\phi(x)$ をもう一つの場とし，群 $\mathcal{L}_+^\uparrow$ に関しては，$\varphi(x)$ と同じ表現 $U(a,\Lambda)$ に従って変換し，また $\varphi(x)$ と同じ定義域 Ω をもつとしよう．

さらに，

$$(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\phi(x)\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\Psi_0)$$
$$=(\Psi_0,\varphi(x_n)\cdots\varphi(x_{j+1})\phi(x)\varphi(x_j)\cdots\varphi(x_1)\Psi_0)\qquad(5.2.52)$$

という等式が Jost 点

$$(x_1-x_2,\cdots,x_j-x,x-x_{j+1},\cdots,x_{n-1}-x_n)\in J_n$$

において成り立つとしよう（任意の j,n に対して）．このとき場 φ と ϕ は共通の TCP 演算子をもち，それゆえ，a)　場 $\phi(x)$ は弱局所的であり，b)　場 $\varphi(x)$ と $\phi(x)$ とは互いに弱局所的である[1]．

証明．　等式 (5.2.52) の左辺には Bargmann=Hall=Wightman の定理 5.1.2 を適用できる．Wightman 関数を解析接続したものは，複素 Lorentz 群に関して不変であることを用いると，TCP 定理の証明のときと同様にして(なお (5.2.40) を参照)，(5.2.52)から任意の $x,x_1,\cdots,x_n$ に対する等式

$$(\Psi_0,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_j)\phi(x)\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)\Psi_0)$$
$$=(\Psi_0,\varphi(-x_n)\cdots\varphi(-x_{j+1})\phi(-x)\varphi(-x_j)\cdots\varphi(-x_1)\Psi_0)\qquad(5.2.53)$$

の導かれることがわかる．

Θ を場 φ に対する TCP 演算子とし，さらに

$$\begin{aligned}\Phi&=\varphi(f_j)\cdots\varphi(f_1)\Psi_0,\\ \Psi&=\varphi(f_{j+1})\cdots\varphi(f_n)\Psi_0\end{aligned}\qquad(5.2.54)$$

が正則状態であるとする（$f_k(x)\in\mathcal{S}(R_4)$．(2.1.4) の下を参照)．このとき，(5.2.53) によって

$$(\Phi,\phi(x)\Psi)=(\Theta\Psi,\phi(-x)\Theta\Phi).\qquad(5.2.55)$$

一方，Θ が反ユニタリであること，Ω に属する任意の Φ,Ψ に対して $\phi(x)$ がエルミートであることを使うと，

---

[1] 場 φ と ϕ とが《互いに弱局所的》とは，ϕ と φ との任意個の混合積の真空期待値が WLC 条件をみたすことをいう．

$$(\Phi, \phi(x)\Psi) = \overline{(\Psi, \phi(x)\Phi)} = (\Theta\Psi, \Theta\phi(x)\Theta^{-1}\Theta\Phi) \quad (5.2.56)$$

となる．(5.2.55) と (5.2.56) とをくらべると，Ω に属するベクトルに対する演算子 ϕ の作用に関して，等式

$$\Theta\phi(x)\Theta^{-1} = \phi(-x) \quad (5.2.57)$$

が成り立つことがわかる．こうして場 ϕ に対しても TCP 演算子が存在する（このことから，TCP 定理によって，定理の命題 a）が導かれる）．さらにこの演算子は場 φ に対する TCP 演算子と一致する（このことから定理の命題 b）が導かれる）．こうして定理5.2.5は証明された．

[定理の系]　互いに弱局所可換性をもつという性質は，次の意味で推移的である．場 φ は巡回的真空をもつ弱局所場とし，場 ϕ_1, ϕ_2 の各々に対し定理5.2.5の条件 (5.2.52) がみたされているとしよう．そのとき，場 ϕ_1 と ϕ_2 は互いに弱局所的である．なぜならば，上の定理によって φ, ϕ_1, ϕ_2 は共通の TCP 演算子をもち，従って定理5.2.4によってこれらは互いに弱局所的となるから．

従って，それに対し真空が巡回的であるような弱局所場 $\varphi(x)$ が与えられたとき，この φ を含むような《互いに弱局所的な場の Borchers 類》を構成できる[1]．TCP 演算子を共有し，同じ定義域をもつ場はすべて同一の類に属する．

[定理 5.2.6]　場 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ は互いに弱局所的とし，これらの場のうち少なくとも一方に対して，真空が巡回的とする．さらに $t \to -\infty$ で入ってくる漸近場が存在して，互いに等しいとしよう．すなわち

$$\varphi_1^{\mathrm{in}}(x) = \varphi_2^{\mathrm{in}}(x). \quad (5.2.58)$$

このとき，出てゆく漸近場もまた一致する：

$$\varphi_1^{\mathrm{out}}(x) = \varphi_2^{\mathrm{out}}(x) \quad (5.2.59)$$

（従って場 φ_1 に対する S 行列は場 φ_2 に対する S 行列と一致する）．

証明．　定理5.2.5によって，場 φ_1 と φ_2 は共通の TCP 演算子をもつから，定理の命題は等式 (5.2.40) の直接の帰結である．

互いに局所的な場に対しては，入ってくる漸近場の存在という仮定は必要ない．その場合は漸近場の存在が，Haag=Ruelle の定理（定理4.1.1と4.1.2）の結果として出てく

---

[1] Borchers 類は数学的意味における同値類ではないことを注意しておく．というのは，類のすべての元が同格とはいえないからである．事実，$\varphi(x)$ には完全性の条件 VII（真空の巡回性）を要求するのに，φ に対して弱局所的な他の場にはこれを要求していない．

るからである．前に互いに弱局所的な場に対し，定理 5.2.5 の系として証明された**推移性**の条件は，互いに局所的な場に対しても依然として成り立つことを次に示そう．

[定理 5.2.7]　場 ϕ_1 と ϕ_2 とは共通の定義域 Ω をもち，群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ の同じ一つの表現 $U(a, \Lambda)$ に属するものとしよう．さらに場 φ は局所的で，真空は φ に対して巡回ベクトルであるとする．このとき，場 ϕ_1 と ϕ_2 が φ と互いに局所的，すなわち

$$(x-y)^2<0 \text{ のとき，} [\varphi(x), \phi_1(y)]=0=[\varphi(x), \phi_2(y)]$$

とすれば，場 ϕ_1 と ϕ_2 はまた相互に局所的である．すなわち

$$(x-y)^2<0 \text{ のとき，} [\phi_1(x), \phi_2(y)]=0$$

が成り立つ．

証明.　場 φ, ϕ_1, ϕ_2 は，さきに定理 5.2.5 の系を導くにあたって用いたすべての条件をみたしているから，互いに弱局所的である．このことと，φ の局所性とから Jost 点 $(x_1-x_2, \cdots, x_j-y, y-z, z-x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}-x_n) \in J_{n+1}$ において

$$\begin{aligned}
&(\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_j)\phi_1(y)\phi_2(z)\varphi(x_{j+1}) \cdots \varphi(x_n)\Psi_0) \\
&\quad =(\Psi_0, \varphi(x_n) \cdots \varphi(x_{j+1})\phi_2(z)\phi_1(y)\varphi(x_j) \cdots \varphi(x_1)\Psi_0) \\
&\quad =(\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_j)\phi_2(z)\phi_1(y)\varphi(x_{j+1}) \cdots \varphi(x_n)\Psi_0) \qquad (5.2.60)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

問題 5.2.10　(5.2.60) から，任意の $x_1, \cdots, x_n$ と，$(y-z)^2<0$ に対して

$$(\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_j)[\phi_1(y), \phi_2(z)]\varphi(x_{j+1}) \cdots \varphi(x_n)\Psi_0)=0 \qquad (5.2.61)$$

という等式を導け（ヒント：定理 5.2.2 の b) を証明したときの議論を援用せよ）．

(5.2.61) と φ の完全性の条件とから，

$$[\phi_1(y), \phi_2(z)]=0 \qquad ((y-z)^2<0)$$

が導かれる．

これで定理 5.2.7 は証明された．

[定理の系]　定理と同じ仮定のもとで，もし ϕ と φ が互いに局所的ならば，ϕ 自身もまた局所的である（$\phi_1=\phi_2$ と置け）．

2.5. 応用例：与えられた S 行列をもつすべての場の集合を記述する問題

線形微分演算子によって結ばれている場（とかカレント）は，互いに局所的な場の例を与えている．特に，場 $\varphi(x)$ が局所的なら，カレント

$$j(x)=(\Box+m^2)\varphi(x) \qquad (5.2.62)$$

は φ と局所的に可換であり，従ってそれ自身 φ と同じ Borchers 類に属する局所場とな

る．

問題　5.2.11　局所場 $\varphi(x)$ が $t\to-\infty$ で質量 m の漸近場 $\varphi^{\mathrm{in}}(x)$ にゆくならば，

$$\psi(x)\equiv\varphi(x)+j(x)=\varphi(x)+(\Box+m^2)\varphi(x) \tag{5.2.63}$$

という場も $t\to-\infty$ で同じ漸近場をもち，S 行列も同じであることを示せ．

エルミートな自由スカラー場の Borchers 類の記述は，Epstein (1963) によって与えられた．この結果を定式化するために，次の定義を導入しよう．

自由場 $\varphi(x)$ の《Wick 多項式》とは，場 $\varphi(x)$ と同じ点 x における $\varphi(x)$ の導関数とを含む標準積の任意の線形結合をいう．場 φ の導関数の標準積は，生成演算子が消滅演算子の左側にくるようにするという条件（公式 (3.4.67) のあとにある定義を参照）によって与えてもよいし，あるいは

$$:D^{\alpha}\varphi(x)D^{\beta}\varphi(x):=\lim_{\substack{x_1\to x\\ x_2\to x}}\ _{(x_1\neq x_2)}\{D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)-(\Psi_0, D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)\Psi_0)\}$$

$$\begin{aligned}&:D^{\alpha}\varphi(x)D^{\beta}\varphi(x)D^{\gamma}\varphi(x):\\&\quad=\lim_{x_j\to x}\{D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)D^{\gamma}\varphi(x_3)-(\Psi_0, D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)\Psi_0)D^{\gamma}\varphi(x_3)\\&\qquad-(\Psi_0, D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\gamma}\varphi(x_3)\Psi_0)D^{\beta}\varphi(x_2)\\&\qquad\quad-(\Psi_0, D^{\beta}\varphi(x_2)D^{\gamma}\varphi(x_3)\Psi_0)D^{\alpha}\varphi(x_1)\}\end{aligned} \tag{5.2.64}$$

等々という公式で与えてもよい（微分演算子 D^{β} は公式 (1.1.3) に定義されている）．

スカラー場の導関数の標準積において添え字を縮約すると，新しくスカラー場をつくり出すことができる．たとえば，

$$\psi(x)=\varphi(x)+g^{\mu\nu}:\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\nu}}:. \tag{5.2.65}$$

問題　5.2.12　$\varphi(x)$ が質量 m の自由場なら，(5.2.65) の場に対して漸近的完全性が成り立ち，

$$\psi^{\mathrm{in}}(x)=\psi^{\mathrm{out}}(x)=\varphi(x) \tag{5.2.66}$$

であることを示せ（ヒント：Fourier 積分論でよく知られた Riemann の補題（[56] の第3巻，19章，717節を参照）によって，絶対可積分な関数 $F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ に対しては，

$$\lim_{t\to\pm\infty}\iint F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\exp\{it(\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}+\sqrt{m^2+\boldsymbol{q}^2}-\sqrt{m^2+(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^2})\}d^3\boldsymbol{p}d^3\boldsymbol{q}=0 \tag{5.2.67}$$

となることを利用せよ）．

容易にわかるように，自由場 $\varphi(x)$ の任意の Wick 多項式は，$\varphi(x)$ に対して局所的であり，従って同じ Borchers 類に属する．特に，この類に属する任意の場にはトリヴィアルな S 行列が対応する．

問題　5.2.13　自由スカラー場 $\varphi(x)$ に対して真空が巡回的とし，$\varphi(x)$ の Lorentz 不変な Wick 多項式を $P(\varphi(x))$ とする．$j(x)=P(\varphi(x))$ ならば，方程式

$$(\Box+m^2)\phi(x)=j(x), \tag{5.2.68}$$

あるいはこれに等価な形として，

$$\phi(x)=\phi^{\text{in}}(x)+\int D^{\text{ret}}(x-y)j(y)d^4y \tag{5.2.69}$$

を満足する局所場はありえないことを示せ（Araki et al.(1961) を参照)．（ヒント：互いに局所可換であるという性質の推移性を使って，自由場 $\varphi(x)$ と求める解 $\phi(x)$ が同じ Borchers 類に属することを示せ．このことから $\phi^{\text{in}}(x)$ と $\varphi^{\text{in}}(x)\equiv\varphi(x)$ が符号を除いて一致することを導く．(5.2.69) を使えば，$\varphi(x)$ の局所性に矛盾する結果に到達する)．

前に触れた Epstein の結果とは，自由場 $\varphi(x)$ の Wick 多項式が，この場に対する Borchers 類の全部の場をつくしているということにほかならない．

異なった質量をもつ二つの自由場は，定義によって，同じ Borchers 類に属さぬことに注意しよう（いずれの場に対しても真空の巡回性の条件がみたされないから)．まったく同様にして，第3章，4.5 節で扱った一般化された自由場もまた，与えられた自由場の Borchers 類の枠をはみ出している．

Poincaré 群のある特定の表現に従って変換する局所場の全体に話を限ったとしても，Borchers 類は，与えられた S 行列をもつ場の全体をつくしはしない．なぜなら，$\varphi(x)$ を中性スカラー場とし，群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ の表現 $U(a,\Lambda)$ とも S 行列とも交換可能な任意のユニタリ変換を V とするとき，場

$$\phi(x)=V\varphi(x)V^{-1} \tag{5.2.70}$$

には，φ と同じ S 行列が対応するにもかかわらず，一般に，ϕ と φ は互いに局所的ではないからである．これまでのところ証明されていない（しかし反証もない）一つの仮説がある．それによると Poincaré 群の与えられた表現 U と，与えられた S 行列とをもつ理論はすべて，一つの Borchers 類に対応する理論から，(5.2.70) 型の相似変換によって得られるだろうという．

これまでの分析が示すように，与えられた S 行列にはそれを内挿する Heisenberg 場として，かなり広い範囲の場を対応させることができる．従って散乱理論の側から見るならば，第4章§3で展開した純然たる S 行列のアプローチのほうが，より経済的で夾雑物が少ないことは明らかである．有界演算子の局所代数を用いる Araki=Haag の理論は，もう一つのいっそう抽象的なアプローチで，これは，与えられた同値類のなかの場の選び方に関して不変である．この理論については，この章の付録で手短かに説明することにしよう．

§ 3.　スピンと統計の関係

3.1.　はじめに

場の局所可換性または局所反可換性は，状態ベクトルおよび漸近的自由粒子の対称性を決める．局所可換な (Bose) 場には，粒子の入れ換えに関して対称な状態が対応し，反可換な (Fermi) 場には反対称な状態ベクトルが対応する．ところで，状態ベクトル（あるいは波動関数）の対称性は，量子力学で知られているように，与えられた物理系の従う統計を定める．完全対称な波動関数には Bose=Einstein 統計が，完全反対称な波動関数には Fermi=Dirac 統計が対応する．

それゆえ，言葉の意味を多少自由にとって，以下われわれは，スピンと局所可換性（もしくは反可換性）の関係のことを《スピンと統計の関係》ということにしよう．

完全対称性および完全反対称性以外に (Young の表——文献 [43] 第7章を参照——のいろいろの場合に相当して) 一連の中間的な対称性が存在し，それにちょうど対応して，Bose 統計とFermi 統計以外の中間的な統計，いわゆる《パラ統計》が理論上可能である (たとえば，Messiah and Greenberg (1964) および Greenberg and Messiah (1965) を見よ)．《パラ場》の概念，パラ局所場に対する TCP 定理，およびスピンとパラ統計の関係に関する定理は，3.4 節で論ぜられる．

その前の 3.2 節と 3.3 節では，問題にしている場は常に Bose 場（可換）か Fermi 場（反可換）かのいずれかであるという仮定のもとに議論を進めよう[1]．別の言葉でいうと，われわれは，局所性の基本仮定が場 ϕ_k（その成分を ϕ_k^α とする）に対し次の形に定式化されるべきことを要求する：

$$\phi_k^\alpha(x)\phi_l^\beta(y)=\sigma_{kl}\phi_l^\beta(y)\phi_k^\alpha(x) \qquad ((x-y)^2<0\text{ のとき}). \qquad (5.3.1)$$

ここに σ_{kl} は，α と β にはよらずに，$+1$ か -1 の値をとる．前と同様に（第3章1.2節），等式 (5.3.1) は次の意味に理解すべきである．すなわち，空間的にへだたった有界な台をもつ二つの基礎関数を用いて均らしたとき，すべての場に共通の定義域 Ω からとってきたベクトルに上の式の各辺の演算子を作用させた結果は，互いに相等しい．

群 $L_+^\uparrow$ の一価の表現に従って変換されるテンソル場すなわち整数スピンの場が自分自身と，また他のスピノル場と，局所的に可換であるとき，そしてまた，(固有) Lorentz 群

[1] このような形で，第3章1.2節の基本仮定 VI が定式化されていることに注意しよう．しかしながら，その後，われわれはしばしば，スピンと統計の正常な関係に関する付加的仮説を使ってきた．ここでは，この仮説を基礎づけることが問題である．

の二価の表現に従って変換されるスピノル場，すなわち半整数スピンの場が局所的に反可換であるとき，そのような場 ψ_k から成る系はスピンと統計の《正常な関係》をもつということにしよう．スピンと統計に関する定理は，(5.3.1) の関係をみたす一種類の場 $\psi^\alpha(x)$ に対しては必ず，スピンと統計の正常な関係が実現されることを主張する．この定理の証明は3.2節で行なう．二つ以上の場がある場合には，異なる場のあいだに正常でない交換関係が実現することがありうる．

しかしながら，このような正常でない交換関係をもつ任意の理論は，スピンと統計の正常な関係をもち，かつ一定の補足的な対称性を有するある他の理論と等価であることが示される (3.3節)．

いくらか別の観点から，スピンと統計とのあいだに関係が生ずる機構を，スピン0および1/2の自由場を例にとって具体的に示すことが可能である．

一定の運動量と一定のスピンの向きとをもった粒子の生成・消滅演算子が，可換もしくは反可換であるとしよう．すなわち，

$$[a(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{q})]_\varepsilon = 0, \qquad [a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{q})]_\varepsilon = \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q});$$

$$[b_s^{(e)}(\boldsymbol{p}), b_{s'}^{(e')}(\boldsymbol{q})]_{\varepsilon'} = 0, \qquad [b_s^{(e)}(\boldsymbol{p}), b_{s'}^{*(e')}(\boldsymbol{q})]_{\varepsilon'} = \delta_{ss'}\delta_{ee'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}).$$

ここに $\varepsilon, \varepsilon' = \pm$，そのほかの記号は第3章§4と同じである．このとき，場 $\varphi(x)$ と $\psi^\alpha(x)$ もまた局所的に可換もしくは反可換でなければならない，すなわち，

$$(x-y)^2 < 0 \text{ のとき}, \quad [\varphi(x), \varphi(y)]_\varepsilon = [\psi^\alpha(x), \psi^{*\beta}(y)]_{\varepsilon'} = 0$$

でなければならないという条件を置くと，$\varepsilon = -$，$\varepsilon' = +$ に決まる．われわれは，読者がみずからこれを確かめることをすすめる．その場合，Pauli=Jordan の関数 $D_m(x)$ は $x^2 < 0$ では0であるが，Klein=Gordon 方程式の偶の不変な解 $D^{(1)}(x)$ (3.A.9) はこの性質をもたないという事実を利用せよ．

以下の考察のためには，すべての場 ψ_k が Lorentz 群に対応するスピノル群 $SL(2)$ の有限次元で実の既約表現に従って変換される，とみなすのが便利である（このことはしかし，絶対必要というわけではない）．2.1節ですでに注意したように，群 $SL(2)$ の任意の実の既約表現は，$D(j, j)$ か，あるいは

$$D(j_1, j_2) \oplus D(j_2, j_1) \qquad (j_1 \neq j_2) \tag{5.3.2}$$

の形をもつ．ここに j は整数または半整数である（第2章4.1節を見よ）．これらの各表現の行列 $V^\alpha_\beta(A)$ は，適当に選んだ基底に関して，実の行列である．そのことを確かめるために，表現 (5.3.2) の各々は次の双スピノル表現

$$D\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right) \tag{5.3.3}$$

の直積の分解によって得られることに注意しよう．ところでこの表現（5.3.3）については，第2章4.4節で見たように，行列 γ^μ の0でない行列要素が純虚数になるようなMajorana 基底に関しては，表現行列 $V(A)$ は実である．ただこのような基底に関してのみ，場のエルミート共役の概念が不変な意味をもつことに注意しよう（この基底では，(2.4.33) および (3.4.58) によって，エルミート共役は荷電共役に一致する）．

(5.3.1) の代わりにもっと一般的な〈局所理論〉を考えることもできた．すなわち

$$\psi_k^\alpha(x)\psi_l^\beta(y)=M_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}\psi_l^\delta(y)\psi_k^\gamma(x) \qquad ((x-y)^2<0\text{のとき}) \tag{5.3.4}$$

のような形を仮定する．(5.3.4) を二回繰り返して適用したとき場 ψ_k に対する新たな制限が生じないためには，任意の k と l に対し $M_{kl}^2=1$，もっと詳しく書けば，

$$M_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}M_{kl\beta'\alpha'}^{\delta\gamma}=\delta_{\alpha'}^\alpha\delta_{\beta'}^\beta \tag{5.3.5}$$

が成り立つことを要求しなければならない．さらに，関係 (5.3.4) が Lorentz 共変であるためには，行列 M_{kl} は，(5.3.4) の左辺がそれに従って変換されるスピノル群の表現の行列 $V_k(A)\otimes V_l(A)$ と可換である，という要求を置かなければならない．すなわち

$$V_k(A)\otimes V_l(A)M_{kl}=M_{kl}V_k(A)\otimes V_l(A). \tag{5.3.6}$$

明らかに，条件 (5.3.5) と (5.3.6) は，特別の場合 (5.3.1)——この場合には

$$M_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}=\sigma_{kl}\,\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta \tag{5.3.7}$$

である——に対しては，自動的にみたされている．

行列 M_{kl} が基底 (5.3.4) に関して対角的で，その対角要素が ±1 であるなら，この行列は (5.3.7) の形，すなわち二つの単位行列の Kronecker 積になっていることを示そう．

いま $I_{kl\gamma\delta}^{\alpha\beta}=\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta$ と書こう．明らかに，上の仮定のもとで行列

$$\frac{1}{2}(I_{kl}\pm M_{kl})=\Pi_\pm$$

は対角的な射影演算子で，それは表現 $V_k\otimes V_l$ のすべての行列と可換である．もしその両方とも0でなかったとすると，表現 $V_k\otimes V_l$ は可約であることになり，この表現のすべての行列はブロックに分かれた形をもつ．従って少なくとも一つの行列要素 $(\alpha_0\beta_0,\gamma_0\delta_0)$ は恒等的に0である：

$$\text{すべての } A\in SL(2) \text{ に対し}\quad V_k(A)_{\gamma_0}^{\alpha_0}V_l(A)_{\delta_0}^{\beta_0}=0. \tag{5.3.8}$$

他方において，行列要素 $V_j(A)_\beta^\alpha$ は群 $SL(2)$ 上の実解析的関数だから，(5.3.8) の因子のうち少なくとも一つは恒等的に0でなければならない．そこで $V_k(A)_{\gamma_0}^{\alpha_0}\equiv0$ と仮定しよう．また，γ_0 成分だけが0でないベクトルの張る一次元の部分空間を $R\gamma_0$ と書こう．そのとき $V_k(A)f$（ただし $A\in SL(2)$, $f\in R\gamma_0$）の形のベクトルの一次結合の全体は，自明でない不変部分空間をつくる（この空間のベクトルは α_0 成分が0である）．こうしてわれわれは，表現 V_k は実数体上で可約であるという結論に達するが，これははじめの仮定に反する．

3.2. 一種類の場を含む理論において正常でない交換関係は不可能であること

はじめに，一つの補助的な命題を述べよう．この命題は，以下の議論においてたびたび

用いられる.

[補題 5.3.1]　$\phi(x)$ を局所場（場がスカラーでなければ場の成分の一つ）とするとき，もし

$$\phi(x)\Psi_0 = 0 \tag{5.3.9}$$

が成り立つなら，そのときは $\phi(x) \equiv 0$ である.

証明.　ϕ を因子の一つとして含むような場の任意の積の真空期待値 w_n を考えよう. すべての Jost 点 $(x_1-x_2, \cdots, x_j-x, x-x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}-x_n) \in J_n$ において，(5.3.9) により

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_j(x_j)\phi(x)\varphi_{j+1}(x_{j+1}) \cdots \varphi_n(x_n)\Psi_0)$$
$$= \pm(\Psi_0, \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)\phi(x)\Psi_0) = 0$$

Jost 点は，Wightman 関数が解析的である領域の実の点である. 従ってこのことから，$\phi(x)$ を含むすべての可能な真空期待値の解析接続は恒等的に 0 になることが導かれる（従って，はじめの真空期待値自身が 0 である）. $\{\varphi_j\}$ として場の完全系を選べば，実は $\phi(x) \equiv 0$ であることが結論できる. 証明終わり.

スピンと統計の関係の問題に移る前に，与えられた場 φ とほかの場 ϕ との交換関係と，φ と ϕ のエルミート共役 ϕ^* との交換関係とは，関係があることを示そう.

[定理 5.3.1]　もし $\varphi(x) \neq 0$ なら，交換関係

$$\varphi(x)\phi(y) = \sigma\phi(y)\varphi(x), \qquad \varphi(x)\phi^*(y) = -\sigma\phi^*(y)\varphi(x) \tag{5.3.10}$$

ただし，$(x-y)^2 < 0$ $(\sigma^2 = 1)$ から $\phi(x) \equiv 0$ が結論できる.

証明.　f, g を任意の基礎関数として次の関係が成り立つ：

$$(\Psi_0, \varphi^*(f)\phi^*(g)\phi(g)\varphi(f)\Psi_0) = \|\phi(g)\varphi(f)\Psi_0\|^2 \geqslant 0. \tag{5.3.11}$$

もし関数 f, g の台が空間的にへだたっていれば，(5.3.10) から，

$$(\Psi_0, \varphi^*(f)\phi^*(g)\phi(g)\varphi(f)\Psi_0) = -(\Psi_0, \phi^*(g)\phi(g)\varphi^*(f)\varphi(f)\Psi_0) \tag{5.3.12}$$

が導かれる. ここでクラスター分解に関する定理（定理 3.2.3）を用いると，もし関数 f と g がコンパクトな台をもつなら $g_\lambda(x) = g(x-\lambda a)$, $a^2 = -1$, $\lambda > 0$ と置いて，

$$-\lim_{\lambda\to\infty} (\Psi_0, \phi^*(g_\lambda)\phi(g_\lambda)\varphi^*(f)\varphi(f)\Psi_0) = -\|\phi(g)\Psi_0\|^2 \|\varphi(f)\Psi_0\|^2 \leqslant 0 \tag{5.3.13}$$

がいえる.

(5.3.11) と (5.3.13) とを比較すると，(5.3.13) の極限は実は 0 であることがわかる. このことから，補題 5.3.1 と $\varphi(x) \neq 0$ という仮定を用いて，$\phi(x) = 0$ が結論できる. これで定理は証明された.

特に，この定理から，

$$\varphi(x)\varphi(y)=\sigma\varphi(y)\varphi(x),\qquad \varphi(x)\varphi^*(y)=-\sigma\varphi^*(y)\varphi(x)$$

をみたすような0でない場 $\varphi(x)$ は存在しないことが導かれる．別の言葉でいうと，もし局所場 φ が局所的に（反）可換なら，それはまた φ^* とも局所的に（反）可換である．

定理5.3.1を用いると，複素場 $\phi(x)$ と $\phi^*(x)$ の局所性から場 ϕ の実部と虚部の局所性を結論できることに注意しよう．その上この定理によれば，局所性の条件（5.3.1）はゲージ変換（3.4.30）の群に対して不変である．

さて，この節の主要な結果を述べよう．それはスピンと統計に関する定理で，これによると，一種類の場に対しては正常でない交換関係は禁止される．

［定理5.3.2］ $\phi(x)$ は複素場で，群 $SL(2)$ の任意の既約表現 $D(j/2,k/2)$ に従って変換されるものとする．そのとき，もし

$$\phi_\alpha(x)\phi_\alpha^*(y)=-(-1)^{j+k}\phi_\alpha^*(y)\phi_\alpha(x)\qquad ((x-y)^2<0 \text{ のとき})\tag{5.3.14}$$

が成り立てば，$\phi_\alpha(x)\equiv 0$ である[1]．

証明.　われわれは終始同じ一つの成分 α を問題にするので，以下この添え字 α をいちいち書かないことにする．Wightman 関数の一組

$$F_1(x-y)=(\Psi_0,\phi(x)\phi^*(y)\Psi_0),\tag{5.3.15 a}$$

$$F_2(x-y)=(\Psi_0,\phi^*(x)\phi(y)\Psi_0)\tag{5.3.15 b}$$

を考えよう．(5.3.14) によれば，$\xi^2<0$ のとき

$$F_1(\xi)+(-1)^{j+k}F_2(-\xi)=0\tag{5.3.16}$$

が成り立つ．

等式（5.3.16）は，解析接続によって，もっと広い管状領域 $\mathscr{T}_1$ にまで拡大される．

さらに，解析的 Wightman 関数の（時空反転 PT を含む）複素 Lorentz 群に対する共変性（定理5.1.2）から

$$F_2(-\zeta)=(-1)^{j+k}F_2(\zeta)\tag{5.3.17}$$

が出る．(5.3.17) における符号は，定理の条件，すなわち関数 F_2 は Lorentz 群の表現 $D(k/2,j/2)\otimes D(j/2,k/2)$ の解析接続に従って変換される，ということから得られる．複素 Lorentz 群に対応するスピノル群 $SL(2)\otimes SL(2)$ において四つの軸の反転の表現に

---

[1] もし場 $\phi(x)$ が表現 $D(j/2,k/2)$ に従って変換されるなら $\phi^*(x)$ は共役表現 $D(k/2,j/2)$ に従って変換され，その結果場 ϕ と ϕ^* の組は実の表現 $D(j/2,k/2)\oplus D(k/2,j/2)$ に従って変換される．

対応するものは，(5.1.6) により，表現 $(A, B)=(-\sigma_0, \sigma_0)$ であることを思いだそう．

(5.3.16) と (5.3.17) とから

$$F_1(\zeta)+F_2(\zeta)=0 \tag{5.3.18}$$

が出てくる．ここで $\mathrm{Im}\,\zeta\to -0$ の極限をとることにより実の x, y に移ると，

$$(\Psi_0, \psi(x)\psi^*(y)\Psi_0)+(\Psi_0, \psi^*(x)\psi(y)\Psi_0)=0 \tag{5.3.19}$$

が得られる．この両辺に基礎関数 $\bar{f}(x)f(y)$ をかけて積分すると

$$\|\psi^*(f)\Psi_0\|^2+\|\psi(f)\Psi_0\|^2=0 \tag{5.3.20}$$

を得る．これから，補題5.3.1を用いて，$\psi(x)=0$ が結論される．これで定理5.3.2は証明できた．

この定理によると，整数スピンの局所場（特にスカラー場）は Bose 統計に従わなければならないことになる（すなわち空間的にへだたった点の場は可換である）．これに対し半整数スピンの場は Fermi 統計に従わなければならない（したがって局所反可換である）．

3.3. 二種以上の場がある場合のスピンと統計．Klein の変換

すでに注意したように，二種以上の場がある場合には，スピンと統計のあいだに正常でない関係が生じうる．しかし，そのさいに，超選択則と，Wightman 関数に対してこの正常でない交換関係からでてくる新しい対称性の規則とを用いることによって，スピンと統計の関係が正常な新しい場を導入することができる．この命題の一般の場合の証明は（主として組み合わせ論的な複雑さのために）かなり長いので，われわれはいくつかの例を研究するだけにする[1]．

1) 正常でない交換関係の第一の例として，スカラー場 φ と Diracのスピノル場 ψ とから成り立っている系をとり，空間的にへだたった点のこれらの場が反可換である場合を考えよう．すなわち

$$[\varphi(x), \psi(y)]_+=0, \qquad \text{ただし}\ (x-y)^2<0. \tag{5.3.21}$$

この理論の状態ベクトル空間は（スピノル粒子を含むどの理論でも同じことだが）次のような直和の形に書き表わされる：

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2 \tag{5.3.22}$$

ここに $\mathscr{H}_1$ は整数スピンの状態ベクトルからなる部分空間，$\mathscr{H}_2$ は半整数スピンの状態ベクトルからなる部分空間である．第2章1.3節ですでに注意したように，分解(5.3.22)に

[1] 一般の場合の立ち入った研究は，教科書［2］と［3］に載っている．

は（いまの場合物理的状態の一価性から出てくる）一つの超選択則が対応し，その結果，物理的に実現しうる状態で二つの部分空間 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ への射影がいずれも0でないようなものは存在しない．

分解（5.3.22）に対応して，すべての場の演算子に共通な稠密な定義域 Ω もまた，直和 $\Omega_1 \oplus \Omega_2$ に分解される（$\Omega_1 \subset \mathscr{H}_1, \Omega_2 \subset \mathscr{H}_2$）．ここで新しい演算子 φ' と ψ' を，次の式によって定義しよう：

$$\psi'(x) \equiv \psi(x), \qquad \varphi'(x)\Psi_1 = \varphi(x)\Psi_1, \qquad \varphi'(x)\Psi_2 = -\varphi(x)\Psi_2. \quad (5.3.23)$$

ここに $\Psi_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$．場 φ と ψ とからつくられるすべての Wightman 関数が，φ を φ' で，ψ を ψ' で置き換えることによって得られる Wightman 関数と一致することは，容易に確かめられる．

問題　5.3.1　場 φ' と ψ' とが正常な交換関係をみたすこと，すなわち空間的にへだたった二点の場は可換であることを示せ．

変換（5.3.23）は，（上の例に適用された）《Klein 変換》とよばれる．これを単に，観測量を表現するための場の変数変換と考えることもできる．Klein 変換は，交換関係を保存しないので，$\varphi' = V\varphi V^{-1}$ の形のユニタリ変換ではないことに注意しよう．

上に考察した例の特殊性は次のような事情にある．すなわちこの場合，正常でない交換関係が新しい対称性の関係（あるいは超選択則）を導くことはなかった．次に述べる二つの例では，この事情がちがう．

2)　$\varphi(x)$ をエルミートなスカラー場，$\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ はエルミートなスピノル場（Majorana 場）であるとしよう．そして正常な交換関係

$$(x-y)^2 < 0 \text{ のとき，} \quad [\psi_1(x), \psi_2(y)]_+ = 0 = [\varphi(x), \psi_2(y)]_- \quad (5.3.24)$$

とならんで，正常でない交換関係

$$(x-y)^2 < 0 \text{ のとき，} \quad [\varphi(x), \psi_1(y)]_+ = 0 \quad (5.3.25)$$

が成り立っていると仮定しよう．これらの仮定のもとで，ある種の真空期待値は0であることを示そう．その目的のために，次の補助的命題を用いる（定理 3.2.3（第3章2.3節）の応用例と比較せよ）．

[補題 5.3.2]　$M(x_1, \cdots, x_j)$ と $N(y_1, \cdots, y_k)$ は二つの単項式（すなわち場の成分の積）で，(x) のどの点も (y) のすべての点と空間的にへだたっているとき反可換であるとする．このとき，$(\Psi_0, M\Psi_0) = 0$ であるか，あるいは $(\Psi_0, N\Psi_0) = 0$

である．

証明． a を，空間的ベクトルで，十分大きい絶対値をもつものとしよう．そのとき，補題の仮定を用いると

$$(\Psi_0, M(x_1, \cdots, x_j)N(y_1+a, \cdots, y_k+a)\Psi_0)$$
$$+(\Psi_0, N(y_1+a, \cdots, y_k+a)M(x_1, \cdots, x_j)\Psi_0) = 0.$$

この等式の $a^2 \to -\infty$ の極限は，クラスター分解の定理（定理3.2.3）によって次の形をもつ：

$$(\Psi_0, M\Psi_0)(\Psi_0, N\Psi_0)+(\Psi_0, N\Psi_0)(\Psi_0, M\Psi_0) = 0. \tag{5.3.26}$$

これから，補題5.3.2の結論がただちに出てくる．

われわれの例にもどって，ある整数 n に対し

$$(\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{2n+1})\Psi_0) \neq 0 \tag{5.3.27}$$

であったと仮定しよう．また，次のようにとろう：

$$M = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{2n+1}),$$
$$N = N_{jkl} = \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_j)\psi_1(y_{j+1}) \cdots \psi_1(y_{j+2k+1}) \tag{5.3.28}$$
$$\times \psi_2(y_{j+2k+2}) \cdots \psi_2(y_{j+2k+2l}).$$

(5.3.24) と (5.3.25) によって，単項式 M と N は，変数が空間的にへだたっているとき反可換である．従って補題5.3.2を適用することができ，このとき (5.3.27) の仮定を用いると，

$$(\Psi_0, N_{jkl}(y_1, \cdots, y_{j+2k+2l})\Psi_0) = 0 \qquad (j, k, l-1 = 0, 1, \cdots, n) \tag{5.3.29}$$

が得られる．

他方，Wightman 関数の一価性（第3章2.1節）により，奇数個のスピノル場 ψ_1, ψ_2 と（そのほかに任意個のスカラー場 φ）を含む真空期待値は0である．(5.3.29) と合わせて，このことから，理論の全体は次の四つの変換

$$(\psi_1, \psi_2) \to (\sigma_1\psi_1, \sigma_2\psi_2) \qquad (\sigma_1, \sigma_2 = +, -) \tag{5.3.30}$$

からなる群に対して不変であることが結論される．

この対称性は，《偶奇則》ともよぶべき一つの保存則に導く（タイプ ψ_1 の粒子とタイプ ψ_2 の粒子の個数の偶奇は保存される）．

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ は，四つの互いに直交する部分空間 $\mathscr{H}_{\sigma_1\sigma_2}$ の直和に分解される．これらの部分空間をはるベクトルは，

$$\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_j)\psi_1(x_{j+1}) \cdots \psi_1(x_{j+k})\psi_2(x_{j+k+1}) \cdots \psi_2(x_{j+k+l})\Psi_0 \tag{5.3.31}$$

の形で，k と l の偶奇が各部分空間に応じて次のように定まっている．すなわち

$$k=2k_1,\ l=2l_1 \text{ のとき，}\quad \mathscr{H}_{++}$$
$$k=2k_1,\ l=2l_1+1 \text{ のとき，}\quad \mathscr{H}_{+-}$$
$$k=2k_1+1,\ l=2l_1 \text{ のとき，}\quad \mathscr{H}_{-+}$$
$$k=2k_1+1,\ l=2l_1+1 \text{ のとき，}\quad \mathscr{H}_{--}.$$

これらの部分空間の直交性は，等式 (5.3.29) と Wightman 関数の一価性によって保証されている．

さて，Klein 変換を，この場合，ϕ_1 と ϕ_2 は変えずに φ を φ' で置き換える変換として定義しよう．ただし φ' は，$\mathscr{H}_{+\sigma_2}$ では φ に，$\mathscr{H}_{-\sigma_2}$ では $-\varphi$ に等しいとする．

問題 5.3.2 上のように定義された φ' と ϕ_1, ϕ_2 とは正常な交換関係をみたすことを示せ．

例2) に対応する理論の二つの等価な記述のうち，第二のもの（場 φ', ϕ_1, ϕ_2 を用いる）の方が，より自然に思われる．なぜなら，はじめにとった組 $(\varphi, \phi_1, \phi_2)$ に対してはエルミート演算子 $\varphi(x)$ と $\phi_1(y)\phi_2(z)+\phi_2(z)\phi_1(y)$ とは空間的に遠くへだたった点においてさえ可換でないからである．これに対し，φ', ϕ_1, ϕ_2 の組は局所可換である．

3) $\varphi(x)$ と $\phi(y)$ が二つの局所可換なエルミートのスカラー場であって，

$$(\Psi_0, \varphi(x)\phi(y)\Psi_0) \neq 0 \tag{5.3.32}$$

であるような例は，いちばん簡単な例かもしれない．

問題 5.3.3 補題5.3.2を用いて次のことを示せ．奇数個の場を含む真空期待値はすべて0である．またこの場合の Klein 変換は $\phi'=\phi$，$\varphi'=\sigma\varphi$ という形をもち，ここに σ は，真空に偶数個の均らした場を作用させて得られるベクトルに対しては $+1$，奇数個の場を作用させて得られるベクトルに対しては -1 である．

この最後の例は，Klein 変換がエルミートの場を非エルミートの場に変換しているという点で教訓的である．実際，場のエルミート性から

$$(\Psi_0, \varphi(x)\phi(y)\Psi_0) = (\varphi(x)\Psi_0, \phi(y)\Psi_0).$$

ところが場 φ' と ϕ' の定義から次の等式が得られる．

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \varphi'(x)\phi'(y)\Psi_0) &= -(\Psi_0, \varphi(x)\phi(y)\Psi_0)\\ &= -(\varphi(x)\Psi_0, \phi(y)\Psi_0) = -(\varphi'(x)\Psi_0, \phi'(y)\Psi_0).\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

これは場 φ' がエルミートでないことを示している．

最後に，次のことを注意しよう．場の交換関係が正常でない理論の TCP 不変性は，変

換された場 φ'_k のあいだに正常な交換関係が成り立つような理論の TCP 不変性から，結果として出てくる．ただしこの場合，もとの場 φ_k に対する TCP 変換の法則は (5.2.23) とは一致しない．それは，三番目の例で確かめたように，Klein 変換によってエルミート性は保存されないからである．

3.4. パラ統計

3.1 節ですでに注意したように，一種類の場から成り立っている系の状態ベクトルが完全対称あるいは完全反対称でなければならないという仮説は，（二個の）粒子が物理的に区別できないという仮説よりも，ずっと強い仮定である．

理論的には，もっと別のタイプの対称性が可能であり，それに対応して別の統計（《パラ統計》）が可能である．自由場の量子論においては，Bose 場や Fermi 場に対する普通の正常な交換関係の代わりに，場の成分のあいだに第三の交換関係を用いることは，まったく勝手にできる．このようにして，《パラ場》が定義される．この節の目的は，パラ場の理論の概要を読者に紹介することである．この理論が，クォーク仮説に関連して物理学者の関心をひくようになったのは最近のことである(Greenberg (1964)，Govorkov (1966 a, b) を参照)．またこの節で，TCP 定理の成立を保証するパラ局所性の条件を定式化し，さらにスピンと統計の関係に関する定理のパラ場に対する一般化を与える．

本論に入る前に三つの注意をしておく．

1) 次の A 節で簡単に紹介するパラ場の理論と，一般化された統計との関係は，Bose=Einstein 統計や Fermi=Dirac 統計のときほど簡単でない（この点に関しては Galindo and Yndurain (1963) および Greenberg (1965) を見よ）．

2) Greenberg と Messiah (1965) の分析が示したように，一見したところでは，知られている粒子のうちのいずれもパラ粒子ではないように見える（しかし，パラ場に関する選択規則から導かれる結論については Feshbach and Tomljanovich (1967) の議論を見よ）．

3) パラ統計に関連して得られた結論は，前節に引用したスピンと統計の関係に関する研究がそうであったのと同様に，まだ完全に仕上げられたものではない．前節の研究は，許される自然な統計は Bose 統計か Fermi 統計のいずれかであるという仮定に基づいてなされたものであった．

A. 自由なパラ場および Green のパラ交換関係　ここで，Fock の状態ベクトル空間に離散的な正規直交基底を入れて考えると都合がよい．特に，一粒子状態は添え字 ν で番

号づけられているとしよう（νは量子数の組と考えてよい．たとえば（2.5.11）を参照）．状態$|\nu\rangle$を真空からつくりだす生成演算子 a^*_ν と，それに共役な消滅演算子 a_ν を導入しよう．Bose 統計の場合も Fermi 統計の場合も，状態$|\nu\rangle$にある粒子の個数を表わす演算子を

$$n_\nu = a^*_\nu a_\nu = \frac{1}{2}(a^*_\nu a_\nu - \sigma a_\nu a^*_\nu + \sigma) \tag{5.3.34}$$

によって導入することができる．ここに，Bose 粒子に対しては $\sigma = -1$，Fermi 粒子に対しては $\sigma = 1$ である．n_ν と生成・消滅演算子とのあいだの交換関係は統計のいかんによらない，すなわち演算子 a どうしが可換であるか反可換であるかによらない．どちらの場合にも，その交換関係は次の形をもつ：

$$[n_\mu, a^*_\nu] = \delta_{\mu\nu}a^*_\nu, \quad [a_\nu, n_\mu] = \delta_{\mu\nu}a_\nu. \tag{5.3.35}$$

一般化された統計（《パラ Bose》あるいは《パラ Fermi》）に対応した自由場の理論においても上の関係がそのまま成り立つと要求することは自然である．ただし，普通の統計の場合を除き，（5.3.34）の二番目の等式はもはや成立せず，n_ν としては，（5.3.34）の最右辺で与えられるような対称化（あるいは反対称化）された表現を採用するのが便利である．Green (1953) に従って，われわれはもっときびしい交換関係

$$[a^*_\lambda a_\mu - \sigma a_\mu a^*_\lambda, a_\nu]_- = -2\delta_{\lambda\nu}a_\mu, \tag{5.3.36 a}$$

$$[a_\lambda a_\mu - \sigma a_\mu a_\lambda, a_\nu]_- = 0 \tag{5.3.36 b}$$

を仮定することにしよう．ここでσは，（5.3.34）におけると同じ意味とする．（5.3.35）は，この交換関係から出てくる[1]．

問題　5.3.4　（5.3.36）から次の関係が得られることを示せ．

$$[a_\lambda a_\mu - \sigma a_\mu a_\lambda, a^*_\nu] = 2(\delta_{\mu\nu}a_\lambda - \sigma\delta_{\lambda\nu}a_\mu) \tag{5.3.37}$$

（ヒント：Jacobi の恒等式

$$[[A,B]_\varepsilon, C]_- + [[C,A]_\varepsilon, B]_- + [[B,C]_\varepsilon, A]_- = 0 \tag{5.3.38}$$

を用いよ．ただし $[A,B]_\varepsilon = AB + \varepsilon BA, \varepsilon = \pm$）．

（5.3.36）～（5.3.38）から，さらに一連の同様の交換関係（およびそのエルミート共役をとって得られる交換関係）が出てくる．

---

[1] Bialynicki-Birula (1963) が示したように，交換関係（5.3.35）がユニタリ変換に対して不変であることを要求するなら，交換関係（5.3.36）は，粒子数の演算子を使って書いた自由場のハミルトニアンの通常の表現：$H = \sum_\nu \overline{\omega}_\nu n_\nu$ から得られる．ここに $\overline{\omega}_\nu$ は，状態$|\nu\rangle$でとったエネルギーの平均値である．

もし，状態 ν の粒子数の演算子を等式

$$n_\nu = \frac{1}{2}[a_\nu^*, a_\nu]_{-\sigma} + C_\sigma = \frac{1}{2}(a_\nu^* a_\nu - \sigma a_\nu a_\nu^*) + C_\sigma \qquad (5.3.39)$$

によって定義するなら（定数 C_σ は条件 $n_\nu|0\rangle = 0$ によって決まる），そのときには，交換関係（5.3.35）は（5.3.36）からその特別の場合として得られる．

σ の符号の各々に対して，（5.3.36）をみたし，かつ自然数 p によって番号づけられる可算個の互いに等価でない場が存在する．与えられた p に対し，演算子 a_ν はいわゆる《Green の仮定》

$$a_\nu = \sum_{\alpha=1}^{p} b_\nu^{(\alpha)} \qquad (5.3.40)$$

によって与えられる．ここで，与えられた α に対し，場 $b_\nu^{(\alpha)}$ は交換関係

$$[b_\mu^{(\alpha)}, b_\nu^{*(\alpha)}]_\sigma = \delta_{\mu\nu}, \quad [b_\mu^{(\alpha)}, b_\nu^{(\alpha)}]_\sigma = 0 \qquad (5.3.41)$$

およびこれと符号が逆の交換関係

$$[b_\mu^{(\alpha)}, b_\nu^{*(\beta)}]_{-\sigma} = [b_\mu^{(\alpha)}, b_\nu^{(\beta)}]_{-\sigma} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \qquad (5.3.42)$$

をみたす．Fock 空間における演算子 a_ν の（ユニタリ同値を除いて）一意の表現をとりだすために，すべての $b_\nu^{(\alpha)}$ が真空のベクトルを 0 にすることを要求しよう：

$$\text{すべての } \nu \text{ と } \alpha \text{ に対して,} \quad b_\nu^{(\alpha)}|0\rangle = 0. \qquad (5.3.43)$$

演算子 $b_\nu^{*(\alpha)}$ がはたらく Hilbert 空間 $\mathcal{B}_\sigma^{(p)}$ は，通常のやり方に従って，$P(b^*)|0\rangle$ の形のベクトルの集合の完備化として定義される．ここに P は，生成演算子 $b_\nu^{*(\alpha)}$ からつくられる任意の多項式である．（5.3.40）を用いると，空間 $\mathcal{B}_\sigma^{(p)}$ において，はじめに考えた演算子 a_ν と a_ν^* のつくる代数の一つの表現を実現することができる．その表現では，交換関係（5.3.36）とならんでまた次の条件が成り立つことになる：

$$a_\nu|0\rangle = 0, \qquad (5.3.44)$$

$$a_\mu a_\nu^*|0\rangle = p\delta_{\mu\nu}|0\rangle. \qquad (5.3.45)$$

問題 5.3.5 （5.3.44）と（5.3.45）が成り立っている表現において，粒子数の演算子（5.3.39）は，

$$n_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu^* a_\nu - \sigma a_\nu a_\nu^* + \sigma p) \qquad (5.3.46)$$

の形に書けることを示せ（すなわち，条件 $n_\nu|0\rangle = 0$ から決まる定数 C_σ は $(1/2)\sigma p$ に等しい）．

空間 $\mathcal{B}_\sigma^{(p)}$ における演算子 a_ν^* の代数の表現が可約であることは容易にわかる．

この事情は，有限次元の場合（すなわち添え字 ν が有限個の値をとる場合）にも生ずる．《Duffin=Kemmer》代数はそのもっとも簡単な例である．この例では，$p=2$ で，ν のとりうる値は二つである．Duffin=Kemmer 代数の行列表現を考えよう．そして

$$b_1^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\gamma_1^{(\alpha)} - \gamma_2^{(\alpha)}), \qquad b_2^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\gamma_0^{(\alpha)} - \gamma_3^{(\alpha)}) \qquad (\alpha = 1, 2) \quad (5.3.47)$$

にとろう．

定義によって

$$[\gamma_\mu^{(1)}, \gamma_\nu^{(2)}] = 0 \qquad (\mu, \nu = 0, \cdots, 3) \quad (5.3.48)$$

である．

問題　5.3.6　行列

$$a_j = b_j^{(1)} + b_j^{(2)} \quad (5.3.49)$$

およびそのエルミート共役 a_j^* は，パラ・フェルミ場に対する交換関係（すなわち (5.3.36) で $\sigma=+$ の場合）をみたすことを示せ．

三つの量の置換の形で表わされる Duffin=Kemmer の標準的な関係（たとえば [39]，第5章§2を見よ）を得るために，次の公式によって行列 β_μ を定義しよう：

$$\beta_0 = \frac{1}{2}(a_2 + a_2^*), \quad \beta_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(a_1 + a_1^*), \quad \beta_2 = \frac{1}{2}(a_1^* - a_1),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2}(a_2^* - a_2) \quad (5.3.50)$$

問題　5.3.7　次の式が成り立つことを示せ．

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = g_{\lambda\nu}\beta_\mu + g_{\mu\nu}\beta_\lambda \quad (5.3.51)^{1)}$$

交換関係 (5.3.36) あるいは (5.3.51) の表現 (5.3.49)，(5.3.52) が可約であることを直接に検証するのは容易である（[39] 第5章§2を見よ）．この表現は16次元である．実際，(5.3.48) が成り立つためには，$\gamma_\mu^{(\alpha)}$ を Kronecker 積

$$\gamma_\mu^{(1)} = \gamma_\mu \otimes \mathbf{1}, \qquad \gamma_\mu^{(2)} = \mathbf{1} \otimes \gamma_\mu \quad (5.3.53)$$

として定義しなければならない．この表現は三つの既約な表現に分解される．一つは10次元，一つは5次元で，残りの一つは1次元であるが，この最後のものは特に興味の対象にはならない．この最後のものを別にすれば，10次元表現だけが，

---

1)

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}) \quad (5.3.52)$$

に注意すれば，(2.4.6) と (5.3.48) から直ちに (5.3.51) が得られる．

$$a_1|0\rangle = a_2|0\rangle = 0$$

の条件を満足する一意的真空をもつことに注意しよう．この事実は一般的性格のものである．すなわち，空間 $\mathcal{B}_0^{(p)}$ には，演算子 a_ν, a_ν^* の代数に関して不変であり，かつ (5.3.44) をみたす一意的な真空ベクトルを含む一つの，しかもただ一つの真部分空間 $\mathcal{H}_0^{(p)}$ が存在する．

問題 5.3.8 Duffin-Kemmer 代数の 10 次元表現の空間 $\mathcal{H}^{(2)}$ において，規格化されていない基底を次の公式によって（すなわち演算子 $b_j^{(\alpha)}$ を用いることなしに）与えることができることを示せ．

$$|0\rangle,\quad a_j^*|0\rangle,\quad a_j^*a_k^*|0\rangle,\quad a_1^{*2}a_2^*|0\rangle = -a_2^*a_1^{*2}|0\rangle,$$
$$a_1^*a_2^{*2}|0\rangle = -a_2^{*2}a_1^*|0\rangle,\quad a_1^{*2}a_2^{*2}|0\rangle \qquad (j, k = 1, 2)$$

（ヒント：$p=2$ のパラ統計の場合，交換関係 (5.3.36) はもっと簡単な関係

$$a_\lambda a_\mu^* a_\nu + \sigma a_\nu a_\mu^* a_\lambda = 2(\delta_{\lambda\mu}a_\nu + \sigma\delta_{\mu\nu}a_\lambda),$$
$$a_\lambda^* a_\mu a_\nu + \sigma a_\nu a_\mu a_\lambda^* = 2\sigma\delta_{\lambda\mu}a_\nu,$$
$$a_\lambda a_\mu a_\nu + \sigma a_\nu a_\mu a_\lambda = 0 \tag{5.3.54}$$

によって置き換えられ得るという事実を用いよ）．

Greenberg と Messiah (1965) は次のことを示した．(5.3.44) をみたし，かつ一意的で巡回的な真空を含む空間において，交換関係 (5.3.36) のすべての既約な表現は，p をある正の整数として (5.3.45) の関係をみたす．またそれらは等式 (5.3.44)，(5.3.45) により，ユニタリ同値を除いて決定される．このような既約表現の各々は，空間 $\mathcal{B}_0^{(p)}$ において Green の関係 (5.3.40) で与えられる可約な表現のうちに成分として含まれている．特に $p=1$ のときは，通常の Bose 統計および Fermi 統計が得られる．

B. パラ局所場に対する *TCP* 定理およびスピンとパラ統計の関係に関する定理 パラ場の局所性を定式化するために，Green の仮定 (5.3.40) を次のように一般化したものを用いよう．すなわち，われわれは (Dell'Antonio et al. (1962) にならって) 相互作用しているパラ局所場 $A(x)$ をいくつかの場の和として

$$A(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} B^{(\alpha)}(x) \tag{5.3.55}$$

のように定義しよう．ここに $B^{(\alpha)}$ は，正常でない次のような局所性条件をみたしているものとする：

$(x-y)^2 < 0$ のとき，

$$[B^{(\alpha)}(x), B^{(\alpha)}(y)]_\sigma \equiv B^{(\alpha)}(x)B^{(\alpha)}(y) + \sigma B^{(\alpha)}(y)B^{(\alpha)}(x) = 0, \tag{5.3.56}$$
$$(1-\delta_{\alpha\beta})[B^{(\alpha)}(x), B^{(\beta)}(y)]_{-\sigma} = 0 \tag{5.3.57}$$

（これらを (5.3.41)，(5.3.42) と比較せよ）．この定義，および正常でない交換関係をもつ場の系に対する（3節の）分析から，ただちに，パラ場に対しても TCP 定理の成り立つことが導かれる．

これらの定義に関連して，次のことに注意しよう．すなわち，要請 (5.3.55)～(5.3.57) を用いたことによって，われわれは，広い空間 $\mathcal{D}_0^{(p)}$ においては補助的な場 $B^{(\alpha)}$ に対しある種の制限を課したことになっている．しかしながら，状態ベクトルのつくる物理的空間 $\mathcal{H}_0^{(p)}$ においては，そのような制限は存在しない．パラ場 A がはたらくのはこの空間である．(5.3.57) の制限は特に強いもので，異なった $B^{(\alpha)}$ 場のあいだには相互作用が存在しないという仮定と等価である．これに加えて，Green の仮定がパラ交換関係のすべての表現をつくしていることは，ただ自由場に対してのみ証明されていることを思い起こそう[1]．しかも，パラ場 A の定義そのもののなかに場 $B^{(\alpha)}$ の系を導入していることは，事実上パラ場をある定まった内部対称性をもつ通常の (Bose あるいは Fermi) 場の系に帰着させることである (Govorkov (1966 a, b) を見よ)．これらすべてのことは，パラ場に対する TCP 定理およびスピンとパラ統計の関係に関する定理の研究をいくらか予備的性格のものにしている．

問題　5.3.9　(5.3.55)～(5.3.57) から，パラ場 A に対する局所的パラ交換関係

$$[[A(x), A(y)]_{-\sigma}, A(z)] = 0 \qquad (5.3.58)$$

が得られることを示せ．ただし，$(x-z)^2 < 0$ と $(y-z)^2 < 0$ が同時に成り立っているものとする．

〈要素的な場〉$B^{(\alpha)}(x)$ に対する Wightman 関数を研究するさいには，次の補題が役立つ．

> **[因数分解に関する補題]**　いろいろな α の場 $B^{(\alpha)}(x)$ からなる積の真空期待値は，それぞれ一つの α の B 場だけが現われるような真空期待値をかけあわせた積に等しい．

この補題の証明はしないが，二種類のパラ Bose 場 $B^{(1)}$ と $B^{(2)}$ が存在するという特別の場合を，例として示すことにする．

問題　5.3.10　次の関係が成り立つことを示せ．

$$\langle 0 | B^{(1)}(x_1) B^{(1)}(x_2) B^{(1)}(x_3) B^{(2)}(x_4) B^{(2)}(x_5) B^{(2)}(x_6) | 0 \rangle$$

---

[1] 局所性とパラ局所性が等価であることも，ただ自由なパラ場に対してのみ証明されている (Araki et al. (1966) を見よ)．

$$= \langle 0 | B^{(1)}(x_1) B^{(1)}(x_2) B^{(1)}(x_3) | 0 \rangle \langle 0 | B^{(2)}(x_4) B^{(2)}(x_5) B^{(2)}(x_6) | 0 \rangle = 0 \qquad (5.3.59)$$

（ヒント：公式 (5.3.57) とスペクトル条件を用いよ．Dell'Antonio et al. (1962) を参照).

(5.3.59) の左辺の真空期待値は，弱局所可換性（ただし反対符号の）条件をみたしていることに注意しよう．しかしながら，問題5.3.10によれば，それはゼロである．このことは，正常な（すなわち正しい符号をもつ！）弱局所可換性の条件が自動的に行なわれないようなすべての真空期待値に対して正しい．このことによって，場 $A(x)$ が弱局所可換性をみたすこと，従ってこの場に対し TCP 定理 5.2.4 が直接適用できること，が証明される．

スピンとパラ統計の関係を確立するには，A 場が定まった変換性（すなわち定まったスピン）をもつためにはすべての $B^{(\alpha)}$ がこれと同じ変換性をもたなければならないことに注意するだけで十分である．$B^{(\alpha)}$ 場に3.2節の結果を適用することにより，次のことが結論される．すなわち，パラ場 A がもし整数スピンをもつならそれはパラ Bose 統計に従い，もし半整数スピンをもつならパラ Fermi 統計に従わなければならない（われわれはここで，p を固定したときこれらの二つのパラ統計のあいだでだけ選択が可能である，という仮定をしている）．

§ 4. 同時刻の交換関係．いくつかの否定的結論

4.1. はじめに

場の量子論への公理論的アプローチは，序論で注意したように，相対論的場の理論の正準形式（Hamilton 形式）の困難を，新しい見地から見直すことを可能にする．

4.2節においてわれわれは，量子場に関する摂動論の通常の理論形式においてよく用いられる，いわゆる〈相互作用表示〉は，厳密にいえば，存在しないこと（Haag の定理）を示そう．4.3節では，この定理の思想および可能な応用が考察されるだろう．応用の第一は，正準交換関係の同値でない表現の利用である．

Haag の定理の証明は（§2と§3の諸結果もそうであるが），Bargmann=Hall=Wightman の定理（定理5.1.2）を本質的に利用している．同じ方法は，また，〈近似的対称性〉の記述に関連したある否定的結果を，時間に依存するユニタリ演算子を用いて証明するさいにも利用される（4.4節）．

4.2. Haag の定理とその一般化

場の量子論の Hamilton 形式（あるいは Lagrange 形式）における最も本質的な仮定——相対論的量子論のいくつかの要請は前の諸章で述べられているが，それに加えてなされるもう一つの仮定——は，固定した一時刻における場に一定の意味を帰している点にある．第3章の§1では，われわれは，四つの座標すべてについて均らした場 $\varphi(f)$ が状態ベクトルの空間 $\mathscr{H}$ における非有界演算子として意味をもつ，と仮定したけれども，Hamilton 形式によるアプローチでは，三つの空間座標についてだけ均らした場

$$\varphi(f,t)=\int_{R_3}\varphi(t,\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} \qquad (f\in\mathcal{S}(R_3)) \tag{5.4.1}$$

が，$\mathscr{H}$ における演算子として意味をもつことを要求しなければならない．これに加えて，われわれは，固定した時刻 t における場の集まり $\varphi_\alpha(f,t)$ が既約である（第3章の1.3節に与えられた定義の意味で．(3.1.20) を参照）と仮定することになろう．そのさい場の集まりとしては，場 $\varphi(f,t)$ の各々とともにそれに共役な〈運動量〉（普通 $\pi(f,t)$ と書く）をも含めたものを考える（自由スカラー場の場合には $\pi(x)$ は場 φ の時間に関する導関数にほかならない）．ここには標準的な同時刻の正準交換関係を書き下すことはしない (4.3節を参照)．なぜなら，以下の議論でそれらを用いることはないからである．

場の量子論の Hamilton 形式（たとえば [45] を参照）において，異なった時刻における演算子 φ と π とは，ユニタリ変換によって結ばれると考えられている．特に，入ってくる (in) 漸近自由場および出ていく (out) 漸近自由場は，相互作用している Heisenberg 場と，やはりユニタリ変換で結ばれると仮定されている．Haag の定理は，もしこの習慣的に用いられている理論形式に相対論的不変性の要求を追加するとすれば，そのような理論はトリヴィアルなものになってしまう，というものである．すなわち，この理論は，自由場の理論と同値であることが明らかになる．

Haag の定理は，自然なしかたで，二つの部分に分けられる．第一の部分においては，ただ，三次元 Euclid 変換に関する不変性だけが仮定される．この部分は，相対論的な理論に対しても非相対論的理論に対してもひとしく成り立ち，なんら意外な結果を含んでいない．第二の部分で，相対論的不変性の要求が本質的に利用され，上に述べた基本的結果が確立される．

[定理 5.4.1] $\varphi_{1\alpha}(f,t)$ および $\varphi_{2\alpha}(f,t)$ $(f\in\mathcal{S}(R_3))$ を，時刻 t においてそれぞれ Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1$ および $\mathscr{H}_2$ で定義された場の演算子の既約な二つの組とす

る．さらに，$\mathcal{H}_j$ $(j=1,2)$ において，三次元空間の Euclid 運動群 E_3 のユニタリ表現 $U_j(\boldsymbol{a},R)$ が実現されていると仮定する．すなわち場 $\varphi_{j\alpha}$ は

$$U_j(\boldsymbol{a},R)\varphi_{j\alpha}(t,\boldsymbol{x})U_j^{-1}(\boldsymbol{a},R) = T(R^{-1})_\alpha^\beta\varphi_{j\beta}(t,R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \qquad (5.4.2)$$

に従って共変的に変換される．ここで $T(R^{-1})$ は，三次元回転群[1)]の行列表現で，$j=1,2$．最後に，時刻 t における場 $\varphi_{1\alpha}$ と $\varphi_{2\alpha}$ を結ぶユニタリ変換 V が存在するとしよう．すなわち

$$\varphi_{2\alpha}(f,t) = V\varphi_{1\alpha}(f,t)V^{-1}. \qquad (5.4.3)$$

このとき，Euclid 運動群の表現 U_1 と U_2 は同値で

$$U_2(\boldsymbol{a},R) = VU_1(\boldsymbol{a},R)V^{-1} \qquad (5.4.4)$$

が成り立つ．

もし，さらに，空間 $\mathcal{H}_j$ の各々において一意的でEuclid 運動群に関し不変な（規格化された）状態 Ψ_{0j} が存在する，すなわち

$$U_j(\boldsymbol{a},R)\Psi_{0j} = \Psi_{0j} \qquad (j=1,2) \qquad (5.4.5)$$

を仮定するなら，その場合

$$c\Psi_{02} = V\Psi_{01} \qquad (5.4.6)$$

が成り立つ．ここで c は，絶対値が1に等しい複素数である．

定理を証明する前に一つの注意を述べる．三次元運動群に関して不変な状態 Ψ_{0j} が一意であるとする要求は，きびしすぎると思われるかも知れない．なぜなら，三次元運動量が0の状態（たとえば静止した粒子の状態）はすべて E_3 に関して不変だからである．しかし，四次元運動量が $p=(m,0,0,0)$ $(m>0)$ の状態は規格化できない（それは一般化状態である）ことを，われわれは知っている．また，正の質量をもつこのようないくつかの状態を任意に重ねあわせたものも，規格化されないことを示すことができる．それゆえ，たとえば第2章§5で記述した Fock 空間においては，実際に，三次元並進に関して不変で規格化される状態は，ただ一つ存在する．これが真空状態である．

定理 5.4.1 の証明． (5.4.2) と (5.4.3) によって，演算子

$$U_1^{-1}(\boldsymbol{a},R)V^{-1}U_2(\boldsymbol{a},R)V$$

は演算子 $\varphi_{1\alpha}(t,\boldsymbol{x})$ 全部と交換する．従って，場 $\varphi_{1\alpha}$ の集まりが既約であるという仮定に

---

1) われわれは，群 $SO(3)$ の二価表現も許すことにする．これは，すなわち群 $SU(2)$ の表現である（第2章§2を参照せよ）．それゆえ，より正確には，$U_j(\boldsymbol{a},R)$ は E_3 の普遍被覆群のユニタリ表現であるというべきであった．

よって，上の演算子は単位演算子の定数倍に等しい，すなわち，

$$U_2(\boldsymbol{a}, R) = \omega(\boldsymbol{a}, R)VU_1(\boldsymbol{a}, R)V^{-1}.$$

ここに $\omega(\boldsymbol{a}, R)$ は複素数である．容易にわかるように，$\omega(\boldsymbol{a}, R)$ は Euclid 群の一次元（連続）ユニタリ表現を与え[1]，従って $\omega(\boldsymbol{a}, R) \equiv 1$．このようにして等式 (5.4.4) が証明された．さらに，もし不変な状態 Ψ_{01} が存在すること，すなわち

$$U_1(\boldsymbol{a}, R)\Psi_{01} = \Psi_{01}$$

を仮定するなら，(5.4.4) から，

$$U_2(\boldsymbol{a}, R)V\Psi_{01} = V\Psi_{01}$$

が出てくる．このことと，$\mathscr{H}_2$ における不変な状態は一意であるという仮定とから，(5.4.6) が導かれる．これで定理は証明された．

非相対論的量子論では，演算子 $V(t)$ は事実上常に存在する．そのいろいろ異なった時間依存性が，異なった物理理論を特徴づけている．相対論的理論では，このような状況はもはや存在しない．このことは，Haag の定理の第二の（最も本質的な）部分から出てくる．われわれはこの定理を，Wightman と Hall による多少一般化された定式化において証明しよう．そして，簡単のため，中性スカラー場の場合に話を限る．

[定理 5.4.2]　**（一般化された Haag の定理）**　それぞれ空間 $\mathscr{H}_1$ と $\mathscr{H}_2$ で作用する二つの中性スカラー場 φ_1 と φ_2 が与えられたとせよ．ただし定理 5.4.1 のすべての仮定がみたされているものとする．その上，いずれの理論も，固有 Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^\uparrow$ に関して不変であるとせよ．すなわち

$$U_j(a, \Lambda)\varphi_j(x)U_j^{-1}(a, \Lambda) = \varphi_j(\Lambda x + a), \qquad (5.4.7)$$

$$U_j(a, \Lambda)\Psi_{0j} = \Psi_{0j} \qquad (j = 1, 2). \qquad (5.4.8)^{2)}$$

さらに，スペクトル条件が成り立つ（すなわち，$\mathscr{H}_j$ には負のエネルギーをもつ状態は存在しない）と仮定する．これらの仮定のもとで，両方の理論における最初の四つの Wightman 関数は互いに一致する．もし，その上さらに，$\varphi_1(x)$ が質量 m の自由場であるとするなら，$\varphi_2(x)$ も（同じ質量の）自由場となり，二つの理論はまったく一致する．

証明.　(5.4.3) と (5.4.6) から，考えている二つの理論の全部の Wightman 関数

---

1)　群 E_3 のユニタリ表現は，Poincaré 群の表現（第2章§3）と同じようにして記述される．恒等表現が，ただ一つの一次元表現であることが容易に示せる．

2)　われわれは共役運動量 $\pi_j(x)$ の共変性は仮定していないことを注意しておこう．

が，同時刻では一致することがわかる：

$$(\Psi_{01}, \varphi_1(t, \boldsymbol{x}_1) \cdots \varphi_1(t, \boldsymbol{x}_n)\Psi_{01}) = (\Psi_{02}, \varphi_2(t, \boldsymbol{x}_1) \cdots \varphi_2(t, \boldsymbol{x}_n)\Psi_{02}). \qquad (5.4.9)$$

そこでさらに，$n \leqslant 4$ のとき，等しい時間成分をもつ点と，それから（実の）固有 Lorentz 変換によって得られる点とは，Wightman 関数 $F_\alpha(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1})$ $(\alpha = 1, 2;\ \zeta_j = \xi_j + i\eta_j, \xi_j = x_j - x_{j+1})$ の解析性領域における実近傍をつくることを示そう．$n = 1$ のときは Wightman 関数は定数に等しく，問題は自明である．$n = 2$ では，固有 Lorentz 変換を用いて四元ベクトル $\xi_1 = x_1 - x_2$ の時間成分を 0 にできるための必要十分条件は，このベクトルが空間的であること，すなわち

$$\xi_1^2 < 0 \qquad (5.4.10)$$

である．ところで，われわれは，このような点によって Jost 点の集合 J_1（二点関数の解析性領域における実の点の集合）がつくされることを知っている．$n = 3$ では，任意の二つの空間的ベクトル ξ_1 と ξ_2 は，もし ξ_1 と ξ_2 の張る二次元平面が空間的ベクトルだけを含む（あるいは ξ_1 と ξ_2 が同一直線上にある）ならば，固有 Lorentz 変換を用いて同時刻の平面 $\xi_1^0 = \xi_2^0 = 0$ に移すことができる．実数 α と β（ただし同時に 0 ではないものとする）を任意に選んだとき，ベクトル $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2$ が空間的であるための判定条件は，不等式

$$|(\xi_1\xi_2)| < \sqrt{\xi_1^2\xi_2^2}, \qquad \xi_1^2 < 0, \qquad \xi_2^2 < 0, \qquad (5.4.11)$$

である．これらの不等式によって，Jost 点の集合 J_2 のなかに一つの開集合が取り出される．最後に，$n = 4$ の場合には，任意の三つの空間的ベクトル ξ_1, ξ_2, ξ_3 は，もしそれらの張る線形空間が空間的ベクトルだけから成っているなら，固有 Lorentz 変換を用いて同時刻の平面 $\xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = 0$ 上にもってくることができる．このための判定条件は，スカラー積 $(\xi_i\xi_j)$ を要素とする行列の行列式が負であること，すなわち，

$$\xi_j^2 < 0, \quad |(\xi_i\xi_j)| < \sqrt{\xi_i^2\xi_j^2}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 \end{vmatrix} < 0 \quad (i \neq j = 1, 2, 3) \qquad (5.4.12)$$

である．これによって，Jost 点の集合 J_3 の開集合が取り出される．

問題 5.4.1 $n \geqslant 5$ のとき，Lorentz 変換によって同時刻の平面 $\xi_1^0 = \cdots = \xi_{n-1}^0 = 0$ 上にもってこられる点の集合は，もはや，Jost 点の集合 J_{n-1} の実近傍とはならず，その一部にしかすぎないことを示せ．特に，$n = 5$ のとき，J_4 のベクトルからつくられる独立なスカラー積の個数は 10 で，一方，同時刻の平面に属するベクトルからつくられる独立なスカラー積の個数は 3 であることを確かめよ．

上に証明したことから，$n \leqq 4$ では，いま考えている二つの理論における Wightman 関数の解析接続は，相互に恒等的に一致すること，従って変数を実にしたときのそれらの境界値もまた相互に一致することが導かれる．

定理 5.4.2 の証明を完結するには，まだ次の補題の証明が残っている．

[補題 5.4.1]　もし $\varphi(x)$ がエルミートなスカラー局所場で，それに対して真空が巡回的であり，またもし φ に対する二点 Wightman 関数が自由場の二点関数と一致するならば，すなわち

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{\mathrm{i}} D_m^{(-)}(x-y) \quad (m>0) \tag{5.4.13}$$

((3.4.24) と (3.4.25) を見よ) ならば，その場合 $\varphi(x)$ は質量 m の自由場である．

実際，補題 5.4.1 が正しいなら，これを定理 5.4.2 の場 φ_2 に適用できる（場 φ_2 は補題の全部の条件をみたしている．特にこの場は局所的である．なぜなら，φ_2 の同時刻の交換子が自由場 φ_1 の交換子と一致し，さらに φ_2 は相対論的共変であるから)．

補題 5.4.1 の証明．　〈カレント〉

$$j(x) = (\Box + m^2)\varphi(x)$$

を導入しよう．$(\Box + m^2) D_m^{(-)}(x) = 0$ だから (5.4.13) から

$$(\Psi_0, j(x)j(y)\Psi_0) = 0 \tag{5.4.14}$$

が出る．(5.4.14) に $\bar{f}(x)f(y)$ をかけて積分すると

$$\| j(f)\Psi_0 \| = 0$$

を得る．これと，($\psi(x) = j(x)$ に適用した）補題 5.3.1 とから，$j(x) = 0$ が出る．従って，場 $\varphi(x)$ は〈自由場の〉Klein-Gordon 方程式

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{5.4.15}$$

を満足する．あとは，場 φ がまた自由場の交換関係をもみたしていることを証明すればよい．

(5.4.15) によって場 φ の Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(p)$ の台は二葉双曲面 $p^2 = m^2$ に集中している（$(p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0$ だから）ことを用いると，場 $\varphi(x)$ を，自由場と同様に，正負の振動数部分

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{V_m^+} \tilde{\varphi}^{(\pm)}(\boldsymbol{p}) e^{\pm \mathrm{i} px} \frac{d^3 p}{p^0} \tag{5.4.16}$$

に分けることができる．スペクトル条件から，負エネルギーに関係している場の負振動数

部分を真空に作用させると0でなければならないことがわかる. すなわち

$$\varphi^{(-)}(x)\Psi_0 = 0. \tag{5.4.17}$$

さらに, 状態

$$\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)\Psi_0 \tag{5.4.18}$$

を考えてみよう. この状態における任意の運動量は, 質量 m の前方双曲面に属するベクトル $p_+(p_+^2 = m^2, p_+^0 > 0)$ と, 同じ質量の後方双曲面に属するベクトル p_- との和で表わされる. それゆえ, このような運動量は, 空間的であるか, あるいは0に等しい. このことと, スペクトル条件(これによって空間的運動量をもつ状態の存在は禁止され, また真空の一意性が確立される)とから, ベクトル(5.4.18)は真空のベクトル Ψ_0 と同一直線上にあることがでてくる. 他方, (5.4.17) と (5.4.13) から

$$(\Psi_0, \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)\Psi_0) = (\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{i}D_m^{(-)}(x-y) \tag{5.4.19}$$

が導かれる. このようにして,

$$\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)\Psi_0 = [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)]\Psi_0 = \frac{1}{i}D_m^{(-)}(x-y)\Psi_0. \tag{5.4.20}$$

これと, 自明な恒等式

$$[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(-)}(y)]\Psi_0 = 0$$

とから

$$[\varphi(x), \varphi(y)]\Psi_0 = \frac{1}{i}D_m(x-y)\Psi_0 + [\varphi^{+}(x), \varphi^{+}(y)]\Psi_0 \tag{5.4.21}$$

を得る. ここに $D_m(x)$ は Pauli=Jordan の不変関数である(第3章の付録を見よ):

$$D_m(x) = D_m^{(-)}(x) - D_m^{(-)}(-x) = D_m^{(-)}(x) + D_m^{(+)}(x).$$

問題 5.4.2 スペクトル条件と局所可換性を用いて, 場 φ の定義域からベクトル Ψ を任意に選んだとき, 等式

$$(\Psi, [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(+)}(y)]\Psi_0) = 0 \tag{5.4.22}$$

が成り立つことを示せ. ヒント:(5.4.21) から, (5.4.22) の左辺の関係は領域 $(x-y)^2 < 0$ では0になることがわかる. また (5.4.16) から, この関数は管状領域

$$x \in T^+ \equiv R_4 + iV^+, \qquad y \in T^+$$

に解析接続できることがわかる.

明らかに (5.4.22) は, 等式

$$\left\{[\varphi(x), \varphi(y)] - \frac{1}{i}D_m(x-y)\right\}\Psi_0 = 0. \tag{5.4.23}$$

と同値である.

問題　5.4.3　補題5.3.1を証明したときと同じ考察を用いて，(5.4.23) から，演算子のあいだの等式

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{\mathrm{i}} D_m(x-y) \qquad (5.4.24)$$

が出ること，すなわち場 φ は自由場の交換関係をみたすことを示せ．

これで補題5.4.1が証明され，その結果定理5.4.2も証明された．

4.3.　正準交換関係の同値でない表現．Haag の定理の可能な解釈

Haag の定理の結論は極めて悲観的である．この定理は，摂動論の基礎になっている相互作用表示が実際には存在しない，ということを意味している．ここで念頭に置くべき重要な点は，状態ベクトルの空間 $\mathscr{H}$ においては，自由場を相互作用している場と (5.4.3) によって結びつけるよく定義された演算子 V は存在しないことが，はっきりしたということである．もちろん形式的な表式なら存在して関係 (5.4.3) も（形式的には）成り立つが，実際の計算では無意味な発散積分に導くもので[1]，Haag の定理の反例にはならない．この困難から逃れる可能性を示唆するために，われわれは，場の量子論における正準的なラグランジアンを用いるアプローチを，簡単に分析してみることにしよう．

量子化の正準形式は，古典的ラグランジアン $\mathcal{L}$ から出発する．これは場 $\varphi_\alpha(x)$ とそれの一階の導関数との関数である：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(x), \frac{\partial \varphi_\alpha(x)}{\partial x^\nu}\right).$$

時刻 t における場 φ_α の〈共役運動量〉は，公式

$$\pi_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \varphi_\alpha(t, \boldsymbol{x})}{\partial t}} \qquad (5.4.25)$$

によって定義される．たとえば，ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu} : \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} : -m^2 : \varphi^2 :\right)$$

をもつ自由スカラー場に対しては，

$$\pi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \varphi(t, \boldsymbol{x})}{\partial t}$$

を得る．ラグランジアン

---

[1] 場の量子論の摂動論で，われわれはこのような状況に出合う（たとえば [4] を見よ）．しかし，次のことを特に強調しておかなければならない．すなわち，摂動論の級数の個々の項に発散がないときでさえ，演算子 V の存在は保証されないことである．そのためには，〈半無限区間の〉S 行列に対して，級数の和が収束しなくてはならない．

$$\mathcal{L} = \mathrm{i} : \tilde{\psi}(x)\gamma^{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} : -m : \tilde{\psi}(x)\psi(x) :$$

をもつ自由スピノル場に対しては，場 ψ に共役な〈運動量〉は，

$$\pi_{\psi}(x) = \mathrm{i}\widetilde{\psi}(x)\gamma^{0} = \mathrm{i}\psi^{*}(x)$$

である．互いに共役な場 φ_{α} と π_{α}（より正確にいえば (5.4.1) の形のならした場 $\varphi_{\alpha}(f,t)$）は，正準交換関係（Bose 場の場合）

$$[\varphi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \varphi_{\beta}(t,\boldsymbol{y})] = [\pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{y})] = 0,$$
$$[\varphi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{y})] = \mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (5.4.26)$$

によって定められるある代数の基底元であると仮定される．このようにして，場の量子論は，無限自由度の系の量子力学として定式化される（$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はここでは一般化座標や一般化運動量を区別するための添え字にあたる）．連続無限な $\varphi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})$ の代わりに，可附番個の基底を用いると便利である．この目的のためには，三次元空間における関数 $h_{\nu}(\boldsymbol{x})$，たとえばエルミート関数 $N_{\nu}e^{-\boldsymbol{x}^2/2}H_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\boldsymbol{x})$ の完全正規直交系を導入し，場の〈座標〉と〈運動量〉とを公式

$$Q_n(t) = \int \varphi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})h_{\nu}(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x},$$
$$P_n(t) = \int \pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x})h_{\nu}(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x} \qquad (5.4.27)$$

で定義すればよい．ここに n は，離散的な数の組：$n = (\alpha, \nu) = (\alpha, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ である．

問題 5.4.4 関数 h_{ν} の正規直交系を用いると，交換関係 (5.4.26) は Q_n と P_n により次の形に書けることを示せ：

$$[Q_n(t), Q_{n'}(t)] = [P_n(t), P_{n'}(t)] = 0,$$
$$[Q_n(t), P_{n'}(t)] = \mathrm{i}\,\delta_{nn'}. \qquad (5.4.28)$$

（添え字 n のとる値は可附番（無限）集合をなすことを思い出そう）．

さらに，われわれは (5.4.28) をみたす元 Q_n と P_n の抽象代数を，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$（状態ベクトルの空間）における非有界演算子のある代数として実現しよう．有限自由度の系の場合には，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における自己共役演算子によって実現された交換関係 (5.4.28) の任意の二つの表現は，ユニタリ同値である (von Neumann (1931))[1]．特に，異なった時刻の演算子 P_n, Q_n を結ぶユニタリ演算子 $V(t_2,t_1)$ は常に存在して，次の関

---

[1] より正確には，この命題は，次のように定式化できる．関係 (5.4.28) を，ユニタリ演算子

$$u(\alpha) = e^{\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n Q_n}, \qquad v(\alpha) = e^{\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n P_n}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

のあいだの関係で置き変えよう．演算子 u と v は実数のパラメータ α に関して連続であり，↗

係が成り立つ：

$$\begin{aligned} Q_n(t_2) &= V(t_2,t_1)Q_n(t_1)V^{-1}(t_2,t_1) \\ P_n(t_2) &= V(t_2,t_1)P_n(t_1)V^{-1}(t_2,t_1) \end{aligned} \qquad (n=1,\cdots,N<\infty). \tag{5.4.29}$$

無限自由度の系に対しては，このことは成り立たない．しかも，一次の正準変換（すなわち交換関係（5.4.28）の形を保存するような P_n と Q_n の変数変換）は，一般的にいって，（5.4.29）の形のユニタリ同値を与える変換に対応しない．このことは，最も簡単な一次変換

$$Q_n' = \frac{1}{a_n}Q_n, \qquad P_n' = a_nP_n, \qquad a_n = e^{\alpha_n} > 0 \tag{5.4.30}$$

を例として確かめることができる．

問題 5.4.5 有限自由度の系の場合に，（5.4.30）のダッシュをつけた変数とつけない変数とは，ユニタリ変換

$$\begin{aligned} X_n' &= V_N X_n V_N^{-1}, \qquad X = Q, P, \\ V_N &= e^{\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}(P_nQ_n+Q_nP_n)\alpha_n} \end{aligned} \tag{5.4.31}$$

によって結ばれることを示せ．公式（5.4.30）は，実数 α_n の任意の選び方に対してある正準変換を定義しているのに，演算子 V_∞ が存在するのは α_n の列が十分に速く0に収束する場合だけであることを確かめよ．

自由場の理論（第3章§4）における正準交換関係の同値でない表現は無限にたくさんあるが，そのなかから，Fock 表現（第2章§5）は次のような補足的要求を用いて取り出される．すなわちこの表現では，負振動数の演算子が作用したとき0になるような規格化された不変な状態 Ψ_0 がただ一つ存在する：

$$a(p)\Psi_0 = \frac{\tilde{\varphi}^{(-)}(p)}{\sqrt{\omega_p}}\Psi_0 = 0. \tag{5.4.32}$$

これは真空が存在するという要求である．Fock 表現は，（ユニタリ同値を除いて）一意的に定まる．正準交換関係のこれ以外のすべての表現，すなわち〈無粒子状態〉が存在しないような表現は，〈奇妙な〉表現とよばれる．相互作用する場の理論においてもまた，ある

↘次の関係

$$u(\alpha)u(\beta) = u(\alpha+\beta), \qquad v(\alpha)v(\beta) = v(\alpha+\beta), \tag{5.4.28 a}$$

$$u(\alpha)v(\beta) = e^{\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\beta_n}v(\beta)u(\alpha),$$

（交換関係の Weyl の形式）をみたすと仮定しよう。

演算子 P_n, Q_n とはちがって，演算子 $u(\alpha), v(\alpha)$ は有界であり，Hilbert 空間の全体で定義されている．そのとき，von Neumann の定理は次の形に定式化できる：〈交換関係〉（5.4.28 a）を満足する演算子 $u(\alpha), v(\alpha)$ の既約な組は，ユニタリ同値を除いて一意的に定められる．

〈物理的〉真空をもつ Fock 表現を取り出せる，と仮定することがあるいはできたかも知れない(このことは，隠された形ではしばしば仮定されている)．この物理的真空は，時間がたっても変わらないものでなければならない．ところが実際は，このようなことは不可能であり，どの有限時刻においても，われわれは交換関係の〈奇妙な〉表現を用いなければならないことを Haag の定理が示している(この奇妙な表現においては，大ざっぱにいって，各状態はいずれも無限個の粒子を含んでいる)．それに加えて，この定理から次のことが導かれる．すなわち，もし固定したある時刻における正準交換関係が一般に意味をもつとするなら，異なった時刻では，これらの交換関係の異なった（同値でない）〈奇妙な〉表現が実現されるはずである．

標準的な理論（局所的ハミルトニアンをもつ）における相互作用表示と量子論の一般的要求とが両立しないことは，また次のことにも現われている．時間推進の演算子 P^0 は常に真空ベクトルを 0 にしなければならない．しかし，もし P^0 を実際に相互作用のある局所的 Hamilton 関数の積分として表わすなら，そうはならないだろう．このことに関連して，標準的アプローチでは数学的真空（自由な真空）と物理的真空の話をもちだすのである．ところが，Haag の定理によれば，これらの二つの真空はユニタリ同値の変換によってはつながらない（この間の事情は上に行なった考察と同様に，簡単な非相対論的モデルを用いて例証できる．たとえば，Wightman (1964 b) を見よ)．

最後に，次のことを特に強調しておく．正準交換関係の同値でない表現を考慮しなければならないだけでなく，また，これらの交換関係そのものが一層特異な性格をもつ可能性も考慮しなければならない．すでに自由な複素ベクトル場 $V^\mu(x)$ に対して，その交換関係（[4] の §11.3を参照）は，

$$[V^\mu(x), V^{*\nu}(y)] = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right) D_m(x-y) \qquad (5.4.33)$$

という形をもつが，$V^\mu(x)$ に共役な〈運動量〉が $\partial V^{*\mu}/\partial t$ であることを考慮すると，(5.4.26) の代わりに，

$$\left[V^\mu(x), \frac{\partial V^\mu(y)}{\partial t}\right]_{x^0=y^0} = \frac{1}{\mathrm{i}m^2}\Delta\delta(x-y) \qquad (5.4.34)$$

を得る．ここに Δ は Laplace 演算子である．相互作用する場では四つの座標の全部について均らすことが必要となるほど交換関係の特異性が強くなること，すなわち固定した時刻で三つの空間座標の一般関数としてだけ考えることはできなくなる，という可能性も除外されない．

4.4. 〈破れた対称性〉が時間に依存するユニタリ演算子を用いて記述できないこと

強い相互作用の理論では，電磁的あるいは弱い相互作用によって破られる対称性がしば

しば考察される．ここでいうのは不連続な対称性 P, C および T（これらの対称性のことは自由場を例として第3章4.4節で学んだ），あるいはまたアイソスピン対称性（これについて考察することは本書の枠をこえる）のことである．Fabri et al. (1967) は，このような近似的対称性を時間に依存するユニタリ演算子を使って記述することはできない，ということを示した．われわれはここで，この結果を正確に定式化し，空間反転の演算 I_s という特別の場合について証明しよう．読者は，考察の方法が Haag の定理の証明の場合と同じであることに気づかれるであろう．

[定理 5.4.3]　各時刻 t においてユニタリ演算子 $U_t(I_s)$ が存在して

$$U_t(I_s)\varphi^\alpha(x)\,U_t^{-1}(I_s) = V_{t\beta}^{\alpha}(I_s^{-1})\varphi^\beta(x^0, -\boldsymbol{x}) \equiv \varphi_s^\alpha(x) \qquad (5.4.35)$$

であり，また，

$$U_t(I_s)U(0, \boldsymbol{a}\,;1)U_t^{-1}(I_s) = U(0, -\boldsymbol{a}\,;1) \qquad (5.4.36)$$

が成り立つものとせよ．ここに $U(a, \Lambda)$ は，問題にしている理論における Poincaré 群の表現である．このとき，並進不変な一意的真空をもつ理論において，最初の四つの Wightman 関数は空間反転に関して不変である[1)]．

証明.　(5.4.36) と真空の並進不変性から，状態 $U_t(I_s)\Psi_0$ が並進不変であることが出る．さらに，並進不変な状態の一意性の仮定によって，

$$U_t(I_s)\Psi_0 = C(t)\Psi_0, \qquad |C(t)| = 1. \qquad (5.4.37)$$

このことから，時間変数が等しいとき，場 $\varphi^\alpha(x)$ のすべての Wightman 関数は空間反転した場 $\varphi_s^\alpha(x)$ (5.4.35) の Wightman 関数と一致することがわかる．その上，(5.4.35) と固有 Poincaré 変換 (3.1.6) に対する場の変換法則とから，

$$U_s(a, \Lambda)\varphi_s^\alpha(x)\,U_s^{-1}(a, \Lambda) = V_\beta^\alpha(\Lambda^{-1})\varphi_s^\beta(\Lambda x + a) \qquad (5.4.38)$$

および

$$U_s(a, \Lambda)\Psi_0 = \Psi_0$$

が出る．ここで，

$$U_s(a, \Lambda) = U(I_s a,\ I_s \Lambda I_s^{-1}). \qquad (5.4.39)$$

それゆえ，時間が一致した Wightman 関数の等式において，任意の座標系に移ることができる．このことから，初めの四つの Wightman 関数に関する恒等式が，定理5.4.2の

---

1)　この定理から次のことがいえる．もし空間パリティが，始めの四つの Wightman 関数（別の言葉でいえば，Green 関数，vertex part，および二粒子散乱の振幅）のうちのどれかに対して保存しないなら，このパリティ演算子を，各時刻でユニタリ演算子を使って表わすことはできない．

証明のときと同じようにして導かれる．これで定理5.4.3は証明された．

付録　A.　局所観測量の代数を用いた場の量子論の定式化

A.1.　はじめに

この付録では，場の量子論における代数的アプローチの基本的な考え方について手短かに説明しよう．このアプローチは，最近の数年間に主として Haag と荒木によって展開された．

均らした場の演算子 $\varphi(f)$ が状態ベクトルの Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の非有界な演算子であることは，すでに見た．その作用が定義されているのは，$\mathscr{H}$ の勝手なベクトルに対してではなくて，いたるところ稠密なある集合の上でだけである．そのために，すべての演算子 $\varphi(f)$ に（基礎関数 f によらず）共通ないたるところ稠密な定義域 Ω が存在するという仮定を導入しなければならなかった．Haag のアイディアは，場の代わりに $\mathscr{H}$ の有界演算子に対応する局所観測量を考えるところにある．そうすると，よく展開されているノルム代数（および環）の数学理論が利用できる．

このアプローチの利点は，量子論の代数的な形式が，与えられた Borchers 類のなかでの場の選び方によらず不変なことである．この言い表わしに正確な意味づけをするためには，Haag=荒木の理論と局所場の理論との対応をつけねばならない．しかしながら，これから明らかになるように，一意的な対応がつくのは場 $\varphi(f)$ が一意な自己共役拡大を許すときだけである．厳密にいえば，相対論的量子論の二つの定式化の等価性の問題は今日までのところ完全には解かれていない．

A.2節では，対合をもつノルム環の理論につき以後に必要となる基本概念を導入しよう．これらの問題の詳しい解説は [31]（すこし用語がちがう）と [52] に見られる．von Neumann 代数と C^*-代数についての簡単な概説なら Guenin and Misra (1963) や Haag and Kastler (1964) の付録にある．

A.3節では，抽象 C^*-代数の言葉を用いて量子力学を定式化することを行なう．A.4節において相対論的・局所的な量子論の諸要請を状態ベクトルの Hilbert 空間の有界演算子の von Neumann 代数を用いて定式化する．最後のA.5節で，新しいアプローチからの諸結果を図式的に概観しよう．

A.2.　対合をもつ代数と Hilbert 空間の有界演算子によるその具体化

はじめに基本的な定義を思いだしておこう．

《代数》とは，複素数体上の線形空間であって（第1章1.1節を見よ）積という双線形な演算が定義されているものをいう．言いかえれば，次のような元 $A, B, \cdots$ の集合 $\mathfrak{A}$ を代数とよぶのである．すなわち，可換かつ結合的な和と複素数倍が定義されて第1章1.1節の条件 I ～III をみたし，その上任意の二つの元の積 AB が与えられていて，条件

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) B = \alpha_1 (A_1 B) + \alpha_2 (A_2 B),$$
$$A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) = \beta_1 (AB_1) + \beta_2 (AB_2) \qquad (5.\text{A}.1)$$

をみたす．ここでは《結合的な代数》を考える．それは，さらに

$$A(BC) = (AB)C \qquad (5.\text{A}.2)$$

を仮定したものである．$\mathfrak{A}$ が《対合をもつ代数》（あるいは *–代数）であるとは，各元 $A \in \mathfrak{A}$ に対し共役な元 A^* があって次の条件をみたしていることをいう：

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \qquad (A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (AB)^* = B^* A^* \qquad (5.\text{A}.3)$$

$$(A^*)^* = A. \qquad (5.\text{A}.4)$$

*–代数 $\mathfrak{A}$ は，そこにノルム $\|A\|$ が定義されていて，第1章1.1節の条件 (a ～ c) と条件

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|, \qquad \|A^*\| = \|A\| \qquad (5.\text{A}.5)$$

をみたすならば，ノルムをもつといわれる．われわれは，このほか

$$\|A^* A\| = \|A\|^2 \qquad (5.\text{A}.6)$$

の成り立つことを要求しよう．さらに，この代数には単位元 I が存在し $IA = AI = A$（すべての $A \in \mathfrak{A}$ で）が成り立つと仮定する．こうした条件をみたす元は一つしかないことおよび $I^* = I$, $\|I\| = 1$ であることは容易に示される．

対合をもつノルム環は，条件 (5.A.6) をみたしノルム収束に関し完備なら《C^*–型の代数》または簡単に《C^*–代数》であるという[1]．後者の条件は，

$$\lim_{n, k \to \infty} \|A_n - A_k\| = 0$$

をみたす $\mathfrak{A}$ の元の任意の Cauchy 列 $\{A_n\}$ に対し，極限の元 $A \in \mathfrak{A}$ が定まり

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n - A\| = 0$$

となることである．

どの C^*–代数 $\mathfrak{A}$ もとりわけ Banach 空間である（第1章1.1節の定義を見よ）．従って，$\mathfrak{A}$ 上の連続線形な汎関数の全体という集合が考えられ，これがまた Banach 空間に

[1] Naimark [31] は C^*–型の代数を Banach 的（あるいは完備）・完全正則・対称な環とよんでいる．

なる．そこで，任意の連続線形汎関数 F に対し $F(A_n)\to F(A)$ ならば $A_n\to A$ であるとして $\mathfrak{A}$ に弱収束が定義できる．ノルムをもつ *–代数でこの定義による弱収束に関して完備なものは，自動的にノルムに関しても完備である．しかし，逆は必ずしも真でない．

ノルムをもつ *–代数の典型的な例は，なんらかの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における有界演算子の任意の代数で各演算子 A と共にエルミート共役な演算子 A^* をも含むものである．こうした具体化においては対合はエルミート共役に一致し，ノルムは（1.1.35）により定義される．条件（5.A.5）と（5.A.6）は，そのとき自動的にみたされている．

$\mathcal{H}$ の有界演算子の全体がつくる代数 $\mathfrak{B}$ には《アプリオリ》には多くの同値でない収束が導入できる．例として次の三つの型をあげておこう．それぞれは先行のものを包含している：

a)　弱収束：$A_n\rightharpoonup A$（A_n は A に弱収束すると読む）とは，$\mathcal{H}$ からとった任意の Φ, Ψ に対して

$$(\Phi, A_n\Psi)\longrightarrow(\Phi, A\Psi) \qquad (5.\mathrm{A}.7)$$

となること．

b)　強収束：$A_n\to A$（A_n は A に強収束する）とは，$\mathcal{H}$ からとった任意の Ψ に対して

$$\|(A_n-A)\Psi\|\longrightarrow 0 \qquad (5.\mathrm{A}.8)$$

となること．

c)　ノルム収束（一様収束）：$A_n\Longrightarrow A$（A_n は A に一様収束する）とは，

$$\|A_n-A\|\longrightarrow 0 \qquad (5.\mathrm{A}.9)$$

となること．

明らかに（5.A.9）から（5.A.8）が導かれ，（5.A.8）から（5.A.7）がでる．順序を逆にして，（5.A.7）に関する完備性から（5.A.8）に関する完備性が導かれ，これから（5.A.9）に関する完備性がでる．

もし有界演算子の代数がノルム収束（5.A.9）に関して完備なら，これは C^*–代数の具体化である．もし，さらに弱収束（5.A.7）に関しても完備なら，それは《von Neumann 代数》とよばれる．明らかに C^*–代数のクラスのほうが von Neumann 代数のクラスより広い．

以下において（局所可換性を定式化する際に）可換子代数の概念が入用になる．$\mathfrak{A}_1$ を $\mathfrak{A}$ の一つの部分代数としよう．$\mathfrak{A}$ における $\mathfrak{A}_1$ の《可換子代数》$\mathfrak{A}_1'$ とは，$\mathfrak{A}_1$ のどの元と

も可換な $\mathfrak{A}$ の元の全体のことである．積の結合則により可換子代数は実際に代数になっている．$\mathfrak{A}$ が共役（つまり対合）をもつ代数で，$\mathfrak{A}_1$ がその共役に関して閉じているならば，(5. A. 3) により可換子代数 $\mathfrak{A}'_1$ も共役に関して閉じている（すなわち $A \in \mathfrak{A}'_1$ から $A^* \in \mathfrak{A}'_1$ がでる）．$\mathfrak{A}_1$ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の有界演算子からなる具体的な代数の場合には可換子代数を定義する上記の $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_1$ としては，$\mathcal{H}$ の有界演算子の全体からなる代数 $\mathfrak{B}$ をとるのが普通である．von Neumann 代数は，自身の二重可換子代数と一致すること，$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$ によって特徴づけられる．

von Neumann 代数の研究と分類のためにはファクターの概念が重要な役をする．これは，およそ既約表現のアナローグと考えてよい．代数 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ がファクターであるというのは，その中心 $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ が単位元の定数倍しか含まないこと，すなわち $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \{\alpha I\}$ であることをいう．任意の von Neumann 代数は，ファクターの，ある一般化された和の形に表わされる．

von Neumann 代数の自己共役元（およびその関数）は，射影演算子の系 $\{E(\lambda)\}$ によるスペクトル分解 (1. 1. 47)（または (1. 1. 48)）を用いて定められる．ファクターの分類は，次元の概念の一般化とみられる射影演算子のある加法的特性関数の存在（と数因子を除いての一意性）に基づいている．正確な結果は，次の二つの定理（[31] の §36 を見よ）の形に定式化できる——

[定理 5. A. 1]　与えられたファクター F に属する射影演算子 E の全体の上で定義された関数 $D(E)$ で，次の性質をもつものが存在する．

1)　$D(E) \geqslant 0$，そして，$D(E) = 0$ は $E = 0$ のときのみ．

2)　演算子 E_1, E_2 がファクター F に関して同値なら，すなわち元 $S \in F$ が存在して $E_2 = SE_1S^{-1}$ となるならば，$D(E_1) = D(E_2)$.

3)　$E_1E_2 = 0$ なら $D(E_1+E_2) = D(E_1)+D(E_2)$.

関数 $D(E)$ は（ファクター F が与えられたとき）条件 1)～3) により正の定数倍を除いて一意に定まる[1]．

[定理 5. A. 2]　相対次元の値域はノルムを適当に選ぶことにより，次の集合のどれかに帰着させることができる：

(I_n)　区間 $0 \leqslant k \leqslant n$ に含まれる整数 k の全体；
(I_∞)　非負の整数の全体で ∞ も含む；
(II_1)　区間 $[0, 1]$；
(II_∞)　区間 $[0, \infty]$；
(III)　0 と ∞.

関数 $D(E)$ の値域がどの場合になるかによってファクターは I_n 型，I_∞ 型，II_1 型，II_∞ 型，III型であるという．どの型のファクターの例も存在する．場の量子論の代数的定式化においては，最もなじみのうすい（そして最もすこししか研究されていない）III 型のファクターを扱う必要が起こる．

A. 3.　量子力学の代数的定式化

一つの C^*-代数 $\mathfrak{A}$ が与えられたとする．$\mathfrak{A}$ 上に定義された線形汎関数 F は，

---

[1] 関数 $D(E)$ を《相対次元》とよぶ．

$$F(A^*A) \geqslant 0 \qquad (\text{すべての } A \in \mathfrak{A} \text{ に対し}) \tag{5. A. 10}$$

となるなら《正値》であるという（第3章，3.1節では，ある特殊な位相代数上のこの種の汎関数を乗法的に正値とよんだ）．

単位元をもつ C^*–代数の上の正値汎関数の簡単な性質を列挙しよう（[31] の§10と[52] の§24を参照）：

1)　すべての正値汎関数は，代数の自己共役元において実数値をとる．

2)　F を正値汎関数とすれば，

$$|F(A^*B)|^2 \leqslant F(A^*A)\cdot F(B^*B). \tag{5. A. 11}$$

3)　どの正値汎関数も連続であり，そのノルムは $F(I)$ に等しい．

正値汎関数 F は，互いに比例しない正値汎関数の和という形に書けないとき，すなわち F_1, F_2 を正値汎関数として $F(A) = F_1(A) + F_2(A)$ とすれば必ず $F_1(A) = \lambda F_2(A)$，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ となるとき《分解不可能》であるという．

さて，量子力学の一般的原理を次の形に定式化することができる：

物理系の各々に応じた何らかの C^*–代数が存在して，特に観測量にはその代数の自己共役元が対応し，系の状態（一般には混合状態）には $F(I) = 1$ に規格化された正値汎関数が対応する．状態は，それに対応する正値汎関数が分解不可能なら《純粋》であるといわれる．代数の自己共役元に対する汎関数の値 $F(A)$ は，状態 F における物理量 A の期待値と解釈される．

その C^*–代数が Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ における有界演算子により具体化されていれば，上に与えた量子力学の抽象代数的な形式は実質上，第2章§1に述べた普通の形式に帰する．特に，分解不可能な規格化された正値汎関数 $F(A)$ は，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の規格化された射線 Φ と

$$F(A) = (\Phi, A\Phi) \tag{5. A. 12}$$

によって一対一に対応する．

混合状態の密度行列には正値で対角和が有限な演算子 B が対応する．この場合，期待値 $F(A)$ は，

$$F(A) = \mathrm{Tr}(BA) \tag{5. A. 13}$$

によって与えられる．

第2章§1に述べた形式との唯一の違いは，いまの場合，観測量として《有界》自己共役演算子だけを考えているというところにある（そのために，たとえば座標や運動量の演算

子は観測量の仲間に入らない)．理論的な観点からはこの違いは本質的でない．なぜなら，(有界でないものも含めて) 任意の 自己共役演算子は 射影演算子 (これは有界) を用いたスペクトル分解によって特徴づけられるからである．

しかし，次のような問題が起こる．与えられた抽象 C^*-代数は，さまざまのユニタリ同値でない仕方で Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の有界演算子により具体化できるものである．では，物理系は抽象 C^*-代数に対応させるべきか，それとも有界演算子によるその具体化のどれかに対応させるべきか？　この問題に対する答は物理的な考察から得るしかない：もし，一つ，ただ一つの C^*-代数の忠実な[1]表現を与えている (有界演算子の) 二つの非同値な代数が実験的に区別できるならば，物理系は有界演算子の具体的な代数によって記述する必要がある (ユニタリ同値は別として)．もし区別ができないなら，物理系は C^*-代数に対応することになる．もちろん，その具体化のあれこれを利用してはいけないということはないけれども (古典量子力学における座標表示と運動量表示のユニタリ同値性が，いずれかの表示の利用を禁ずることがないのと同じ)．

この問題を解くために，C^*-代数 $\mathfrak{A}$ の二つの表現 R_1, R_2 の物理的同値に関する Haag and Kastler (1964) の判定条件を用いることにしよう．この判定条件は，どんな実験も有限個の量の測定からなり，どの測定もなにがしかの誤差 (原理的には任意に小さくできるが，0 にはできない) を伴うことを考慮するものである．

代数 $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ における表現 R_1, R_2 が《物理的に同値》であるとは，$\mathfrak{A}$ に属する有限個の観測量 $A_1, \cdots, A_n$ と ($\mathscr{H}_1$ における) 対角和有限の正定値演算子 B_1 および数 $\varepsilon > 0$ を任意に選んだときに，($\mathscr{H}_2$ における) 対角和有限の正定値演算子 B_2 が存在して

$$|\mathrm{Tr}(B_1R_1(A_k)) - \mathrm{Tr}(B_2R_2(A_k))| < \varepsilon \qquad (k = 1, \cdots, n) \tag{5. A. 14}$$

となることをいう．

この物理的同値という概念は，表現の《弱同値》という数学の概念 (Fell (1960)) に一致する．Fell の結果によると，表現 $R_1(\mathfrak{A})$ と $R_2(\mathfrak{A})$ とが弱同値になるのは，これらの表現の核が一致するときであり，そのときに限る (すなわち，$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ 上のゼロ演算子に写像される抽象代数 $\mathfrak{A}$ の元の集合が同一のとき)．特に，C^*-代数 $\mathfrak{A}$ の忠実な表現は，どれも弱同値 (物理的に同値) である．

---

[1] 抽象代数 $\mathfrak{A}$ の表現が《忠実である》とは，その核 (すなわちゼロ演算子で表現される元の集合) が $\mathfrak{A}$ のゼロ元のみからなることをいう．

これは，物理的な系が常に C^*–代数に対応していることを意味している（この問題のより詳しい議論は Kastler (1963) にある）.

A.4. 有界演算子の代数を用いた場の量子論の定式化

場の量子論の代数的定式化における Haag の基本的なアイディアは，どんな物理的な測定も時空の有限な領域で行なわれるのだから，理論の全体が何らかの代数をなす局所観測量を用いて定式化されねばならないというところにある．この考えは自然に見えるけれども，場の理論の従来の形式の観点にはなじまないもので，まだ見通しよくまとまってはいない．問題は，Poincaré 群の表現演算子もその生成演算子であるエネルギーや運動量も（そのスペクトル射影も）局所観測量でないことである．同じことは，系の全電気量のように固有値が超選択則の一つのコヒーレント部分空間を選ぶすべての観測量について一般にいえる．以下では，Hilbert 空間における具体的な C^*–代数から出発しながらも，局所観測量に加えてエネルギー・運動量や超選択則の演算子など大域的な量も含めるという併合的なアプローチを試みよう．こういうわけで，前節で明らかにしたように物理系と一対一に対応するのは C^*–代数であるが，ここでは状態ベクトルの空間で作用する有界演算子の von Neumann 代数を用いて理論の定式化をする．

Haag=荒木の理論の厳密な定式化に進もう．

第一に，第2章で定式化し詳しく議論した相対論的量子論の最初の三つの公理は変えずにおく．すなわち，物理系の純粋状態は何らかの可分な Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の射線で表わされ，Poincaré 群の被覆群 $\mathscr{P}_0$ のユニタリ表現が $\mathscr{H}$ に具体化されていて，この表現は超選択則によって簡約され，かつスペクトル条件をみたしていると仮定する．

次に，相対論的量子場の概念は局所代数の概念によって置き代える．

時空の各有界領域 $\mathcal{O}$ に von Neumann 代数 $R(\mathcal{O})$ が対応し，次の条件をみたすものとする：

1) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ なら $R(\mathcal{O}_1) \subset R(\mathcal{O}_1)$ （《単調性》）.

2) Poincaré 群に関する《共変性》：

$$U(\underset{\sim}{a}, A)R(\mathcal{O})U^{-1}(\underset{\sim}{a}, A) = R(\Lambda(A)\mathcal{O}+a). \qquad (5.A.15)$$

ここに $\Lambda\mathcal{O}+a$ は，領域 $\mathcal{O}$ に Poincaré 変換 (a, Λ) を施してつくられる領域を表わす．

3) 《局所可換性》．領域 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が互いに空間的にへだたっているなら（すなわち $\mathcal{O}_2$ の各点が $\mathcal{O}_1$ の任意の点から空間的な距離でへだてられているなら），$R(\mathcal{O}_1)$ と $R(\mathcal{O}_2)$ は可換である．いま $\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}$ と空間的にへだたった点の全体とすれば，局所可換性の要

請は，

$$\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1' \Longrightarrow R(\mathcal{O}_1) \subset R'(\mathcal{O}_2) \tag{5. A. 16}$$

と書かれる．ただし，$R(\mathcal{O}_2)'$ は $R(\mathcal{O}_2)$ の可換子代数である．

4)　もし理論が Hilbert 空間の分解 (2. 1. 21) に対応する超選択則をもつならば，代数の合併

$$\bigcup_{\mathcal{O}} R(\mathcal{O}) \tag{5. A. 17}$$

は，コヒーレント部分空間 $\mathcal{H}_j$ のそれぞれを不変にする．そして，各コヒーレント部分空間において代数 (5. A. 17) は既約である．これは，代数 (5. A. 17) の可換子代数がコヒーレント部分空間への射影演算子によって生成される von Neumann 代数に一致することを意味している．

代数 (5. A. 17) は閉じていない．そのノルム収束に関する完備化（閉包）を $\bar{R}$ と記そう．C^*- 代数 $\bar{R}$ の演算子を準局所的演算子[1]とよぶ．弱収束に関する閉包は von Neumann 代数 R_w となり，これはもう大域的な観測量を含んでいる．もし考察を局所観測量に限らないで任意の量を（ということは大域的なものも含めて）受け入れるならば，時空の任意の開領域（有界でなくてよい）に von Neumann 代数を対応させることができる．そのためには，まず任意の開集合 $\mathcal{O}$ が無限個の有界領域 $\mathcal{O}_\alpha$ の集合論の意味の和として表わせることに注意し，次の付加的な仮定をしよう：

5)　$\mathcal{O} = \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha = \bigcup_\beta \tilde{\mathcal{O}}_\beta$ を開集合 $\mathcal{O}$ の有界領域の和への勝手な二つの分解とする．このとき，等式

$$\mathbf{V}_\alpha R(\mathcal{O}_\alpha) = \mathbf{V}_\beta R(\tilde{\mathcal{O}}_\beta) \tag{5. A. 18}$$

の成り立つことを要請しよう．ここに，$\mathbf{V}_\alpha R(\mathcal{O}_\alpha)$ は，すべての $R(\mathcal{O}_\alpha)$ の元により生成される von Neumann 代数を表わす．この仮定から，特に開集合 $\mathcal{O}$ それ自身が有界なら von Neumann 代数 (5. A. 18) は $R(\mathcal{O})$ に一致することがでる．仮定 5) によれば，$\mathcal{O}_\alpha$ を有界な領域とするとき $\bigcup \mathcal{O}_\alpha$ という形の任意の開集合に対する von Neumann 代数が

$$R(\bigcup \mathcal{O}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha R(\mathcal{O}_\alpha) \tag{5. A. 19}$$

で定義できることになる．

この定式化を認めた上は，大域的な観測量もある程度まで局所的なものを通じて定義で

---

[1] Araki and Haag (1967) の用語では，$\bar{R}$ はゼロ階の準局所的演算子を含むということになる．集合論の意味の和 (5. A. 17) に属する演算子は局所的であるという．

きることに注意しておこう．

Haag の原始因果性（第3章1.3節）も von Neumann 代数の言葉を用いると自然な定式化が得られる．そのために領域 $\mathcal{O}$ の《因果の影》という概念を導入しよう．点 x を通り過去に向かうすべての時間的または等方的な射線が $\mathcal{O}$ と交わるとき，x は $\mathcal{O}$ の因果の影に属するという．そうすると（Haag の）因果性は次の形に述べられる：

6)　もし領域 $\mathcal{O}_2$ が領域 $\mathcal{O}_1$ の因果の影に含まれるならば，$R(\mathcal{O}_2)\subset R(\mathcal{O}_1)$ となる．

因果の影の概念に加えて，その定義で過去むきとした射線を未来むきに変え因果の逆影（または時間反転した影）といった概念を導入しておくと便利である．領域 $\mathcal{O}$ の因果の順影と逆影の合併を領域 $\mathcal{O}$ の《因果圏》とよび $\mathcal{O}^c$ と記す．TCP 不変な理論においては，要請 6) から，$\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1$ の因果圏に含まれていれば $R(\mathcal{O}_2)\subset R(\mathcal{O}_1)$ となる．この結果を要請 1) に合わせると，任意の領域 $\mathcal{O}$ に対応する von Neumann 代数は，その因果圏の von Neumann 代数に一致することがわかる：

$$R(\mathcal{O}) = R(\mathcal{O}^c). \tag{5. A. 20}$$

局所 von Neumann 代数の唯一の知られている例は，自由スカラー場の理論のそれである（Araki (1963 b, 1964 a, b)，Kadison (1963)，Dell' Antonio (1967)）．任意に選んだ実数値の基礎関数 $f(x)$ に対し，自由場の対称演算子 $\varphi(f)$ が自己共役な拡大をもつことは重要な事実である（すなわち $\varphi^*(f)=\varphi^{**}(f)$；このような演算子は本質的に自己共役であるといわれる．たとえば [20] の第 X 章§8を参照）．そのために，演算子$\varphi(f)$（正確にはその閉包）は一意的に定まるスペクトル分解（1. 1. 47）をもつ．スペクトル射影 $E_{\varphi(f)}(\Delta)$ は基礎関数 $f(x)$ が空間 $\mathcal{D}(\mathcal{O})$（第1章1.3節）を動くとき，一つの von Neumann 代数 $R(\mathcal{O})$ を生成する．こうして得られた $\mathcal{O}$ に依存する von Neumann 代数の系は条件 1) ～ 6) をすべてみたし，その上，次のような注目すべき性質 7), 8) をもつ．ただし，これは $\mathcal{O}$ が特別な形をもつ場合に成り立つ性質である．つまり，$\mathcal{O}$ がある空間的な超平面の上にあって断片的に滑らかな（二次元的）境界をもつ有界な開集合 B（超平面上で見て開）の因果圏であるという場合に成り立つのである——

7)　$\mathring{\mathcal{O}}'$ を要請 3) にいう集合 $\mathcal{O}'$ の内点とすれば，

$$R(\mathring{\mathcal{O}}') = R(\mathcal{O})'.$$

この性質は局所可換性のより強い形と考えられる．

8)　開集合 $\mathcal{O}$ に対する自由場の von Neumann 代数はファクターである：

$$R(\mathcal{O})\cap R(\mathcal{O})' = \{\alpha I\}. \tag{5. A. 21}$$

さらに，これは A.2 節の分類にいう Ⅲ 型のファクターである (Araki (1964 b)).

局所代数による記述が自由場においてすでに複雑だからといって意気沮喪することはない．上に引用した荒木の仕事で与えられた von Neumann 代数の系は，自由場だけでなく，自由場を含む Borchers 同値類の全体に対応していることに注意すべきである．

条件 7), 8) は一般に成り立つと要請してよいものか，それとも，これらは自由場だけに対して成り立つ特殊なものなのか，はっきりしていない．まだ証明はないが，(5. A. 21) はコヒーレントな空間に制限すれば一般の場合にも他の公理から導かれるという仮説がある．

A. 5. 諸結果の概観

相対論的な量子論の局所 von Neumann 代数による定式化および場の量子論との関係についての諸結果を証明なしに（しかし文献は示して）列挙しておこう．

I. 《代数 $R(\mathcal{O})$ の一致，不一致の条件》．並進のユニタリ演算子 $U(a) = U(a, 1)$ のスペクトル分解は，

$$U(a) = \int e^{ipa}\, dE(p) \tag{5. A. 22}$$

という形をしている．スペクトル条件により $dE(p)$ は前方光円錐の閉包 $\bar{V}^+$ においてのみゼロと異なる．ベクトル $\Phi \in \mathcal{H}$ が《コンパクトなエネルギー》をもつとは，ベクトル値の関数 $dE(p)\Phi$ が $R_4(p)$ でコンパクトな台をもつことである（スペクトル条件により，十分に大きい p^0 で $dE(p)\Phi = 0$ となっていればよい）．コンパクトなエネルギーをもつベクトルに対しては，ベクトル値関数 $U(a, 1)\Phi$ は a に関し複素四次元空間 C_4 全体に解析接続される．ベクトル Φ が空間 $\mathcal{H}$ において代数 R に関する《生成ベクトル (totalisateur, 仏)》であるとは，すべての $B \in R$ に対する $(\chi, B\Phi) = 0$ から $\chi = 0$ がでることをいう．ベクトル Φ が代数 R の《分離ベクトル (séparateur, 仏)》であるとは，$B \in R$ と $B\Phi = 0$ から $B = 0$ がでることをいう．Φ が R の分離ベクトルであるためには，それが可換子代数 R' の生成ベクトルであることが必要十分である（[52] の p. 6 を見よ）．それ自身としても興味深い次の補題は，Reeh and Schlieder (1961) による (また W ightman (1964 a) をも参照)：

[補題 5. A. 1] ベクトル Φ はコンパクトなエネルギーをもちコヒーレントな空間 $\mathcal{H}_j$ に属するとする．これは $\mathcal{H}_j$ において各代数 $R(\mathcal{O})$ の生成ベクトルでもあり分離ベクトルでもある．

以後，領域 $\mathcal{O}$ の《空間的な被覆》という概念が入用になる．これを $\langle\mathcal{O}\rangle$ と記す．時空の点 x, y が $x-y\in V^+$ となっているとしよう．二重円錐 $C_{x,y}$ を

$$x-z\in V^+, \qquad z-y\in V^+$$

をみたす点 z の開集合と定義する．このとき $x-y\in V^+$ で線分 $\alpha x+(1-\alpha)y$ $(0<\alpha<1)$ が $\mathcal{O}$ に含まれているような $x, y\in\mathcal{O}$ にわたる $C_{x,y}$ の合併が $\langle\mathcal{O}\rangle$ である．Borchers (1961) は

$$R(\mathcal{O}) = R(\langle\mathcal{O}\rangle) \tag{5. A. 23}$$

を証明した．しかしながら，対応する代数の一致しないことがあらかじめ言えるような領域の対も存在する（たとえば Wightman (1964 a)を見よ）：

[定理 5. A. 1] $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}$ で $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}$ の境界のあいだの Euclid 距離が正なら，$R(\mathcal{O}_1)$ は $R(\mathcal{O})$ の真部分代数である．

この結果を補題 5. A. 1 と合わせると，代数 $R(\mathcal{O})$ は有限の型（A. 2 節の分類にいう I_n 型と II_1 型）のファクターを含まないことが示される（Kadison (1963)，Guenin and Misra (1963)；また Wightman (1964 a) の綜合報告も参照）．これから，特に，$R(\mathcal{O})$ のどの一つも可換（Abel 的）であり得ないことがいえる．

II. 《場の量子論との関係》．第 3 章の公理をみたすエルミートなスカラー場の理論が与えられたとしよう．この場に von Neumann 代数の系が一意に対応づけられるためには，任意の実の基礎関数 $f(x)$ に対し演算子 $\varphi(f)$ が（自由場の場合と同じく）本質的自己共役であること，つまり

$$\varphi^*(f) = \varphi^{**}(f) \qquad (f(x) = \bar{f}(x) \text{ のとき}) \tag{5. A. 24}$$

の成り立つことが十分である．そこで，この等式の成り立つ条件を見いだすことが問題になってくる．場の演算子が自己共役な拡大をもつための十分条件は Borchers and Zimmermann (1964) の論文で初めて定式化された．この条件は Nelson (1959) の仕事に基づくもので，すべての演算子 $\varphi(f)$ に対して真空が《解析ベクトル》になっていること，というのである．これはいいかえれば，任意に選んだ有界な台をもつ基礎関数 $f(x)$ に対してベキ級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|(\varphi(f))^n\Psi_0\|\cdot z^n$$

が z 平面上に 0 でない収束半径をもつことの要求にほかならない．これは，また

$$\text{任意の } f\in\mathcal{D}(R^4) \text{ に対し } \quad \|[\varphi(f)]^n\Psi_0\| \leqslant (C_f)^n n! \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{5. A. 25}$$

という要求に等価である．演算子 $\varphi(f)$ が本質的自己共役であるための必要十分条件は Gachok (1966 a, b) と Berezanskii (1966) が与えた．それは，場 $\varphi(f)$ に関してベクトル Ψ_0 が《準解析的》であるということで（準解析性については Nussbaum (1965) を参照），その意味は，数列

$$\|[\varphi(f)]^n\Psi_0\| = \rho_n$$

が条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}} = \infty \tag{5. A. 26}$$

をみたすことである．Stirling の公式と調和級数の発散の条件とから，(5. A. 26) は，解析ベクトルの条件 (5. A. 25) が成り立っているときは確かにみたされていることがわかる．しかし，条件 (5. A. 26) は (5. A. 25) が破れていてもみたされ得るもので，実際

$$\rho_n = (n \ln n)^n$$

という場合がその例になる．

自由スカラー場 φ は条件 (5. A. 25) をみたす．しかし，この場の Wick 積 $:\varphi^3(x):$ がすでに，より弱い条件 (5. A. 26) さえみたさない．それでも，《場》$:\varphi^3(x):$ は Stone (1951—1952) により研究された非有界と有界の演算子のあいだの対応を利用して von Neumann 代数の系に関係づけることができる．しかしながら，そのようにして得た von Neumann 代数が前節で定式化した諸公理をみたすか否かは現在のところ明らかでない．

与えられた von Neumann 代数の系から出発して相対論的な場を復元するという逆の問題に入るために，《Haag=荒木の場》という補助概念を導入しよう．すなわち，$\mathcal{O}$ を有界集合として各演算子 $A \in R(\mathcal{O})$ に

$$A(x) = U(x)AU^{-1}(x) \qquad (A(0) \equiv A) \tag{5. A. 27}$$

で定義される Haag=荒木の場を対応させる．ここに $U(x)$ は並進の演算子 (5. A. 22) である．場 $A(x)$ は並進に関し共変的である：

$$U(a)A(x)U^{-1}(a) = A(x+a). \tag{5. A. 28}$$

しかし，斉次 Lorentz 群に関しては共変でなく，また局所的でもない（すでに第3章，2.4 節において注意したが，時空の各点で Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の演算子として定義された，相対論的に共変な量子場は存在しない）．それでも，もし領域 $\mathcal{O}+x$ と $\mathcal{O}+y$ とが互いに空間的にへだたっているならば，

$$[A(x), A(y)] = 0$$

が成り立つ．ちょっと考えると，領域 $\mathcal{O}$ のさしわたしが 0 にゆく極限で局所場に到達できそうに思われるだろう．しかし，第 3 章，2.4 節の結果に照応して，真空を含むコヒーレントな部分空間においては，

$$\bigcap_{\mathcal{O}\ni x} R(\mathcal{O}) = \{\alpha 1\} \tag{5. A. 29}$$

となる（Wightman (1964 a)）．すなわち，その極限では単に定数倍するだけというトリヴィアルな演算子を得るばかりである．

視野を一層ひろげると，均らした演算子

$$A_n(f) = \int f(x) U(x) A_n U^{-1}(x) d^4x \tag{5. A. 30}$$

から出発する可能性が考えられる．ここに $A_n \in R(\mathcal{O}_n)$ で，$\mathcal{O}_n$ は一点に収縮してゆく領域の列とする．しかし，演算子値の一般関数 $A_n(f)$ が，必要な性質をもつトリヴィアルでない極限に収束するように演算子の列 A_n が選べるかどうか，いまの時点では明らかでない．

III．《局所代数を用いた散乱理論》．散乱理論を考察するために Araki and Haag (1967) は第一に局所演算子の集合をいくらか拡大して，異なるコヒーレント部分空間のあいだに遷移を起こす演算子も含むようにしなければならなかった．そのような演算子の導入は，Fermi 粒子とか荷電粒子とかの散乱を考える場合には都合がよい．そうした拡大の際には特に演算子の一部は Fermi 型としなければならない（すなわち，それらに対して前節の要請 3）の可換性を反可換性で置き換える）．それは，入ってくる（または出てゆく）粒子の定まった配位をもつ状態ベクトルをつくるのに必要なのである．このようにすれば，いま考えているアプローチから散乱断面積に対する十分に便利な公式を得ることができる．

同時に著者たちは，原理的には観測量だけを用いて（Fermi 演算子とか電荷を変える演算子とかは用いずに）理論が定式化できることを示している．しかしながら，そのような定式化はあまりにも大掛かりで実用上は満足できるものではないだろう．

散乱理論のいくらか異なった定式化が Epstein (1967) の仕事に含まれている．著者は，彼によって（衝突理論の定式化の際に）なされた仮定が S 行列の TCP 不変性を証明するのに十分であることを示している．ただし，補足された諸仮定のなかに，一粒子状態の構造についての仮説があり，それは質量のスピンに関する縮退を禁止するものであることを強調しておかねばならない．

最後に，A. 4 節で行なった要請 1) ～ 6) からスピンと統計の関係の定理を導きだすことは原理的に不可能であることを強調しよう．というのは，無限成分の自由スピノル場が構成できて，これは Lorentz 群の（無限次元）ユニタリ表現に従って変換し（反交換関係の代わりに）交換関係により量子化されるからである．

このような場に，前節の要請をすべてみたす局所観測量の代数の系を結びつけることは可能である (Streater (1967) を見よ．Stoyanov and Todorov (1968) には，この問題に関する文献リストがある)．要するに，問題は，第3章の要請 V において量子場の変換を与える表現を有限次元としたことが（公式 (3. 1. 6) を見よ)，有界演算子の局所代数に対する公理系にはどこにも反映されていないところにある．

文　献　案　内

§1.　Lorentz 不変で管状領域 T_n^+ において正則な解析関数の一般形に関する定理は，Hall and Wightman (1957) の論文に証明されている．また，この論文において不変な関数の場合の Bargmann の定理 5. 1. 2 が初めて公表されたのだった．この定理を Lorentz 群の有限次元表現に属する変換に対し共変な任意の関数にまで一般化したのは Wightman (1960 a) と Jost (1961) である．拡大管状領域の実点の集合は Jost (1957) により定義された．拡大管状領域の完全な記述は，Wightman (1960 a) の精細な論文に含まれている．不変な一般関数に関する Hall-Wightman の定理の種々の拡張は Hepp (1963 a, 1964 b) にある．定理 5. 1. 2 のある種の一般化が Minkowski et al. (1964) の論文に見られる．管状領域と Jost 点のある近傍とで解析的な任意の関数が，同時に拡大管状領域で解析的であって Lorentz 群の有限次元表現に従って変換するという定理（ある意味で定理 5. 1. 2 の逆）は，一つの四元ベクトルの関数の場合に Bogoliubov and Vladimirov (1958) が証明し，一般の n 変数の関数の場合は Bros et al. (1967) が証明した．

§2.　Lagrange 形式の標準的な場の理論では，*TCP* 定理はスピンと統計の問題と密接に結びついて現われた：Schwinger (1951), Lüders (1954, 1957, 1961), Pauli (1955)（歴史的なことは Jost の論文 (1959) と本 [2]（第4章の文献表）を見よ)．Wightman の公理論的アプローチにより *TCP* 定理を証明したのは Jost (1957) である．*TCP* 不変性と弱局所可換性との関係は，さらに Dyson (1958 a) に議論されている．局所可換性の大域的性格に関する定理は Jost と Steinmann により証明され，Wightman (1960 a) の論文で公表された（また Petrina (1961) も参照)．最近この方向で強い結果が得られた．Pohlmeyer (1967) は，交換関係の行列要素が空間的なへだたり r の増大につれて $\exp(-\varepsilon r^2)$ より速く 0 に収束するとしたら実は厳格な局所可換性が成り立つことを証明した．*TCP* 定理を実験で調べる可能性については Lee et al. (1957), M. Shirokov (1962), Bilenkii (1966), Gourdin (1967) および単行本 [55] を見よ．$K^0\bar{K}^0$ の伝播行列は，*TCP* 不変性からの帰結が，この場合，実は Lorentz 不変性からでることを示す興味深い物理的実例であるが，Lipshutz (1966) により考察されている．局所場の同値類は Borchers (1960) により導入された（Wightman の講義 (1962) や Acharya (1962), Araki (1963 a) の論文も参照)．互いに局所的で同一の S 行列をもつ場の諸例は Kamefuchi et al. (1961)（および，これに引用されている諸論文）が与えてい

る．自由場の Borchers 同値類の記述は Epstein (1963) と Langerholc and Schroer (1965) が与えた．S 行列がトリヴィアルになる他の条件は，Bardakci and Sudarshan (1961)，Greenberg and Licht (1963)，Acharya (1963) が述べている．彼らは有限個の非弾性過程しか許さない S 行列はトリヴィアルになるほかないことを証明したのである．

§3. 任意スピンをもつ自由場に対するスピンと統計の関係は Fierz (1939) と Pauli (1940) が証明した．一般的な要請に基づく証明は Lüders and Zumino (1958)，Burgoyne (1958)，Dell' Antonio (1961 b) で行なわれた．スピンと統計の定理とクラスター分解性との関係は Froissart and Taylor (1967) が議論した．異種の場のあいだの交換関係は，普通の理論の枠内では Lüders and Zumino (1958) が，公理論的アプローチでは Araki (1961 b) が論じた．これらの仕事に利用されている Klein 変換は Klein (1938) が別の関係で用いたものである．自由パラ場の量子論は Green (1953) が展開した（より以前にパラ Bose の振動子を Wigner (1950) が考察している）．パラ統計は，さらに，Volkov (1959, 1960)，Chernikov (1962)，Kamefuchi et al. (1962, 1963)，Galindo and Yndurain (1963)，Messiah and Greenberg (1964)，Greenberg and Messiah (1965) が研究した（なお Greenberg (1965) と Govorkov (1966 a) の綜合報告を参照．ここには Feshbach and Tomljanovich (1967) の最近の仕事まで含む完全な文献表がついている）．パラ統計およびスピンと統計の関係に対する公理論的アプローチは Dell'Antonio et al. (1962) により議論された．自由パラ場の場合に局所性とパラ局所性との等価なことは Araki et al. (1966) が証明した．クォークがパラ統計に従い得るという仮説は Greenberg (1964) と Govorkov (1966 b) が考察した．

§4. 場の量子論の正準 Hamilton 形式に関しては，[45] および Araki (1960 b) を見よ．Haag (1955) の定理は，ここでは Hall and Wightman (1957) の一般的な形式で述べた．補題 5.4.1 の証明は Federbush and Johnson (1960) および Jost (1961) が与えた（別の考察が Greenberg (1959) にある．また Gachok (1961) も参照）．正準交換関係の非同値な表現に関しての綜合報告を Lopuszanski (1965) が与えており，原論文のリストもつけてある（また [53]，[13] の第 4 章 §5，Weidlich (1963)，Astakhov et al. (1967) も参照）．生成・消滅演算子をまぜる線形な正準変換 (5.4.30) は Bogoliubov が超伝導の理論で用いた（[54] と Haag (1962) を見よ）．Haag の定理の物理的解釈は Wightman (1967) の講義で議論されており，そこには文献の補足がある．これは [2] でも論じられている．《対称性の破れ》が時間に依存したユニタリ変換では記述できないという定理は Fabri et al. (1967) が証明した．

付録 A. 有界演算子の代数（von Neumann 代数）を用いた場の量子論の定式化は Haag (1957, 1958) と Araki (1961/62) のものである（Haag and Schroer (1962) および Wightman (1964 a) の綜合報告も参照）．自由場の von Neumann 代数は Araki (1963 b, 1964 a, b)，Kadison (1963)，Kastler (1965)，Dell' Antonio (1967) が研究した．抽象 C^*-代数を用いた局所量子場の理論の定式化は Haag and Kastler (1964) のものである（また Kastler (1963) および Robinson (1965 a) の綜合報告を参照）．このアプローチに従ったエネルギーの正値性の代数的条件は Doplicher (1965) が与えた．代数的理論の不変状態の不変な端点状態への分解に関しては Ruelle (1966) を見よ．局所 von Neumann 代数との対応に必要な，場の演算子の本質的自己共役性の条件は，Borchers and Zimmermann (1964)，Gachok (1966 a, b) および Berezanskii (1966) が論じた．代数的アプローチにおける散乱理論は，Araki and Haag (1967) が研究した．局所理論において von Neumann 代数で定式化した *TCP* 定理は Epstein (1967) によって証明された．代数的定式化においてスピンと統計の関係が破れるという例は，無限成分の場の考察に基づくもので，Streater (1967) が与えた．この例においては質量がスピンに関して無限に縮退しており，Haag and Swieca (1965) の示唆したコンパクト性の条件が破れている．

C^*-代数と von Neumann 代数との数学理論については専門書 [31]，[52] を見よ．

［訳者の補足］　場の理論における正準交換関係の表現については［梅村a］の解説および［江沢］を参照．代数的アプローチに関する綜合報告としては［荒木］がある．その後の発展の一面が［荒木a，b］からうかがわれるだろう．Nelson の定理の場の理論への応用例が［関根］に与えられている．［豊田］のなかの豊田および江沢の項は，量子力学の数学的な構造を素描する試みであって，この章の内容にも関係するところが少なくない．この本の原書の刊行後のことになるが，場の量子論の公理系をみたすモデル（ただし，時空は四次元でなく二次元）を構成した Glimm and Jaffe の最近の仕事の紹介が［江沢a］にある．このモデルは，おそらくトリヴィアルでない S 行列をもつだろうと考えられているが，その厳密な証明はまだない．なお，当の Glimm および Jaffe による講義が，巻末に訳者の補足した文献［DeWitt］，［Jost］に入っている．

参 考 文 献

第 1 部

[1] N. N. Bogoliubov, B. V. Medvedev and M. K. Polivanov (Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев и М. К. Поливанов), Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М.(1958).
(英訳) *Problems in the Theory of Dispersion Relations*, Institute for Advanced Studies, Princeton (1958); *Fortschr. Phys.* **6**, 169 (1958).

[2] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin & Statistics, and All That*, Benjamin, New York (1964).

[3] R. Jost, *The General Theory of Quantized Fields*, Am. Math. Soc. Publications, Providence, (1963).

[4] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov (Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков), Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, М.(1957).
(英訳) *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, New York (1959).

[5] E. M. Henley and W. Thirring, *Elementary Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1962).

[6] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row, Peterson & Co., Evanston (1961).

[7] K. Nishijima, *Fundamental Particles*, Benjamin, New York (1963).

[8] R. E. Marshak and E. C. G. Sudarshan, *Introduction to Elementary Particle Physics*, Interscience, New York (1961).

[9] M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory*, Interscience-John Wiley, New York (1964).

[10] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov (Л. В. Канторович и Г. П. Акилов), Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М. (1959).
(邦訳) ノルム空間の函数解析 (全2巻), 東京図書 (1964).

[11] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators* I, II, Interscience, New York (1958), (1963).

[12] I. M. Gelfand and G. E. Shilov (И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов), Прост-

ранства основных и обобщенных функций (Обобщенные функции, вып. 2), Физматгиз, М. (1958).

(英訳) *Generalized Functions* (5 vols.) ; vol. 2, Spaces of Fundamental and Generalized Functions, Academic Press (1968).

[13] I. M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin (И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин), Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып. 4), Физматгиз, М. (1961).

(英訳) *Generalized Functions* (5 vols.) ; vol. 4, Applications of Harmonic Analysis, Academic Press (1964).

[14] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Akademie-Verlag, Berlin (1965).

[15] N. I. Akhiezer and I. M. Glazmann (Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман), Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М. (1966).

(独訳) *Theorie der Linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie-Verlag, Berlin (1968).

[16] M. A. Naimark (М. А. Наймарк), Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, М. (1958).

(英訳) *Linear Representations of Lorentz Group*, Pergamon (1964).

[17] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris: I (1950) ; II (1951) ; 増訂版 (1967).

(邦訳) 超函数の理論，岩波書店 (1971).

[18] I. M. Gelfand and G. E. Shilov (И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов), Обобщенные функции и действия над ними (Обобщенные функции, вып. 1), Физматгиз, М. (1958).

(邦訳) 超函数論入門 (全2巻)，共立出版 (1963).

[19] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (И. С. Градштейн и И. М. Рыжик), Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М. (1962).

(英訳) *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press (1966).

[20] K. Maurin, *Methods of Hilbert Spaces*, Polska Akademia Nauk, Warszawa (1967).

[21] Y. M. Berezanskii (Ю. М. Березанский), Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев (1965).

(英訳) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*, Am. Math. Soc. Publications (1968).

[22] J. Mikusinski et R. Sikorski, *Théorie Élémentaire des Distributions*, Gauthier-Villars, Paris (1964).

[23] I. M. Gelfand, M. I. Graev and N. Ya. Vilenkin (И. М. Гельфанд, М. И. Граев и Н. Я. Виленкин), Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции, вып. 5), Фи-

зматгиз, М. (1962).
(英訳) *Generalized Functions* (5 vols.); vol. 5, Integral Geometry and Representation Theory, Academic Press (1966).

[24] V. S. Vladimirov (В. С. Владимиров), Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», М. (1964).
(英訳) *Methods of the Theory of Functions of Several Complex Variables*, M.I.T.Press(1968).

[25] L. S. Pontrjagin (Л. С. Понтрягин), Непрерывные группы, Гостехиздат, М. (1954).
(邦訳) 連続群論 (全2巻), 岩波書店 (1957～58).

[26] E. P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, London-New York (1959).
(邦訳) 群論と量子力学, 吉岡書店 (1971).

[27] T. Kahan (ed.), *Théorie des Groupes en Physique Classique et Quantique*, t. 1. Structures Mathématiques et Fondements Quantiques, Dunod, Paris (1960).
(英訳) *Theory of Groups in Classical and Quantum Physics*, American Elsevier, New York (1966).

[28] P. T. Matthews, *The Relativistic Quantum Theory of Elementary Particle Interactions*, Rochester Lecture Note, Notes by A. Fujii (1957).

[29] L. B. Okun (Л.Б.Окунь), Слабое взаимодействие элементарных частиц, Физматгиз, М. (1963).
(英訳) *Weak Interactions of Elementary Particles*, Pergamon (1966).

[30] D. P. Zhelobenko (Д. П. Желобенко), Лекции по теории групп Ли (Lie 群論に関する講義), ОИЯИ, Дубна (1965).

[31] M. A. Naimark (М.А.Наймарк), Нормированные кольца, «Наука», М. (1968).
(英訳) *Normed Rings*, Noordhoff (1959).
(邦訳) 関数解析入門, 共立全書 (1964).

[32] V. I. Smirnov (В. И. Смирнов), Курс высшей математики, том.Ⅲ.
(邦訳) 高等数学教程, 第5～7分冊, 共立出版 (1958).

[33] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).
(邦訳) 量子力学の数学的基礎, みすず書房 (1957).

[34] I. M. Gelfand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro (И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос и З. Я. Шапиро), Представления группы вращения и группы Лоренца, Физматгиз, М. (1958).
(英訳) *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*, Pergamon (1963).

[35] É. Cartan, *Leçons sur la Théorie des Spineurs* I, II, Hermann, Paris (1938).

[36] P. K. Rashevskii (П. К. Рашевский), Риманова геометрия и тензорный

анализ (Riemann 幾何とテンソル解析), 《Наука》, M. (1967).
[37] D. Kastler, *Introduction à l'Électrodynamique Quantique*, Dunod, Paris (1961).
[38] A. Visconti, *Théorie Quantique des Champs* (Tomes I et II), Gauthiers-Villars, Paris (1960).
(英訳) *Quantum Field Theory*, vol. 1, Pergamon (1969).
[39] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam (1956).
[40] V. A. Fock (B. A. Фок) Работы по квантовой теории поля (場の量子論論文集), Изд. ЛГУ, Л. (1957).
[41] L. P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, Princeton Univ. Press, Princeton (1933).
[42] G. Y. Lyubarskii (Г. Я. Любарский), Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, M. (1957).
(英訳) *Application of Group Theory in Physics*, Pergamon (1960).
[43] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley, New York (1962).
[44] Nguyen van Hieu (Нгуен ван Хьеу), Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц (素粒子のユニタリ対称性に関する講義), Атомиздат, M. (1967).
[45] G. Wentzel, *Quantentheorie der Wellenfelder*, Franz Deuticke, Wien (1943).
(英訳) *Quantum Theory of Wave Fields*, Interscience, New York (1949).
[46] K. Friedrichs, *Mathematical Aspects of Quantum Theory of Fields*, Interscience, New York (1953).
[47] R.E.A.C. Paley and N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence (1934).
[48] J. Hilgevoord, Dispersion Relations and Causal Description. An Introduction to Dispersion Relations in Field Theory, North-Holland, Amsterdam (1960).
[49] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions* I, II, III, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York (1953～55).
[50] I. T. Todorov (И. Т. Тодоров), Аналитические свойства диаграмм фейнмана в квантовой теории поля (場の量子論における Feynman ダイヤグラムの解析的性質), Изд-во Болгарской Академии Наук, София (1966).
[51] S. Bochner and W. T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton Univ. Press, Princeton (1948).
[52] J. Dixmier, *Les C*-Algèbres et leurs Représentations*, Gauthier-Villars, Paris (1964).
[53] F. A. Berezin (Ф. А. Березин), Метод вторичного квантования, 《Наука》, M. (1965).
(英訳) *Method of Second Quantization*, Academic Press (1966).
[54] N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev and D. V. Shirkov (Н. Н. Боголюбов,

В. В. Толмачев и Д. В. Ширков), Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР, М. (1958).
(英訳) *A New Method in the Theory of Superconductivity*, Consultants Bureau, New York (1959).

[55] P. K. Kabir, *The CP Puzzle. Strange Decays of the Neutral Kaon*, Academic Press, London-New York (1969).

[56] G. M. Fikhtengolts (Г. М. Фихтенгольц), Курс дифференциального и интегрального исчисления, «Наука», М. (1966).
(英訳) *Fundamentals of Mathematical Analysis* (2 vols.), Pergamon (1965).

第 2 部

Analysis——Proceedings of a Conference on the Theory and Applications of Analysis in Function Space held at Endicott House in Dedham, Mass., June 1963. Edited by W. T. Martin and I. Segal, M. I. T. Press, Cambridge, Mass. (1964).

Boulder——Lectures in Theoretical Physics, Vol. VII-A Lorentz Group. Lectures delivered at the Summer Institute for Theoretical Physics, Univ. of Colorado, Boulder (1964). Edited by W. E. Brittin and A. O. Barut, The University of Colorado Press, Boulder (1965).

Brandeis——Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, 1965, Vol. 1, Axiomatic field theory, Gordon and Breach, New York-London (1966).

Dubna 64 (Дубна)——Международная зимняя школа теоретической физики при объединенном институте ядерных исследований, тт. I～III, ОИЯИ, Дубна (1965).

Dubna 67 (Дубна)—— Труды международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, ОИЯИ, Дубна (1968).

Istanbul—— Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, Lectures of the Istanbul Summer School of Theoretical Physics, 1962. Edited by. F. Gürsey, Gordon and Breach, New York-London (1964).

Caianiello——Lectures on Field Theory and Many-Body Problem. Edited by E. R. Caianiello, Academic Press, New York-London (1961).

Karpacz——Axiomatic Approach to the Quantum Field Theory and the Many-Body Problem, 5-th Annual Winter School for Theoretical Physics in Karpacz, February 18—March 2, 1968. University of Wroclaw, Wroclaw (1968).

Les Houches——Relations de Dispersion et Particules Élémentaires, École d'Été de Physique Théorique. Les Houches. Hermann, Paris (1960).

Lille——Les Problemes Mathématiqes de la Théorie Quantique des Champs, Lille (1957) ; Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1959).

NKTP (НКТП)——Нелинейная квантовя теория поля. Сборник статей под

редакцией Д. Д. Иваненко, ИЛ. М. (1959).

Trieste 62——Theoretical Physics, Lectures at Trieste Seminar, 1962, IAEA, Vienna (1963).

Trieste 65——High Energy Physics and Elementary Particles, Lectures at Trieste Seminar, 1965, IAEA, Vienna (1965).

Yalta——Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Международная школа по теоретической физике, Ялта, 1966, 《Наукова думка》, Киев (1967).

* * *

Acharya, R. (1962), Some Borchers-type theorems in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **23**, 580.

Acharya, R. (1963), Some consequences of 《minimal》 analyticity and unitarity in field theory, *Nuovo Cim.* **27**, 1151.

Aks, S. O. (1965), Proof that scattering implies production in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **6**, 516.

Andersen, C. M., A. Böhm and A. M. Bouncristiani (1966), Rigged Hilbert space and mathematical description of physical systems, *Lectures in theoretical physics*, W. E. Britten, A. O. Barut and M. Guenin (ed.) Gordon and Breach, pp 255—317, London (1967).

Araki, H. (1960a), On asymptotic behaviour of vacunm expectation values at large space-like separation, *Ann. Phys.* **11**, 260.

Araki, H. (1960b), Hamiltonian formalism and canonical commutation relations in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **1**, 492.

Araki, H. (1961a), Wightman functions, retarded functions and their analytic continuations, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **18**, 83.

Araki, H. (1961b), On the connection of spin and commutation relations between different fields, *J. Math. Phys.* **2**, 267.

Araki, H. (1961/1962), *Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie*, I, II. Lecture notes, ETH, Zürich.

Araki, H. (1963a), A generalization of Borchers theorem, *Helv. Phys. Acta* **36**, 132.

Araki, H. (1963b), A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field, *J. Math. Phys.* **4**. 1343.

Araki, H. (1964a), von Neumann algebras of local observables for free scalar field, *J. Math. Phys.* **5**, 1.

Araki, H. (1964b), Type of von Neumann algebra associated with free field, *Prog. Theor. Phys.* **32**, 956.

Araki, H., O. W. Greenberg and J. S. Toll (1966), Equivalence of locality and paralocality in free parafield theory, *Phys. Rev.* **142**, 1017.

Araki, H. and R. Haag (1967), Collision cross sections in terms of local observables, *Commun. Math. Phys.* **4**, 77.

Araki, H., R. Haag and B. Schroer (1961), The determination of local or almost local field from given current, *Nuovo Cim.* **19**, 90.

Araki, H., K. Hepp and D. Ruelle (1962), On the asymptotic behaviour of Wightman functions in space-like directions, *Helv. Phys. Acta.* **35**, 164.

Arbuzov, B. A. and A. T. Filippov (1966) (Б. А. Арбузов и А. Т. Филиппов), *CP* 非保存の可能なメカニズムについて, [Yalta], 597—609.

Astakhov, A. V., O. I. Zavyalov and A. D. Sukhanov (1967) (А. В. Астахов, О. И. Завьялов и А. Д. Суханов), 場の量子論における正準交換関係の非同値表現の問題, プレプリント ИТФ-67-39, Киев.

Bardakci, K. and E. C. G. Sudarshan (1961), Local fields with terminating expantions, *Nuovo Cim.* **21**, 722.

Bardakci, K. and B. S. Schroer (1966), Local approximation in renormalizable and nonrenomalizable theories, I, II, *J. Math. Phys.* **7**. 10 & 16.

Bargmann, V. (1954), On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. of Math.* **59**, 1.

Bargmann, V. (1962), On the representations of the rotation group, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 829.

Bargmann, V. (1964), Note on Wigner's theorem on symmetry operations, *J. Math. Phys.* **5**, 862.

Bargmann, V. (1967), On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part II, A family of related function spaces. Application to distribution theory, *Commun. Pure Appl. Math.* **20**, 1.

Bargmann, V., and E. P. Wigner (1948), Group theoretical discussion of relativistic equations, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA) **34**, 211.

Baumann, K. (1958), Retardierte Produkte und Bindungszustände, *Zs. f. Phys.* **152**, 448.

Berezanskii, Yu. M. (1966) (Березанский, Ю. М.), 場の演算子の自己共役性および Wightman 汎関数の積分表示, УМЖ **18**, No. 3, 3.

Bialynicki-Birula, J. (1963), Elementary particles and generalized statistics, *Nucl. Phys.* **49**. 605.

Bilenkii, S. (1966) (С. Биленький), p-p 散乱における *CPT* 不変性の検証の可能な方法について, Письма ЖЭТФ **3**, 118.

Blokhintsev, D. I. and G. I. Kolerov (1964), A causality and dispersion relations, *Nuovo Cim.* **34**, 163.

Bogoliubov, N. N. (1952) (Н. Н. Боголюбов), 場の量子論の変分方程式, ДАН СССР, **82**, 217.

Bogoliubov, N. N. (1955), 場の量子論における因果性の条件 (ソ連邦科学アカデミー, 物理・数学分科会議での 報告, 1954年4月14日), Известия АН СССР, сер.

физическая **19**, 237.

Bogoliubov, N. N. (1956), Seattle 理論物理学国際会議での報告 (1956年 9 月, 未刊行).

Bogoliubov, N. N. (1958), Über die Verwendung von Variationsableitungen bei Problemen der statistischen Physik und der Quantentheorie der Felder, *Fortschr. Phys.* **6**, 426.

Bogoliubov, N. N. (1966), 素粒子の対称性の理論, [Yalta], 5—112.

Bogoliubov, N. N. and D. V. Shirkov (1955) (Н. Н. Б. и Д. В. Ширков), 場の量子論の諸問題, УФН **55**, 149.

Bogoliubov, N. N. und O. A. Parasiuk (1957), Über die Multplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, *Acta Mathematica* **97**, 227.

Bogoliubov, N. N. and V. S. Vladimirov (1958) (Н. Н. Б. и В. С. Владимиров), 一般関数の解析接続に関する一つの定理, Научные доклады высшей школы No. 3, 26 (なお, No. 2 (1959), 172 も見よ)

Bogoliubov, N. N., A. A. Logunov and D. V. Shirkov (1959) (Н. Н. Б., А. А. Логунов и Д. В. Ш.), 分散式の方法と摂動論, ЖЭТФ **37**, 805.

Bohr, N. and L. Rosenfeld (1933), Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen, *Dan. Mat. Fys. Medd.* **12**, No. 8.

Bohr, N. and L. Rosenfeld (1950), Field and charge measurements in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.* **78**, 794.

Borchers, H. J. (1960), Über die Mannigfaltigkeit der interpolierenden Felder zu einer kausalen *S*-Matrix, *Nuovo Cim.* **15**, 784.

Borchers, H. J. (1961), Über die Vollständigkeit Lorentz-invarianter Felder zu einer zeitartigen Röhre, *Nuovo Cim.* **19**, 787.

Borchers, H. J. (1962), On structure of the algebra of field operators, *Nuovo Cim.* **24**, 214.

Borchers, H. J. (1965a), On the structure of the algebra of field operators, *Commun. Math. Phys.* **1**, 49.

Borchers, H. J. (1965b), On the vacuum state in quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **1**, 57.

Borchers, H. J. (1966), Energy and momentum as observables in quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **2**, 49.

Borchers, H. J., R. Haag and B. Schroer (1963), The vacuum state in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **29**, 148.

Borchers, H. J. and W. Zimmermann (1964), On the self-adjointness of field operators, *Nuovo Cim.* **31**, 1047.

Boyce, J. F., R. Delbourgo, A. Salam and J. Strathdee (1967), Partial wave analysis (part I) Trieste, Preprint IC/67/9.

Brenig, W. and R. Haag (1959), Allgemeine Quantentheorie der Stossprozesse, *Fortschr. Phys.* **7**, 183.

Bros, J. (1965), Axiomatic field theory, [Trieste 65], 85—120.

Bros, J., H. Epstein and V. Glaser (1964), Some rigorous analyticity properties of the four-point function in momentum space, *Nuovo Cim.* **31**, 1265.

Bros, J., H. Epstein and V. Glaser (1967), On the connection between analyticity and Lorentz covariance of Wightman functions, *Commun. Math. Phys.* **6**, 77.

Bruhat, F. (1956), Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. de France* **89**, 97.

Burgoyne, N. (1958), On the connection of spin with statistics, *Nuovo Cim.* **8**, 607.

Chen, T. W. (1967), Asymptotic quantum field theory, *Ann. Phys.* **42**, 476.

Chen, T. W., F. Rohrlich and M. Wilner (1967), Role of causality in quantum field theory and the dynamical postulate, *J. Math. Phys.* **7**, 1365.

Chernikov, N. A. (1962), The Fock representation of the Duffin-Kemmer algebra, *Acta Phys. Polon.* **21**, 51.

Christenson, J. H., J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay (1964), Evidence for the 2π decay of the K_2^0 meson, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138.

Chou Kang Chao and M. I. Shirokov (1958), (Чжоу Гуан Чжао и М. И. Широков), 偏極した粒子の反応の相対論的な理論, ЖЭТФ **34**, 1230.

Dell'Antonio, G. F. (1967), Support of a field in p-spece, *J. Math. Phys.* **2**, 759.

Dell'Antonio, G. F. (1961b), On the connection between spin and statistics, *Ann. of Phys.* **16**, 153.

Dell'Antonio, G. F. (1967), Structure of the algebras of some free systems, Istituto di Fisica Teorica, Università di Napoli, Preprint.

Dell'Antonio, G. F., O. W. Greenberg and E. C. G. Sudarshan (1962), Parastatistics: axiomatic formulation connection with spin and statistics and *TCP* theorem for a general field theory, [Istanbul], 403—407.

Doplicher, S. (1965), An algebraic spectrum condition, *Commun. Math. Phys.* **1**, 1.

Dyson, F. J. (1958a), On the connection of weak local commutativity and regularity of Wightman functions, *Phys. Rev*, **110**, 579.

Dyson, F. J. (1958b), Integral representations of causal commutators, *Phys, Rev.* **110**, 1460.

Efimov, G. V. (1968), On a class of relativistic invariant distributions, *Commun. Math. Phys.* **7**, 138.

Ehrenpreis, L. (1954), Division by a polynomial of derivation, *Amer. J. Math.* **76**, 883.

Epstein, H. (1963), On the Borchers class of a free field, *Nuovo Cim.* **27**, 886.

Epstein, H. (1967), *CTP* invariance of the *S*-matrix in a theory of local observables, *J. Math. Phys.* **8**, 750.

Fabri, E., L. E. Picasso and F. Stroochi (1967), Broken symmetries in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **48A**, 376.

Federbush, P. G. and K. A. Johnson (1960), The uniqueness of the two-point function, *Phys. Rev.* **120**, 1926.

Feinberg, G. and S. Weinberg (1959), On the phase factors in inversion, *Nuovo Cim.* **14**, 571.

Feinberg, V. Ya. (1961) (В. Я. Файнберг), 場の量子論における因果性の条件, ЖЭТФ **40**, 1758.

Feinberg, V. Ya. (1964), 公理論的アプローチにおける場の量子論の方程式, [Dubna 64], 第1巻, 140—170.

Fell, J. M. G. (1960), The dual spaces of C^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94**, 365.

Feshbach, H. and N. Tomljanovich (1967), *Selection rules for parafields*, Mass. Inst. of Technology, Cambridge, Massachusetts.

Fierz, M. (1939), Über die relativistische Theorie kraftfreier Teilchen mit beliebigen Spin, *Helv. Phys. Acta* **12**, 13.

Fierz, M. and W. Pauli (1939), On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, *Proc. Roy. Soc.* **A173**, 211.

Fischer, J. and R. Ráczka (1966), Infinite-dimensional irreducible representations of Lie algebras of compact unitary groups, Trieste, Preprint IC/66/101.

Fock, V. (1932), Konfigurationsraum und zweite Quantelung, *Zs. f. Phys.* **75**, 622.

Frank, W. M. (1962), Convergence of perturbation expansions in cutoff meson theories, *J. Math. Phys.* **3**, 936.

Fried, H. M. (1962), Axiomatic perturbation theory for retarded functions, *J. Math. Phys.* **3**, 1107.

Froissart, M. and J. R. Taylor (1967), Cluster decomposition and the spin and statistics, *Phys. Rev.* **153**, 600.

Gachok, V. P. (1961) (В. П. Гачок), Haag の定理の一つの一般化, УМЖ **13**, 22.

Gachok, V. P. (1965), 場の量子論におけるモーメント問題, ДАН СССР **103**, 349.

Gachok, V. P. (1966a), Quasi-analytic functionals and self-adjointness of field operators, *Nuovo Cim.* **45**, 158.

Gachok, V. P. (1966b), A description of all self-adjoint extensions of the field operators Preprint ITF-66-5, Kiev.

Galindo, A. and F. J. Yndurain (1963), On parastatistics, *Nuovo Cim.* **30**, 1040.

Gårding, L. (1944), On a class of linear transformations connected with group representations, *Medd. Lunds. Mat. Sem.* **6**.

Gårding, L. and J. L. Lions (1959), Functional analysis, *Suppl. Nuovo Cim.* **14**, 9.

Gelfand, I. M. and A. G. Kostyuchenko (1955) (И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко), 微分演算子その他の固有関数を用いた展開について, ДАН СССР **103**, 349.

Gelfand, I. M. and G. E. Shilov (1953) (И. М. Г. и Г. Е. Шилов), 急増加関数の Fourier 変換と Cauchy 問題の解の一意性, УМН **8**, No. 6, 3.

Gelfand, I. M. and A. M. Yaglom (1948) (И. М. Г. и А. М. Яглом), 相対論的不変な方程式の一般形と群の無限次元表現, ЖЭТФ **18**, 703.

Glaser, V., H. Lehmann and W. Zimmermann (1957), Field operators and retarded functions, *Nuovo Cim.* **6**, 1122.

Good, R. H., Jr. (1955), Properties of the Dirac matrices, *Rev. Mod. Phys.* **27**, 187.

Gorgé, V. (1966), Lorentz-invariant distributions, Syracuse University, Preprint SU-66-03.

Gourdin, M. (1967), *TCP* invariance, time-reversal invariance and K-meson decay, Lectures given at III-rd Tokyo Summer Institute, September 1967, Preprint ORSAY.

Govorkov, A. B. (1966a) (А. Б. Говорков), パラ統計および超統計についての注意, [Yalta], 770—777.

Govorkov, A. B. (1966b), Note on the parastatistics, Preprint JINR E2-3003, Dubna.

Govorkov, A. B. (1967), アイソスピンおよびストレンジネス型の内部自由度のパラ場による表示の可能性について, プレプリント ОИЯИ Р4-3602, Дубна.

Grawert, G., G. Lüders and H. Rollnik (1959), The *TCP* theorem and its applications, *Fortschr. Fhys.* **7**, 291.

Green, H. S. (1953), A generalized method of field quantization, *Phys. Rev.* **90**, 270.

Greenberg, O. W. (1959), Haag's theorem and closed operators, *Phys. Rev.* **115**, 606.

Greenberg, O. W. (1961), Generalized free fields and models of local field theory, *Ann. of Phys.* **16**, 158.

Greenberg, O. W. (1962), Heisenberg fields which vanish on domains of momentum space, *J. Math. Phys.* **3**, 859.

Greenberg, O. W. (1964), Coupling of internal and space–time symmetries, *Phys. Rev.* **135B**, 1447.

Greenberg, O. W. (1965), Parafield theory, Report at the Conference on Mathematical Physics held at Endicott House in Dedham, Massachusetts.

Greenberg, O. W. (1963), Quantum field theory model whose truncated vacuum expectation values vanish beyond some order, *J. Math. Phys.* **4**, 613.

Greenberg, O. W. and A. M. L. Messiah (1965), Selection rules, parafields and the absence of paraparticles in nature, *Phys. Rev.* **138B**, 1155.

Grossmann, A. (1965), Hilbert space of type *S*., *J. Math. Phys.* **6**, 54.

Grossmann, A. (1966), Elementary properties of nested Hilbert spaces, *Commun. Math. Phys.* **21**, 1.

Grossmann, A. (1967), Fields at a point, *Commun. Math. Phys.* **4**, 203.

Grothendieck, A. (1955), Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American Math. Society, No. 16.

Guenin, M. (1966a), On the interaction picture, *Commun. Math. Phys.* **3**, 120.

Guenin, M. (1966b), *Lectures in Theoretical Physics*, vol. IX-A. Lectures delivered at

the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1966. Edited by A. O. Barut, W. E. Brittin and M. Guenin, The University of Colorado Press, Boulder.

Guenin, M. (1968), Practical use of algebraic concepts in quantum field theory, [Karpacz].

Guenin, M. and B. Misra (1963), On the von Neumann algebras generated by field operators, *Nuovo Cim.* **30**, 1273.

Guillot, J. C. et J. L. Petit (1966), Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré I, II. *Helv. Phys. Acta.* **39**, 281 et 308.

Gürsey, F. (1963), Introduction to group theory, *Relativity, Groups and Topology.* Les Houches 1963, C. DeWitt and B. DeWitt (ed.), Gordon and Breach, London, 1964, pp. 91—161.

Haag, R. (1955), On quantum field theories, *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29**, No. 12, 55.

Haag, R. (1957), Discussion des《axiomes》et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locaux avec particules composées, [Lille] 151—162.

Haag, R. (1958), Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions, *Phys. Rev.* **112**, 669.

Haag, R. (1959), The framework of quantum field theory, *Nuovo Cim. Suppl.* **14**, 131.

Haag, R. (1962), The mathematical structure of the Bardeen—Cooper—Schrieffer model, *Nuovo Cim.* **25**, 287.

Haag, R. (1963), Remarks on the mathematical structure of quantum field theory, [Analysis] 192—196.

Haag, R. and D. Kastler (1964), An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.* **5**, 848.

Haag, R. and J. A. Swieca (1965), When does a quantum field theory describe particles? *Commun. Math. Phys.* **1**, 308.

Haag, R. and B. Schroer (1962), Postulates of quantum field theory, *J. Math. Phys.* **3**, 248.

Hagedorn, R. (1959), Note on symmetry operators in quantum mechanics, *Nuovo Cim. Suppl.* **12**, 73.

Hall, D. and A. S. Wightman (1957), A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory, *Dan. Mat. Fys. Medd.* **31**, No. 5.

Harish-Chandra (1947), On relativistic wave equations, *Phys. Rev.* **71**, 793.

Heisenberg, W. (1943), Die《Beobachtbaren Grössen》in der Theorie der Elementarteilchen, *Zs. f. Phys.* **120**. 513.

Hepp, K. (1963a), Lorentz-kovariante analytische Funktionen, *Helv. Phys. Acta* **36**, 355.

Hepp, K. (1963b), On the asymptotic condition in a local relativistic quantum field

theory, *Acta Phys. Austriaca* **17**, 85.

Hepp, K. (1964a), Spatial cluster decomposition properties of the S-matrix, *Helv. Phys. Acta* **37**, 659.

Hepp, K. (1964b), Lorentz invariant analytic S-matrix amplitudes, *Helv. Phys. Acta* **37**, 55.

Hepp, K. (1965a), On the connection between the LSZ and Wightman quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **1**, 95.

Hepp, K. (1965b), On the connection between Wightman and LSZ quantum field theory, [Brandeis] 135—246.

Hepp, K. (1965c), One-particle singularities of the S-matrix in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **6**, 1762.

Hepp, K. (1966), Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization, *Commun. Math. Phys.* **2**, 301.

Hepp, K. (1967), Fundamental theoretical questions, 《Report at the Heidelberg Conference on Elementary Particles》.

Hepp, K., R. Jost, D. Ruelle and O. Steinmann (1961), Necessary condition on Wightman functions, *Helv. Phys. Acta* **34**, 542.

Hörmander, L. (1958), On the division of distributions by polynomials, *Arch. Math.* **3**, 555.

Ingraham, R. L. (1962), Relativistic invariance and the tacit uniqueness postulate in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **26**, 328.

Jacob, M. and G. C. Wick (1959), On the general theory of collisions for particles with spin, *Ann. Phys.* **7**, 404.

Jaffe, A. (1965), On the approximation of quantum field theories, *J. Math. Phys.* **6**, 1172.

Jaffe, A. (1967), High energy behaviour in quantum field theory, I. Strictly localizable fields, *Phys. Rev.* **158**, 1454.

Jaffe, A. and R. Powers (1967), Infinite volume limit of a $\lambda\varphi^4$ field theory, University of Pennsylvania, Preprint.

Jauch, J. M. and C. Piron (1963), Can hidden variables be excluded in quantum mechanics?, *Helv. Phys. Acta* **36**, 827.

Joos, H. (1962), Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentz-gruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik, *Fortschr. Phys.* **10**, 65.

Joos, H. (1964), Complex angular momentum and the representations of the Poincaré group with space-like momentum, [Boulder], 132—138.

Jordan, Th. F. and E. C. G. Sudarshan (1962), Reduction of operator rings and the irreducibility axiom in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **3**, 587.

Jost, R. (1957), Eine Bemerkung zum *CTP*-Theorem, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409.

Jost, R. (1959), Das Pauli-Prinzip und die Lorentz-Gruppe, *Theoretical Physics in*

the 20-th Century. A memorıal volume to Wolfgang Pauli, M. Fierz and V. F. Weisskopf (ed.), Interscience, New York-London, 1960, pp. 107—136.

Jost, R. (1960), Die Normalform einer komplexen Lorentz-transformation, *Helv. Phys. Acta* **33**, 773.

Jost, R. (1961), Properties of Wightman functions, [Caianiello], 127—145.

Jost, R. (1963), *TCP* invarianz der Streumatrix und interpolierende Felder, *Helv. Phys. Acta* **36**, 77.

Jost, R. (1966), Über das zeitliche Verhalten von glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung, *Helv. Phys. Acta* **39**, 21.

Jost, R. and H. Lehmann (1957), Integral representation of causal commutators, *Nuovo Cim.* **5**, 1598.

Jost, R. and K. Hepp (1962), Über die Matrixelemente des Translationsoperators, *Helv. Phys. Acta* **35**, 34.

Kadison, R. (1963), Types of von Neumann algebras in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **4**, 1511.

Kadyshevskii, V. G. and I. T. Todorov (1966) (В. Г. Кадышевский и И. Т. Тодоров), ISL (6) 対称性；表現と不変量, Ядерная Физика **3**, 135.

Källén, G. (1950), Formal integration of the equations of quantum theory in the Heisenberg representation, *Arkiv f. Phys.* **2**, 371.

Källén, G. (1952), On the definition of renormalization constants in quantum electrodynamics, *Helv. Phys. Acta* **25**, 417.

Källén, G. (1960), Properties of the vacuum expectation values of fields operators, [Les Houches] 387—454.

Källén, G. (1968), Gradient terms in commutators of currents and fields, [Karpacz].

Källén, G. and J. Toll (1960), Integral representations for the vacuum expectation value of three scalar local fields, *Helv. Phys. Acta* **33**, 753.

Källén, G. and A. S. Wightman (1958), The analytic properties of the vacuum expectation value of a product of three scalar local fields, *Mat. Fys. Skr. Kgl. Danske Wid. Selskab.* **1**, No. 6.

Kamefuchi, S. and H. Umezawa (1951), The vacuum in quantum electrodynamics, *Prog. Theor. Phys.* **6**, 543.

Kamefuchi, S. and Y. Takahashi (1962), A generalization of field quantization and statistics, *Nucl. Phys.* **36**, 177.

Kamefuchi, S. and J. Strathdee (1963), A generalization of field quantization and statistics (II), Interacting fields, *Nucl. Phys.* **42**, 166.

Kamefuchi, S., L. O'Raifeartaigh and A. Salam (1961), Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories, *Nucl. Phys.* **28**, 529.

Kaschluhn, F. (1959), On the asymptotic and causality conditions in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **12**, 541.

Kaschluhn, F. (1960), On the asymptotic and causality conditions in quantum field theory, II. *Nuovo Cim.* **17**, 609.

Kastler, D. (1963), A C^*-algebras approach to field theory, [Analysis], 179—191.

Kastler, D. (1965), The C^*-algebras of a free boson field, I. Discussion of the basic facts, *Commun. Math. Phys.* **1**, 14.

Kats, G. I. (1960) (Г. И. Кац), Hilbert 空間の一般化された元, УМЖ **12**, 13.

Kharatian, S. G. (1968) (С. Г. Харатян), 超選択則の可換性と観測量の完全な組, ДАН СССР, **180**, 564.

Kharatian, S. G. and A. I. Oksak (1968), On the hypothesis of commutative superselection rules, Preprint JINR, E2-3799, Dubna.

Khoruzhii, S. S. (1967) (С. С. Хоружий), くりこみ不可能な相互作用の公理論的理論の構成, I. 解析的汎関数としてのくりこみ不可能な場, ОИЯИ P2-3085, Дубна.

Kimelsen, C. O. (1966), On unique supports of analytic functionals, *Ark. f. Mat.* **6**, 307.

Klein, O. (1938), Quelques remarques sur le traitement approximatif du problème des électrons dans un réseau cristallin par la mécanique quantıque, *J. Phys. Rad.* **9**, 1.

Kristensen, P., L. Mejlbo and E. T. Poulsen (1965), Tempered distributions in infinitely many dimensions, I. Canonical field operators, *Commun. Math. Phys.* **1**, 175.

Langerholc, J. and B. Schroer (1965), On the structure of the von Neumann algebras generated by local functions of the free Bose field, *Commun. Math. Phys.* **1**, 215.

Langerholc, J. and B. Schroer (1967), Can current operators determine a complete theory? *Commun. Math. Phys.* **4**, 123.

Lassner, G. and A. Uhlmann (1967), Faithful representations of algebras of test functions, Preprint JINR E-2-3583, Dubna.

Lee, T. D. (1965), Weak interactions and questions of C, P, T-noninvariances, *Proceedings of Oxford International Conference on Elementary Particles*, September 1965, Rutherford High Energy Laboratory, 1966, 225.

Lee, T. D. (1966), Time reversal symmetry, Physikertagung, 1966, *München Dtsch. und Österr. Phys. Ges. Plenarvortr.*, Teil 2, Stuttgart, 1967, 243—261.

Lee, T. D., R. Oehme and C. N. Yang (1957), Remarks on possible noninvariance under time reversal and charge conjugation, *Phys. Rev.* **106**, 340.

Lee, T. D. and G. C. Wick (1966), Space inversion, time reversal and discrete symmetries in local field theories, *Phys. Rev.* **148**, 1520.

Lehmann, H. (1954), Properties of propagation functions and renormalization constants of quantized fields, *Nuovo Cim.* **11**, 342.

Lehmann, H., K. Symanzik and W. Zimmermann (1955), Zur Formulierung quan-

tisierter Feldtheorien, *Nuovo Cim.* **1**, 205.

Lehmann, H., K. Symanzik and W. Zimmermann (1957), The formulation of quantized field theories, II., *Nuovo Cim.* **6**, 319.

Lévy-Leblond J. M. (1963). Galilei group and nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.* **4**, 776.

Licht, A. L. (1963), Strict localization, *J. Math. Phys.* **4**, 1443.

Licht, A. L. and J. S. Toll (1961), Two-point function and generalized free fields, *Nuovo Cim.* **21**, 346.

Lions, J. L. (1952/1953), Supports dans la transformation de Laplace, *J. Analyse Math.* **2**, 369.

Lipshutz, N. R. (1966), Invariance principles and the K^0—$\overline{K}^0$ propagator matrix, *Phys. Rev.* **144**, 1300.

Logunov, A. A. and Nguyen van Hieu (1964) (А. А. Логунов и Нгуен ван Хьеу), 場の量子論の一般原理と検証可能な結論 [Dubna 64], 第II巻, 38—65.

Logunov, A. A., Nguyen van Hieu and I. T. Todorov (1966) (А. А. Л., Н. в. Х. и И. Т. Тодоров), 局所場理論における散乱振幅のあいだの漸近関係, УФН **88**, 51.

Lomont, J. S. (1960), Decomposition of direct products of representations of the inhomogeneous Lorentz group, *J. Math. Phys.* **1**, 237.

Lopuszanski, J. T. (1965), On the unitary inequivalent representations in the quantum field theory and the many body problem, *Acta Phys. Hung.* **19**, 29.

Lüders, G. (1954), On the equivalence of invariance under time reversal and under particle-antiparticle conjugation for relativistic field theories, *Dan. Mat. Fys. Medd.* **28**, 5.

Lüders, G. (1957), Proof of the *TCP* theorem, *Ann. Phys.* **2**, 1.

Lüders, G. (1961), *TCP* theorem and related problem, [Caianiello], 1—26.

Lüders, G. and B. Zumino (1958), Connection between spin and statistics, *Phys. Rev.* **110**, 450.

Mackey, G. W. (1952), Induced representations of locally compact groups I, *Ann. of Math.* **55**, 101.

Majorana, E. (1937), *Nuovo Cim.* **14**, 171.

Malgrange, B. (1953), Équations aux dérivées partielles à coefficients constants, I. Solution élémentaire, *Comptes Rendus*, Paris **237**, 1620.

Mandelstam, S. (1958), Determination of pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory, *Phys. Rev.* **112**, 1344.

Manoharan A. C. (1962), The primitive domain of holomorphy for the 4 and 5 point Wightman functions, *J. Math. Phys.* **3**, 853.

Martin A. (1966), Inability of field theory to exploit the full unitarity condition, CERN, Preprint TH. 727, Geneva.

Martineau, A. (1963), Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de

Fourier—Borel, *J. d'Analyse Math.* **11**, 1.

Maurin, K. (1963a), Mathematical structure of Wightman formulation of quantum field theory, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astr. et phys.* **11**, 115.

Maurin, K. (1963b), On some theorems of H. J. Borchers, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astr. et phys.* **11**, 121.

Medvedev, B. V. (1961) (Медведев, Б. В.), 漸近場の標準積による散乱行列の汎関数展開について, ЖЭТФ **40**, 826.

Medvedev, B. V. and M. K. Polivanov (1961) (Б. В. М. и М. К. Поливанов), 公理的方法で調べた行列要素の増え方, ЖЭТФ **41**, 1130.

Medvedev, B. V. and M. K. Polivanov (1964), 散乱行列の公理論的構成について, [Dubna 64], 第1巻, 77—139.

Medvedev, B. V. and M. K. Polivanov (1967a), 公理論的場の理論における断熱仮定の定式化, プレプリント ИТФ-67-24, Киев.

Medvedev, B. V. and M. K. Polivanov (1967b), 微分を含む相互作用の厳密な解をもつモデル, プレプリント ИТФ-67-25, Киев.

Medvedev, B. V., M. K. Polivanov and A. D. Sukhanov (1967a) (Б. В. М., М. К. П. и А. Д. Суханов), 公理論的量子論における場のくりこみ, プレプリント ИТФ-67-28, Киев.

Medvedev, B. V., M. K. Polivanov and A. D. Sukhanov (1967b), 微分を含む相互作用のモデル, ユニタリ性の問題と解の標準形, プレプリント ИТФ-67-26, Киев.

Medvedev, B. V., M. K. Polivanov and A. D. Sukhanov (1967c), 公理論的方法における場の量子論の動力学の問題, プレプリント ИТФ-67-27, Киев.

Medvedev, B. V., M. K. Polivanov and A. D. Sukhanov (1967d), スペクトル表示と場のくりこみ, プレプリント ИТФ-67-29, Киев.

Medvedev, B. V., M. K. Polivanov and A. D. Sukhanov (1967e), 因果律の条件と Bogoliuvov の公理系と Lehmann=Symanzik=Zimmermann の公理系のあいだの関係, プレプリント ИТФ-67-38, Киев.

Meiman, N. N. (1964) (Н. Н. Мейман), 因果律と散乱振幅の漸近的振舞い, ЖЭТФ **47**, 1966.

Messiah, A. M. L. and O. W. Greenberg (1964), Symmetrization postulate and its experimental foundation, *Phys. Rev.* **136B**, 248.

Methée, P. D. (1954), Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz, *Comm. Math. Helv.* **28**, 225.

Methée, P. D. (1955), Transformée de Fourier de distributions invariantes, *Comptes Rendus*, Paris, **240**, 1179.

Methée, P. D. (1957), L'équation des ondes avec second membre invariant, *Comm. Math. Helv.* **32**, 153.

Michel, L. (1962), Invariance in quantum mechanics and group extension, [Istanbul], 135—200.

Minkowski, P., D. N. Williams and R. Seiler (1964), On Stapp's theorem, [Boulder], 173—189.

Möller, N. H. (1962), The analyticity domain of the five point function, *Nucl. Phys.* **35**, 434.

Moussa, P. and R. Stora (1964), Some remarks on the product of irreducible representations of the inhomogeneous Lorentz group, [Boulder], 37—69.

Muraskin, M. and K. Nishijima (1961), Time-ordered Green's functions and perturbation theory, *Phys. Rev.* **122**, 331.

Naimark, M. A. (1964) (M. A. Наймарк), 群の無限次元表現およびそれに関連する諸問題, 論文集 《Итоги науки, Математический анализ, Теория вероятностей, Регулирование》, 1962, Винити, 1964, pp. 38—82.

Nelson, E. (1959), Analytic vectors, *Ann. of Math.* **70**, 572.

Nelson, E. (1963), Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, [Analysis], 87—120.

Nelson, E. (1964), Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5**, 1190.

von Neumann, J. (1931), Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Ann.* **104**, 570.

Nishijima, K. (1957), On the asymptotic conditions in quantum field theory, *Prog. Theor. Phys.* **17**, 765.

Nishijima, K. (1958), Formulation of field theory of composite particles, *Phys. Rev.* **111**, 995.

Nishijima, K. (1960), Asymptotic conditions and perturbation theory, *Phys. Rev.* **119**, 485.

Nussbaum, A. E. (1965), Quasianalytic vectors, *Ark. f. Mat.* **6**, 179.

Ogievetskii, V. I. and Chou Kang Chao (1959) (В. И. Огиевецкий и Чжоу Гуан Чжао), 素粒子論における荷電対称性と一般 Lorentz 群の表現, ЖЭТФ **36**, 264.

Okun, L. B. (1966) (Л. Б. Окунь), *CP* 不変性の破れ, УФН **89**, 603.

Parke, W. C. and H. Jehle (1964), Covariant spinor formulation of relativistic wave equations under the homogeneous Lorentz group, [Boulder], 297—387.

Pauli, W. (1940), On the connection between spin and statistics, *Phys. Rev.* **58**, 716.

Pauli, W. (1955), Exclusion principle, Lorentz group and reflection of space-time and charge, *Niels Bohr and the Development of Physics*, W. Pauli (ed.), Pergamon Press, New York, 1955, pp. 30—51.

Petrina, D. Ya. (1961) (Д. Я. Петрина), エネルギー運動量演算子が正のスペクトルをもつ非局所場の理論はつくりえないことについて, УМЖ **13**, No. 4, 109.

Pohlmeyer, K. (1967), Eine Abschwächung der Lokalitätsbedingung, Hamburg, Preprint.

Polivanov, M. K. (1965), Causal *S*-matrix in the axiomatic approach, [Trieste 65],

121—136.

Prugovecki, E. (1964), Multiplicative symmetries in axiomatic quantum field theory, *J. Math. Phys.* **5**, 442.

Pugh, R. E. (1963), Finite formulation of quantum field theory, *Ann. Phys.* **23**, 335.

Pugh, R. E. (1965), S-operator theory, I. Formulation, *J. Math. Phys.* **6**, 740.

Pugh, R. E. (1966), S-operator theory, II. Quantum electrodynamics, *J. Math. Phys*, **7**, 376.

Rashevskii, P. K. (1955) (П. К. Рашевский), スピノルの理論, УМН **10**, No. 2, 3.

Rashevskii, P. K. (1958), 量子電磁力学の数学的基礎, УМН **13**, No. 3, 3.

Redmond, P. and J. L. Uretsky (1960), In-out formalism for nonrelativistic quantum mechanics, *Ann. Phys.* **9**, 106.

Reeh, H. und S. Schlieder (1961), Bemerkungen zur Unitäräquivalenz von Lorentz-invarianten Feldern, *Nuovo Cim.* **22**, 1051.

Reeh, H. und S. Schlieder (1962), Über den Zerfall der Feldoperator-algebra im Falle einer Vakuumentartung, *Nuovo Cim.* **26**, 32.

Reiss, H. R. (1962), A convergent perturbation expansion in first-quantized electrodynamics, *J. Math. Phys.* **3**, 387.

Robinson, D. W. (1962), Support of a free field in momentum space, *Helv. Phys. Acta* **35**, 403.

Robinson, D. W. (1964), On a soluble model of relativistic field theory, *Phys. Lett.* **9**, 189.

Robinson, D. W. (1965a), Algebraic aspects of relativistic quantum field theory, [Brandeis], 389—516.

Robinson, D. W. (1965b), A theorem concerning the positive metric, *Commun. Math. Phys.* **1**, 89.

Rohrlich, F. (1964), Functional differential calculus of operators, *J. Math. Phys.* **5**, 324.

Rohrlich, F. and M. Wilner (1966), Functional differential calculus of operators, II, *J. Math. Phys.* **7**, 482.

Rohrlich, F. and J. G. Wray (1966), Ordering theorems, *J. Math. Phys.* **7**, 1967.

Ruelle, D. (1961), Connection between Wightman functions and Green functions in *p*-space, *Nuovo Cim.* **19**, 356.

Ruelle, D. (1962), On the asymptotic condition in quantum field theory, *Helv. Phys. Acta* **35**, 147.

Ruelle, D. (1966), States of physical systems, *Commun. Math. Phys.* **3**, 133.

Sannikov, S. S. (1967) (С. С. Санников), 回転群の無限次元表現, Ядерная физика **6**, 1084.

Schmidt, W. und K. Baumann (1956), Quantentheorie der Felder als Distributionstheorie, *Nuovo Cim.* **4**, 860.

Schwartz, L. (1945), Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, *Annales de l'Université de Grenoble* **21**, 57.

Schwartz, L. (1952), Théorie des noyaux, *Proceedings of the international congress of mathematicians* **1**, 220.

Schwartz, L. (1953/4), Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Séminaire de l'Institut Henri Poincaré.

Schwartz, L. (1954), Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, *Comptes Rendus*, Paris, **239**, 847.

Schwinger, J. (1951), On the theory of quantized fields, I, *Phys. Rev.* **82**, 914.

Shirokov, M. I. (1961) (М. И. Широков), a+b → c+d+e … 型の反応の相対論的な一般論, ЖЭТФ **40**, 1387.

Shirokov, M. I. (1962), 崩壊過程における *PC* および *PCT* 不変性の検証, УФН **78**, 471.

Shirokov, Yu. M. (1957—1959) (Ю. М. Широков), 相対論的量子力学の基礎の群論的考察, I. 非斉次 Lorentz 群の一般的性質, ЖЭТФ **33** (1957), 861; II. 非斉次 Lorentz 群の既約表現の分類, ЖЭТФ **33** (1957), 1196; III. 非斉次 Lorentz 群の P_0 および O_0 クラスの既約表現と完全可約でない表現, ЖЭТФ **33** (1957), 1208; IV. 量子論における空間反転, ЖЭТФ **34** (1958), 717; V. 空間反転および時間反転を含む非斉次 Lorentz 群の既約表現, ЖЭТФ **36** (1959), 879.

Shirokov, Yu. M. (1960a), Space and time reflections in relativistic theory, *Nucl. Phys.* **15**, 1.

Shirokov, Yu. M. (1960b), Types of symmetry of elementary particles, *Nucl. Phys.* **15**. 13.

Sobolev, S. L. (1936), Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Matem. Sb.* No. **1**. (43), 39.

Steinmann, O. (1960), Über den Zusammenhang zwischen Wightman-funktionen und retardierten Kommutatoren, I und II, *Helv. Phys. Acta* **33**, 257 und 347.

Steinmann, O. (1963a), Zur Definition der retardierten und zeitgeordneten Produkte, *Helv. Phys. Acta.* **36**, 90.

Steinmann, O. (1963b), Structure of the two point functions, *J. Math. Phys.* **4**, 583.

Stone, M. H. (1951—1952), On unbounded operators in Hilbert space, *J. Indian Math. Soc.* **15**, 155.

Stoyanov, D. Tz. and Todorov, I. T. (1968), Majorana representations of the Lorentz group and infinite-component fields, *J. Math. Phys.* **9**, 2146.

Streater, R. F. (1964), Almost local field theories of the *S*-matrix, *Phys. Rev.* **136B**, 1748.

Streater, R. F. (1967), Uniqueness of the Haag-Ruelle scattering states, *J. Math. Phys.* **8**, 1685.

Stueckelberg, E. C. G. et Rivier, D. (1950), Causalité et structure de la Matrice S, *Helv. Phys. Acta.* **23**, 215.

Stueckelberg, E. C. G. (1951), Relativistic quantum theory for finite time intervals, *Phys. Rev.* **81**, 130.

Stueckelberg, E. C. G. et A. Petermann (1953), La normalisation des constantes dans la théorie des quanta, *Helv. Phys. Acta.* **26**, 499.

Sukhanov, A. D. (1965) (А. Д. Суханов), 《半無限区間》 *S* 行列に対する運動方程式とその結果, ЖЭТФ **49**, 1812.

Sukhanov, A. D. (1966), 《準局所》 Heisenberg 演算子と場の量子論におけるくりこみの問題, ЖЭТФ **51**, 1195.

Symanzik, K. (1960), On the many-particle structure of Green's functions in quantum field theory, *J. Math. Phys.* **1**, 249.

Symanzik, K. (1963), Application of functional integration to euclidean quantum field theory, [Analysis], 197—206.

Symanzik, K. (1966), Euclidean quantum field theory, I. Equations for a scalar model, *J. Math. Phys.* **7**, 510.

Tagamlitskii, Ya. (1954—1956) (Я. Тагамлицкий), 錐体の補集合と一般関数の問題への応用 Гос. Соф. унив. Физ. мат. фак. **49**, 第1冊 (1954—1955), 第1部, 24, 第2部, 41; **50** 第1冊 (1955—1956), 第1部, 135.

Thirring, W. (1958), On interacting spinor fields in one dimension, *Nuovo Cim.* **9**, 1007.

Todorov, I. T. (1964) (Тодоров, И. Т.), 場の量子論における公理論的アプローチ [Dubna 64], 5—76.

(独訳, *Fortschr. Phys.* **13** (1965) 649; なお I. Todorov, On some recent achievements in the axiomatic approach to quantum field theory, *Acta Phys. Hung.* **19** (1965), 199 も参照).

Uhlmann, A. (1961), Spectral integral for the representation of the space-time translation group in relativistic quantum theory, *Ann. Phys.* **13**, 453.

Uhlmann, A. (1962), Über die Definition der Quantenfelder nach Wightman und Haag, *Wiss. Zeits. Karl Marx-Univ.* **11**, 213.

Vladimirov, V. S. (1960) (В. С. Владимиров), 特殊な形をした領域に対する正則包の構成について, ДАН СССР **134**, 251.

Volkov, D. B. (1959) (Д. В. Волков), 半整数スピンをもつ場の量子化について, ЖЭТФ **36**, 1560.

Volkov, D. B. (1960), 量子化の一般的方法と *S* 行列, ЖЭТФ **38**, 518.

Weidlich, W. (1963), On the inequivalent representations of canonical commutation relations in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **30**, 803.

Weinberg, S. (1964a), Feynman rules for any spin, *Phys. Rev.* **133B**, 1318.

Weinberg, S. (1964b), Feynman rules for any spin, II. Massless particles, *Phys.*

Rev. **134B**, 882.

Wick, G. C. (1962), Angular momentum states for three relativistic particles, *Ann. Phys.* **18**, 65.

Wick, G. C. (1966), Discrete symmetries problems, [Yalta], 227—236.

Wick, G. C., A. S. Wightman and E. P. Wigner (1952), The intrinsic parity of elementary particles, *Phys. Rev.* **88**, 101.

Wightman, A. S. (1956), Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.* **101**, 860.

Wightman, A. S. (1957), Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique relativiste, [Lille], 1—38.

Wightman, A. S. (1959), Relativistic invariance and quantum mechanics, Notes by A. Barut, *Nuovo Cim. Suppl.* **14**, 81.

Wightman, A. S. (1960a), Quantum field theory and analytic functions of several complex variables, *J. Indian Math. Soc.* **24**, 625.

Wightman, A. S. (1960b), L'invariance dans la mécanique quantique relativiste, [Les Houches], 159—226.

Wightman, A. S. (1960c), Analytic functions of several complex variables, [Les Houches], 227—315.

Wightman, A. S. (1962), Recent achievements of axiomatic field theory, Lecture at Trieste Seminar., [Trieste 62], 11—58.

Wightman, A. S. (1964a), La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Ser.* A **1**, 403

Wightman, A. S. (1964b), Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields, *Cargese lectures in theoretical physics, High energy electromagnetic interactions and field theory,* M. Lévy (ed.), Gordon and Breach, London, 1967, pp. 171—291.

Wightman, A. S. (1967), Progress in the foundation of quantum field theory, *Proceedings of the International Theoretical Physics Conference on Particles and Fields*, C. R. Hagen, G. Guralnik and V. A. Mathur (ed.), Intersience, London, 1967, pp. 187—232.

Wightman, A. S. and L. Gårding (1964), Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum field theory, *Ark. f. Fys.* **28**, 129.

Wigner, E. P. (1939), On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Ann. of Math.* **40**, 149.

Wigner, E. P. (1950), Do the equations of motion determine the quantum-mechanical commutation relations? *Phys. Rev.* **77**, 711.

Wigner, E. P. (1956), Relativistic invariance in quantum mechanics, *Nuovo Cim.* **3**, 517.

Wigner, E. P. (1960a), Normal form of antiunitary operators, *J. Math. Phys.* **1**.

409.

Wigner, E. P. (1960b), Phenomenological distinction between unitary and antiunitary symmetry operators, *J. Math. Phys.* **1**, 414.

Wigner, E. P. (1962a), Unitary representations of inhomogeneous Lorentz group including reflections, [Istanbul], 37—80.

Wigner, E. P. (1962b), Invariant quantum mechanical equations of motion, [Trieste 62], 59—82.

Winogradzki, J. (1957), Spineurs du second rang à composantes invariantes et formalisme spinoriel incluant les parités, *J. Phys. Rad.* **18**, 387.

Winogradzki, J. (1958), La représentation spinorielle du groupe de Lorentz général, *Cahiers de Physique* **12**, 261.

Winogradzki, J. (1959), Sur la conjugaison de charge et deux transformations analogues, *Comptes Rendus*, Paris, **248**, 1480.

Wizimirski, Z. (1966), On the existence of the field of operators in the axiomatic quantum field theory, *Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Série des sciences math. astr. et phys.* **14**, 91.

Wray, J. G. (1967), The current formalism, I. Ordering theorems for currents, II. The *S*-matrix in perturbation theory, Syracuse University, Preprint SU-67-2.

Yang, C. N. and D. Feldman (1950), The *S*-matrix in the Heisenberg representation, *Phys. Rev.* **79**, 972.

Zimmermann, W. (1954), Über den Zusammenhang von Bethe-Salpeter-gleichung und Tamm Dancoff-methode, *Nuovo Cim. Suppl.* **11**, 43.

Zimmermann, W. (1958), On the bound state problem in quantum field theory, *Nuovo Cim.* **10**, 597.

[訳者補足]
荒木不二洋，物理学と作用素環，数学 **20** (1968)，142—153.
荒木不二洋a，C^*-環の自己同型によるハミルトニアンの意味づけ，数理解析研究所講究録 No. 118 (1971)《ハミルトニアンの定義とスペクトル》, pp. 88—103.
荒木不二洋b，C^*-環と物理学
江沢　洋，無限自由度の系の量子力学，日本物理学会誌 **25** (1970)，30—37.
江沢　洋a，場の理論のモデル，数理解析研究所講究録 No. 102 (1970)《散乱理論とその周辺》, pp. 71—103.
一松　信，《多変数解析函数論》，培風館 (1960).
弥永昌吉，杉浦光夫，《応用数学者のための代数学》，岩波書店 (1960).
越　昭三，核型空間の定義について，数学 **19** (1967)，95—98.
松島与三，《リー環論》(現代数学講座)，共立出版 (1956).
松島与三a，《多様体入門》(数学選書)，裳華房 (1965).
酒井栄一，《多変数関数論》(共立全書)，共立出版 (1966).
関根克彦，場の量子論における自己共役演算子，数理解析研究所講究録 No. 118 (1971)《ハミルトニアンの定義とスペクトル》, pp. 13—39.
豊田利幸，井上　健 (編)，《量子力学 III》(岩波講座・現代物理学の基礎)，岩波書店 (1972).
梅村泰郎，ヒルベルト空間の核型拡大と核型空間，数学 **15** (1964)，193—201.
梅村泰郎a，関数空間上の測度と場の交換関係，数理科学 1963年9月号，pp. 53—60.
山中　健，《線形位相空間と一般関数》(共立数学講座)，共立出版 (1966).
山内恭彦，《回転群とその表現論》，岩波書店 (1958).
山内恭彦a，杉浦光夫，《連続群論入門》(新数学シリーズ)，培風館 (1960).
横田一郎，《群と位相》(基礎数学選書)，裳華房 (1971).
Kato, Y. (1961), *Prog. Theor Fhys.* **26**, 99.

原著の発行後に現われた講義録の類を拾えば：——

Chretien, M. and S. Deser (ed.), *Theory of Renormalization* (Brandeis Univ. Summer Inst. in Theoretical Physics, 1970), Gordon and Breach (1971).
DeWitt, C. and R. Stora (ed.), *Mathematical Physics, Quantum Field Theory and Statistical Mechanics* (1970 Les Houches Summer School), Gordon and Breach, to be published.
Eckmann, J. P. and M. Guenin, *Méthodes Algébriques en Mécanique Statistique* (Lecture Note in Mathematics), Springer, Berlin (1969).
Feldman, D. (ed.), *Proc. of the Fifth Annual Eastern Theoretical Physics Conf.* (Nov. 1966), Benjamin (1967).
Goodman, R. and I. Segal (ed.), *Mathematical Theory of Elementary Particles* (Proc. of the Endicott House Conf., Sept. 1965), The M. I. T. Press, Cambridge, Mass. (1966).
Hepp, K., *Théorie de la Renormalisation* (Lecture Notes in Physics), Springer,

Berlin (1966).

Jost, R. (ed.), *Local Quantum Theory* (Proc. of the International School of Physics, "Enrico Fermi", August, 1968), Academic Press, New York (1969).

Kastler, D. (ed.), *Constructive Statistical Mechanics and Structural Field Theory*, (Cargèse Lectures in Physics, vol. 4 1969 session), Gordon and Breach (1970).

Lurçat, F. (ed.), *Applications of Mathematics to Problems in Theoretical Physics* (Cargèse Lectures in Theoretical Physics, 1965 session), Gordon and Breach (1967).

Michel, L. et al., *Système à un Nombre Infini de Degrés de Liberté* (Colloques Internationaux du C. N. R. S., No. 181; Mai, 1969), Edition du C. N. R. S., Paris (1970).

Ramakrishnan, A. (ed.), *Symposia on Theoretical Physics* (1964 Summer School at Matscience, Madras), Plenum Press, New York (1967).

Speer, E. R., *Generalized Feynman Amplitudes* (Annals of Mathematical Studies, No. 62), Princeton University Press (1969).

索　　引

定義が与えられているなど特に重要なページは太字で示す．わが国で未だ定着していない訳語には原語（ロシア語）を添えた．

ア　　行

カ 行

サ　行

タ 行

ナ 行

マ 行

ヤ 行

訳者あとがき

この本は，1969年に出版された Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров による《Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля》（場の量子論における公理論的アプローチの基礎）の全訳です．

《公理論》という言葉がでてきますが，この本は，場の理論がすでに完成しているとして，それを公理化しようというようなものではありません．この本の表題が《公理論的アプローチ》となっているのは，素粒子世界の物理学にゆきつくための方法を意味しているのです．私たちは訳書の表題として《場の量子論の数学的方法》を選びました．

量子化された場の理論は，言葉の厳密な意味では，現在まだ存在していません．それは素粒子世界の基礎理論として構想されたもので，種々の理由から，その正しい反映を与えるような形があるはずだと信じられてはいますけれども，現在の場の理論には定義の明確でない概念や形式的・恣意的な演算が少なからず含まれているのです．発散の困難につきまとわれていることは御承知でしょう．

《公理論的アプローチ》の位置づけは，この本の著者たちも序論に述べております．それは，場の量子論のあり得べき形，用いるべき概念ないしは言葉を見いだすための方法としてあるということです．実際，素粒子が生成・消滅するという特質のために自由度の無限大が現われ，その世界は，在来の質点系の量子力学の単なる延長によっては律しきれない異質な側面をもつことが明らかになってきています．有限自由度の部分を切り取ってなかば現象論的に扱うだけならともかく，基礎物理学の立場から本質に迫る理解を望むならば，理論形式の変革なしではすみそうにありません．

では，新しい理論形式とはどんなものでしょうか．それは，まだ誰にもわかりません．それを知るために，一群の物理学者，数学者が，量子論の諸原理，相対論的不変性，物質系の安定性（エネルギーの正値性）など，これだけは成り立っていると考えられる大枠を

抽出して，概念と論理の明確を期しながら，それらの大枠が理論の定式化をいかに規制するかを調べようとしているのです．

条件として考えられる限り弱いものをとったつもりでも，この種の大枠のなかでは規制力が意外に強いということがよく起こります．たとえば，本文 p. 319 に述べられていることですが，空間的距離がある値より大きいとき場が可換であると仮定しますと，その場は実は厳密に局所可換でなければならないという結果が導かれてしまいます．これは，この種の方法の有効性を示すものといえるでしょう．

基礎におく大枠を仮に《公理》とか《要請》とかよぶわけですが，そういうものとしてはアプローチの方向により異なる組がいろいろ考えられており，このこと自体，公理論的アプローチが将来の理論形式をさぐる試行の方法であることを表現しているわけです．

最近では，特殊なモデルを構成する試みを通じて，諸要請の無矛盾性や妥当性を調べ，そしてまた公理論的アプローチから生みだされた概念や方法を具体的に調べる《構成的な場の理論》も始まって，かなりの成功をおさめており，公理論的アプローチの仲間に含めて考えられることも多いのですが，これは本書の原書刊行後の発展に属します．

いずれにしても，議論はいきおい数学的となる．事実，公理論的アプローチは一般関数の理論や関数解析の近年の質的発展をまってはじめて可能となったのでした．

この本の原書は1969年に出版されたもので，同系の Streater and Wightman (1964) や Jost (1965) の本*) にくらべてみると，その後の発展をとりいれることによって，公理論的アプローチのいろいろの方向の総括を与え，それらの相互関係もある程度まで明らかにし得ていることが一つの特徴です．解説は大変ていねいになされています．

数学の多用という点ではこの本も同じですけれども，物理の本として見たとき特に身構えた姿勢を感じさせることがなく，いわば日常的な感覚で数学を使っている点も特徴の一つです．これはソ連数学の特質でもあるでしょうが，同時に，一般関数にせよ関数解析にせよ場の理論にかかわる主要な発展の少なからぬ部分が著者たち自身の国でなされたということの反映でもあると思われます．もちろん，物理方面の読者に対する著者の配慮もあるわけで，数学専攻の方の目から見ると，もっと異なった言い表わし方をしたほうがよいと思われる記述もあることでしょう．そういう場面でも，正確な定式化を試みるのに十分

---

*) 巻末の参考文献の [2] と [3].

なだけの情報は，この本に盛り込まれていると思います．

著者のうち，N. N. Bogoliubov については，おそらくよく知られていて紹介の必要もないかもしれません．1909年にゴリキイ市に生まれたBogoliubovは，1923年にはN. M. Krylovのセミナーにおいて非線形振動の研究を始め，翌年にはもう論文を書いています．これが非線形微分方程式を近似的に解く漸近的方法の展開という1941年頃までの仕事につながってゆくのです．師Krylovとの共著になる《非線形力学入門（1937)》（英訳は *Annals of Mathematics Series*, No. 11, Princeton University Press）*) を含むその諸成果が，最近に刊行された論文集（Избранные Труды, Изд. «Наукова Думка», Киев）の第1巻に収録されています．

1939—1950年の仕事は主に統計物理にかかわり，論文集の第2巻にまとめられています．古典力学的な非平衡系に対する一連の多体分布関数の時間変化を上記の漸近的方法によって論じ（いわゆるB–B–G–K–Y方程式の研究，1946)，また超流動性にかかわるBose粒子系のエネルギー・スペクトルの問題を有名なBogoliubov変換によって解いた(1947)のがこの時期で，後者は論文集の第3巻に入っている超伝導の研究につながってゆきます．

場の量子論に関する仕事も第3巻で，これが始まったのは1951年です．因果律を汎関数微分（変分）により表現する仕事が1952年にあり，分散公式を基礎づけるBogoliubov=Medvedev=Polivanovの理論（1958）は，その発展とも考えられます．そこでは，複素変数一般関数の境界値ともいうべきものにかかわる《Edge-of-the-Wedge》の定理を独自に証明（1956）して道具として用いています．この系統には一般関数の積を解析接続により定義するという考えがつながり，その考えからくりこみ理論を定式化したParasiukとの仕事（1955—1957）や，またVladimirovとの仕事（1958）もあります．

総じてBogoliubovの仕事は，どれも独自の新しい観点と方法の導入に基づいているという点で際立っています．

Bogoliubovは現在Dubnaの合同原子核研究所の所長です．1970年5月には万国博覧会を機会に来日し，東京大学**) その他で講演をしました．本書のカバーを飾っている写真は，その折に菊池俊吉さんによって撮影されたものです．

---

*) Mitropolskyとの共著になる《非線型振動論—漸近的方法》(1955) は邦訳されています：益子正教訳，共立出版．

**) 講演の記録：素粒子物理学のいくつかの問題，雑誌《科学》1970年7月号，岩波書店．

他の二人の共著者については，伝記的な資料を見いだすことができませんでした．

Logunov は，古いほうでは1956年にくりこみ群や π 中間子の光生成を伴う反応に対する分散公式の論文などを書き，1959年には Vladimirov と共著で《場の量子論に現われる一般関数の解析接続》を論じており，この本の文献リストには1964，1966年の二篇の論文が見えています．おもに分散公式の分野で仕事をしてきた人で，最近にもその方面の論文があるようです．現在は Serpukhov 高エネルギー研究所の所長であり，その関係からか研究所の 70 GeV 陽子シンクロトロンの調整と作動開始についての共著報告などもあります．

Todorov はブルガリアの代表的な理論物理学者で，1960年に奇妙な粒子の関与する非弾性散乱過程の散乱振幅がもつ解析性を調べた論文があり，1964年には Dubna の合同原子核研究所において本書の部分的な原型になったという講義をしました．最近では無限成分をもつ場の問題に関心が集中している模様で，数多い論文を発表しています．

翻訳は，訳者の紹介もかねて最後のページに示すとおりの分担で第一次原稿をつくり，セミナーを進めながら皆で逐次検討したうえ，訳文の調子をそろえるために江沢が全体にわたって補正を加えるという手順で行ないました．

もちろん内容の討議もして，原書の数式のミスプリントに気づけば修正し，必要と思われるところには最少限の訳注（*) で示す）をつけましたが，これらは原著者に報告してあります．

また，邦語の参考書を各章の文献案内の末尾にいくらか補っておきました．[山中] などとあるのがそれで，リストは巻末の参考文献の終わりにつけてあります．

原文でイタリック体になっている単語や文章は，訳では《　》でかこんで示し，定理などの場合には一段さげて印刷することにしました．もともと原文にあった《 》は都合により〈　〉になりました．

ロシア人名はローマ字化*) しましたが，巻末の参考文献のリストを見ていただけば原綴もわかります．

原書の索引は比較的簡単なものだったので，新しくつくりました．これには関数空間などの記号表の役目もかねさせたつもりです．訳語の定着していないものなど，いくつかの

---

*) 英文で書かれた論文が見つかったときは，本人がそこに記した表記法に従い，見つからないときには Physics Abstract の表記法に従いました．

見出し語には原語をそえておきました．

いざ翻訳の作業にかかってみますと，翻訳とは何かにつき訳者それぞれに一家言があって調整にだいぶ時間を使いました．結局，解釈は抑えて原文を忠実になぞることが第一だという線に落ちついたと思います．上にも記したとおり，江沢が訳文の統一に当たりましたが，校正の段階で各分担者の行なう再修正はそのまま残す約束にしたこともあって，それぞれの持ち味も生かされているはずです．通読して気になるほどの不統一がないことを私どもは希望しています．

なお，この本の何ヵ所かに〈場の量子論のすべての公理をみたし散乱現象をもつ（つまり自由場でない）モデルは，現在までのところ一つもないし，存在の証明もない〉という意味のことが述べられています．この点は，上にも触れた構成的な場の理論の進展によって今日いくらかの希望が生まれてきております．多少とも現実に近い二，三のモデルが数学的な統制のもとに入りつつあり，散乱を実際にもつという証明はまだありませんが，ないことはなかろうと多くの人々が期待しているのです．このことも含めて，原書が書かれた後に起こった発展につき，このあとがきで概観なりをしなければとも考えたのですが，どうしても長くなるので，第5章の文献案内の末尾に二，三の補足をし，また巻末にある〈夏の学校〉などの講義録のリストに新しいものを補っておくというだけにしました．

物理学と数学の交流は，場の量子論に限らず広範な前線において，かつてない高揚の時期を迎えています．この本が，わが国の物理学と数学にたずさわる人びとのあいだに相互の関心を高めるよすがになればと願っております．

おわりに，長期にわたり種々お世話いただいた東京図書編集部の長浜陽二さんに心からの感謝をささげたいと思います．

1971 年 12 月

訳　　者

新装版にあたって

本書が版元品切れとなり熱心な読者の需要にこたえられなくなってから久しいが，今度ようやく増刷ができることになった．この間，1975年に出版された英語版

Introduction to Axiomatic Field Theory,

A. Fulling and L.G. Popova 訳，Benjamin

では本書の第 4 章の後半を中心に原著者の手で増補・改訂が行なわれているが，それを本書に採り入れることは諸般の経済が許さなかった．気がついたミスプリントは訂正してある．そのなかには読者の方々に御指摘いただいたものも少なくない．ここに記して深く感謝する．

1980 年 11 月

訳　　者

訳者と分担

江沢　洋（えざわ ひろし）（序論，第5章付録，文献案内）
1955年　東京大学理学部物理学科卒
現　在　学習院大学理学部

亀井　理（かめい おさむ）（第2章，第5章§1，§2）
1955年　東京大学理学部物理学科卒
現　在　お茶の水女子大学理学部

関根克彦（せきね かつひこ）（第4章，第5章§3，§4）
1953年　東京大学理学部物理学科卒
現　在　明星大学理工学部

世戸憲治（せと けんじ）（第3章§1，§2，巻末参考文献）
1963年　北海道大学理学部物理学科卒
現　在　北海学園大学教養部

中村孔一（なかむら こういち）（第3章§3以後，巻末参考文献）
1962年　東京大学理学部物理学科卒
現　在　学習院大学理学部

南條昌司（なんじょう しょうじ）（第1章）
1968年　東京大学理学部数学科卒
現　在　学習院大学理学部

場の量子論の数学的方法　定価 4500円

1972年 1月14日　第1刷発行　Printed in Japan
1980年12月15日　新装版第1刷発行

著　者　エヌ・ボゴリューボフ
ア・ロ グ ノ フ
イ・ト ド ロ フ

検印省略

訳　者　江 沢 洋
亀 井 理
関 根 克 彦

発行所　**東 京 図 書 株 式 会 社**
〒112 東京都文京区水道2—5—22
振替東京4-13803 電話(814)7818～9

3042-3043-5160